

2-4 指數律

主題1 數的乘方

主題2 指數律

重點整理

自我評量

一題多解

數學新視界

我們在 **1-4** 節曾經學過底數為整數的乘方，

例如： $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$ 可記為 $(-7)^4$ 。

同樣的，相同的分數或相同的小數連乘也可以利用乘方來簡記，

例如： $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$ 可記為 $(\frac{3}{2})^4$ ， $(-5.6) \times (-5.6) \times (-5.6)$

可記為 $(-5.6)^3$ 。



例 1 分數的乘方

搭配課本p144

在下列□中填入適當的數，使等號成立。

$$(1) \left(\frac{7}{9}\right)^5 = \frac{7^{\square}}{9^{\square}}$$

解

$$\begin{aligned}(1) \left(\frac{7}{9}\right)^5 &= \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \\ &= \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9} \\ &= \frac{7^5}{9^5}\end{aligned}$$

所以□中皆填 5。



例 1 分數的乘方

搭配課本p144

在下列□中填入適當的數，使等號成立。

$$(2) \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{(-4)^\square}{3^\square}$$

解

$$\begin{aligned}(2) \left(-\frac{4}{3}\right)^3 &= \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{(-4) \times (-4) \times (-4)}{3 \times 3 \times 3} \\ &= \frac{(-4)^3}{3^3}\end{aligned}$$

所以□中皆填 3。





在下列□中填入適當的數，使等號成立。

$$(1) \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^{\square}}{(-3)^{\square}}$$

$$(2) \left(-\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{(-5)^{\square}}{3^{\square}}$$

解

$$(1) \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}$$

$$= \frac{2^4}{(-3)^4}$$

所以□中皆填 4





在下列□中填入適當的數，使等號成立。

$$(1) \left(\frac{2}{-3}\right)^4 = \frac{2^{\square}}{(-3)^{\square}}$$

$$(2) \left(\frac{-5}{3}\right)^3 = \frac{(-5)^{\square}}{3^{\square}}$$

解

$$\begin{aligned} (2) \left(\frac{-5}{3}\right)^3 &= \left(\frac{-5}{3}\right) \times \left(\frac{-5}{3}\right) \times \left(\frac{-5}{3}\right) \\ &= \frac{(-5) \times (-5) \times (-5)}{3 \times 3 \times 3} \\ &= \frac{(-5)^3}{3^3} \end{aligned}$$

所以□中皆填 3



Key point

分數的乘方

已知 a 、 b 為整數、 n 是正整數，其中 $a \neq 0$ ，

$$\text{則 } \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \text{。}$$



在國小時我們學過，對於一個正數：

(1) 若乘上一個大於 1 的正數，則乘積會大於原來的正數。

例如： $100 \times 1.1 = 110 > 100$ 。

(2) 若乘上一個小於 1 的正數，則乘積會小於原來的正數。

例如： $100 \times 0.99 = 99 < 100$ 。

根據這個性質，我們來看下面的例題。



例 2 乘方的比較大小

搭配課本p145

比較下列各組數的大小。

(1) $(\frac{3}{5})^2$ 、 $(\frac{3}{5})^3$

(2) 1.2^2 、 1.2^3

解 (1) 因為 $(\frac{3}{5})^3 = (\frac{3}{5})^2 \times \frac{3}{5}$ ，

而 $\frac{3}{5} < 1$ ，

所以 $(\frac{3}{5})^3 < (\frac{3}{5})^2$ 。

(2) 因為 $1.2^3 = 1.2^2 \times 1.2$ ，

而 $1.2 > 1$ ，

所以 $1.2^3 > 1.2^2$ 。





比較下列各組數的大小。

(1) 0.5^4 、 0.5^5

解

因為 $0.5^5 = 0.5^4 \times 0.5$

而 $0.5 < 1$

所以 $0.5^5 < 0.5^4$

(2) $(\frac{4}{3})^3$ 、 $(\frac{4}{3})^4$

因為 $(\frac{4}{3})^4 = (\frac{4}{3})^3 \times \frac{4}{3}$

而 $\frac{4}{3} > 1$

所以 $(\frac{4}{3})^4 > (\frac{4}{3})^3$



根據例 2 可以得到：

- (1) 由 $\frac{3}{5}$ 的乘方 $(\frac{3}{5})^n$ 來看，因為 $\frac{3}{5}$ 是小於 1 的正數，每多乘以 $\frac{3}{5}$ 一次，乘積就會變小一次，所以隨著 n 愈大， $(\frac{3}{5})^n$ 會愈小。例如： $(\frac{3}{5})^3 > (\frac{3}{5})^4 > (\frac{3}{5})^5$ 。
- (2) 由 1.2 的乘方 1.2^n 來看，因為 1.2 是大於 1 的數，每多乘以 1.2 一次，乘積就會變大一次，所以隨著 n 愈大， 1.2^n 會愈大。例如： $1.2^3 < 1.2^4 < 1.2^5$ 。



