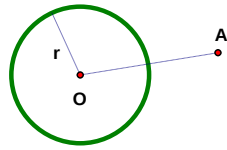


一、點與圓的位置關係：

在平面上，點與圓的位置關係有三種：

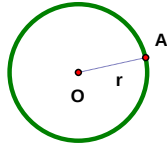
(一) 可能在圓外

圓 O 半徑為 r ，若 A 點在圓外，
則 $OA > r$ 。



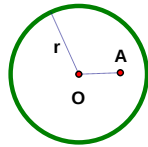
(二) 恰在圓上

圓 O 半徑為 r ，若 A 點在圓上，
則 $OA = r$ 。



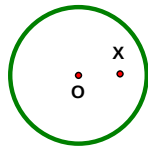
(三) 也可能在圓內

圓 O 半徑為 r ，若 A 點在圓內，
則 $OA < r$ 。

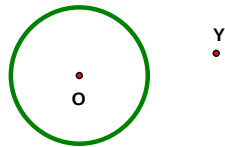


【實戰演練】

- 若圓 O 半徑為 r ，點 X 在圓內。若點 X 與圓最短距離為 $\overline{XE}$ 、最長距離為 $\overline{XF}$ ，請完成下圖，並寫出 r 、 $\overline{XE}$ 及 $\overline{XF}$ 的關係。



- 若圓 O 半徑為 r ，點 Y 在圓外。若點 Y 與圓最短距離為 $\overline{YM}$ 、最長距離為 $\overline{YN}$ ，請完成下圖，並寫出 r 、 $\overline{YM}$ 及 $\overline{YN}$ 的關係。

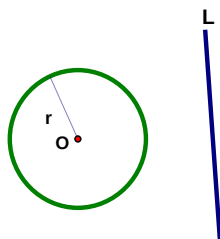


二、線與圓的位置關係：

在平面上，直線與圓的位置關係有三種：

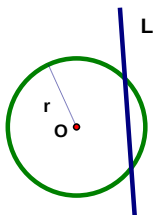
(一) 不相交：

圓 O 半徑為 r ，若直線 L 在圓外，
假設 L 與圓心 O 的距離 $\overline{OX}$ ，
則 $\overline{OX} > r$ 。



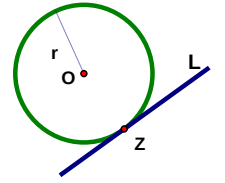
(二) 相交於兩點：

圓 O 半徑為 r ，若直線 L 與圓 O 交於
2 點 (L 亦稱為割線)，假設 L 與圓心
 O 的距離 $\overline{OY}$ ，則 $\overline{OY} < r$ 。