Key point 乘方的比較大小

對於任何一個正數 a 及正整數 n ：

- (1) 當 $a < 1$ 時， $a^n < 1$ ，且 n 的值愈大，
 a^n 的值愈小。
- (2) 當 $a > 1$ 時， $a^n > 1$ ，且 n 的值愈大，
 a^n 的值愈大。





比較下列各組數的大小。

(1) 1.01^{10} 、 1.01^{20}

解

因為 $1.01 > 1$

所以 $1.01^{10} < 1.01^{20}$

(3) 1.01^{10} 、 0.99^{30}

解

因為 $1.01^{10} > 1$ ，又 $0.99^{30} < 1$

所以 $1.01^{10} > 0.99^{30}$

(2) 0.99^{20} 、 0.99^{30}

因為 $0.99 < 1$

所以 $0.99^{20} > 0.99^{30}$





我們也可以利用計算機來檢驗這些數的大小關係，先將 $\frac{3}{5}$ 用小數 0.6 來表示。

(1) 用計算機檢驗 0.6^3 、 0.6^4 、 0.6^5 。

$0.6^3 \rightarrow 0.6 \times 0.6 \times 0.6 =$	0.216) 變小
$0.6^4 \rightarrow 0.216 \times 0.6 =$	0.1296	
$0.6^5 \rightarrow 0.1296 \times 0.6 =$	0.07776) 變小

(2) 用計算機檢驗 1.2^3 、 1.2^4 、 1.2^5 。

$1.2^3 \rightarrow 1.2 \times 1.2 \times 1.2 =$	1.728) 變大
$1.2^4 \rightarrow 1.728 \times 1.2 =$	2.0736	
$1.2^5 \rightarrow 2.0736 \times 1.2 =$	2.48832) 變大



在進行含有乘方的四則運算時，乘方的部分要先計算。



例 3 含乘方的分數運算

搭配課本p147

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$(2) \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

解

$$\begin{aligned} (1) & \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{(-1)^3}{2^3} \times \frac{(-2)^2}{3^2} \\ &= \frac{-1}{\cancel{8}_2} \times \frac{\cancel{4}^1}{9} \\ &= -\frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ &= \frac{(-3)^2}{2^2} \div \frac{3^4}{4^4} = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^4}{3^4} \\ &= \frac{\cancel{9}^1}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{256}^{64}}{\cancel{81}_9} \\ &= \frac{64}{9} \text{ (或 } 7\frac{1}{9}\text{)} \end{aligned}$$





計算下列各式的值。

$$(1) \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3$$

解

$$= \frac{1^2}{4^2} \times \frac{(-2)^3}{5^3}$$

$$= \frac{1}{\cancel{16}_2} \times \frac{-\cancel{8}^1}{125}$$

$$= -\frac{1}{250}$$

$$(2) \left(\frac{5}{2}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{4}\right)^2$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \div \frac{(-5)^2}{4^2}$$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{4^2}{5^2}$$

$$= \frac{\cancel{125}^5}{\cancel{8}_1} \times \frac{\cancel{16}^2}{\cancel{25}_1}$$

$$= 10$$



例 4 含乘方的四則運算

搭配課本p147

計算 $[4 \times (-0.5)^2 + 1.5] \div (-\frac{1}{2})^3$ 的值。

解

$$\begin{aligned} & [4 \times (-0.5)^2 + 1.5] \div (-\frac{1}{2})^3 \\ &= (4 \times 0.25 + 1.5) \div (-\frac{1}{8}) \\ &= (1 + 1.5) \div (-\frac{1}{8}) \\ &= 2.5 \times (-8) \\ &= -20 \end{aligned}$$





計算 $(-0.5)^3 \times 8 + (-0.2)^2 \div (-\frac{1}{3})^2$ 的值。

解

$$(-0.5)^3 \times 8 + (-0.2)^2 \div (-\frac{1}{3})^2$$

$$= (-0.125) \times 8 + 0.04 \div \frac{1}{9}$$

$$= -1 + 0.04 \times 9$$

$$= -1 + 0.36$$

$$= -0.64$$