(三) 恰相交於一點：

圓 O 半徑為 r ，若直線 L 與圓 O 交於
一點 Z ，則定義「 Z 為切點、 L 為切
線」。



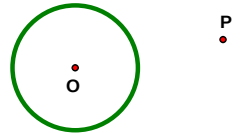
【切線性質】

- 圓心到切線的距離等於圓的半徑。
- 圓心與切線的連線必垂直此切線。
- 過一圓直徑端點的垂線必為為此圓的切線。

三、圓外一點向圓作切線：

(一) P 為圓 O 外一點，

則 P 可向圓 O 作___條切線。



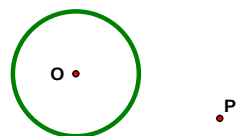
(二) 圓 O 外一點 P ，

則對圓所作的「切線長相等」，
 $\overline{OP}$ 「平分兩切線的夾角」。

【性質證明】

繪製圓外一點 P 的切線 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ ，且證明上述性質。

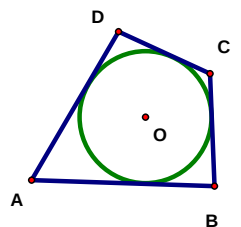
【證明】



(三) 圓外切四邊形—這個超常見喔！

如右圖，圓外切四邊形 $ABCD$ ，
則 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 。

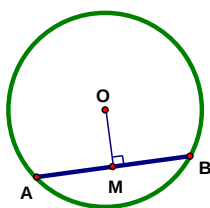
【證明】



四、弦及弦心距：

(一) 弦心距定義：

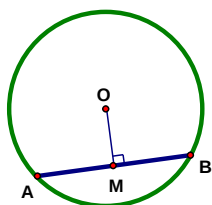
圓心到弦的距離（垂直、最短），則此距離定義為該弦的弦心距。



(二) 弦心距性質：

弦心距線段會「垂直」且「平分」該弦。

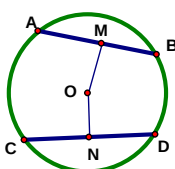
【證明】



五、弦與弦心距的關係：

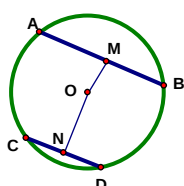
(一) 同圓或相等圓中，等弦 $\Leftrightarrow$ 等弦心距。

$\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為兩弦，若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則 $\overline{OM} = \overline{ON}$ 。



(二) 同圓或相等圓中，長（短）弦 $\Leftrightarrow$ 短（長）弦心距。

$\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為兩弦，若 $\overline{AB} > \overline{CD}$ ，則 $\overline{OM} < \overline{ON}$ 。



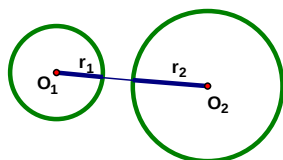
(三) 直徑為圓內最長的弦，直線的弦心距為 0。

六、兩圓的位置關係：

在平面上，兩圓的圓心為 O_1 、 O_2 ，則 $\overline{O_1O_2}$ 為兩圓的連心線，且兩圓的位置關係有五種：

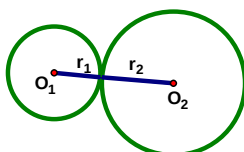
(一) 外離

圓 O_1 及圓 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ，若兩圓外離，則兩圓沒有交點，且 $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ 。



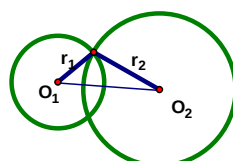
(二) 外切

圓 O_1 及圓 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ，若兩圓外切，則兩圓只有一個交點，且 $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ 。



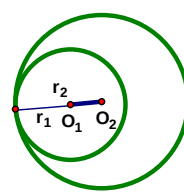
(三) 相交於兩點

圓 O_1 及圓 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ，若兩圓交於 2 點，且 $\overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ 。



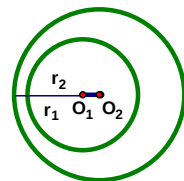
(四) 內切

圓 O_1 及圓 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ，若兩圓內切，則兩圓只交於 1 點，且 $\overline{O_1O_2} = r_2 - r_1$ 。



(五) 內離

圓 O_1 及圓 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ($r_1 < r_2$)，若兩圓內離，則兩圓沒有交點，且 $\overline{O_1O_2} < r_2 - r_1$ 。



【實戰演練】

已知有兩圓，半徑分別為 6、4，令兩圓連心線為 d ，求在下面各狀況下，連心線 d 的值或範圍？

- (1) 外切：_____
- (2) 外離：_____
- (3) 內切：_____
- (4) 內離：_____
- (5) 交於兩點：_____

七、兩圓的公切線：

(一) 定義：

在平面上，如果直線 L 是圓 O_1 的切線且為圓 O_2 的切線，則稱直線 L 為圓 O_1 、 O_2 的公切線。

1. 任意一圓有無限多條切線。
任意兩圓有「有限的公切線」，
任意三圓不一定有公切線。
2. 若公切線夾在兩圓之間，則稱為內公切線，
若兩圓都在公切線的同一側，則稱為外公切線。

(二) 公切線數量：

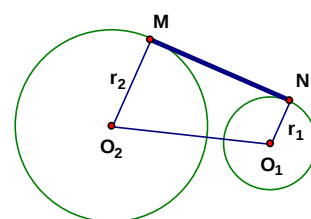
若兩圓半徑分別是 5、8，如果兩圓之連心線長如下，請完成下表：

連心線長	1	3	10	13	15
兩圓關係					
公切線數					

(三) 公切線長

1. 外公切線長

若圓 O_1 、 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ，公切線為 $\overline{MN}$ ，且利用右圖推導 $\overline{MN} = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + \overline{O_1O_2}^2}$ 。



2. 內公切線長

若圓 O_1 、 O_2 半徑分別為 r_1 、 r_2 ，公切線為 $\overline{PQ}$ ，且利

用右圖推導 $\overline{PQ} = \sqrt{(r_2 + r_1)^2 + \overline{O_1O_2}^2}$ 。

