4 正餘弦的疊合

主題一 正弦與餘弦函數的疊合 （搭配課本 P.66～P.70）

正弦與餘弦函數的疊合：

若 a 與 b 為不全為 0 的實數，則函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 可以表成正弦函數的形式，即

$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，

其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$、$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

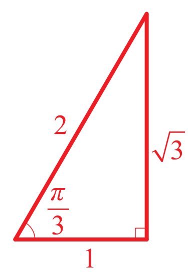
例題 1 【配合課本例 1】

將 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表成正弦函數的形式。

解 因為 $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

所以 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$。



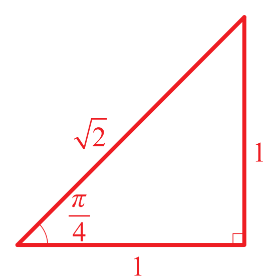
演練 1

將 $y=\sin x+\cos x$ 表成正弦函數的形式。

解 因為 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

所以 $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$。



例題 2

【配合課本例 2】

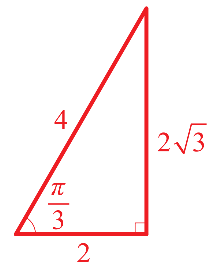
將 $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 表成正弦函數的形式。

解　因為 $\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$，

所以 $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$

$$=4\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$=4\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\text{。}$$



演練 2

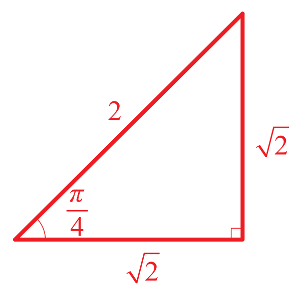
將 $y=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$ 表成正弦函數的形式。

解　因為 $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$，

所以 $y=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\text{。}$$



例題 3

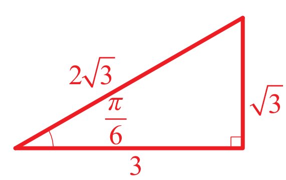
【概念題】

將 $y=-3\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表成正弦函數的形式。

解　$y=-3\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$$=-2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=-2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\text{。}$$



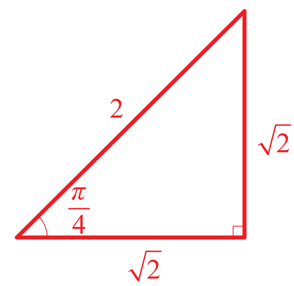
演練 3

將 $y=-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$ 表成正弦函數的形式。

解　$y=-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$

$$=-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=-2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\text{。}$$



例題 4

【常考題】

求 $\dfrac{1}{\cos 80^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$ 的值。

解　原式 $=\dfrac{\sin 80^\circ-\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}=\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\sin 80^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ\right)}{\frac{1}{2}\times 2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}$

$$=\frac{2(\sin 80^\circ\cos 60^\circ-\cos 80^\circ\sin 60^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 160^\circ}=\frac{2\sin(80^\circ-60^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 160^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=4\text{。}$$

演練 4

求 $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ 的值。

解　原式 $=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\dfrac{-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ-\frac{1}{2}\cos 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\times 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\dfrac{-2(\sin 10^\circ\cos 30^\circ-\cos 10^\circ\sin 30^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$

$$=\frac{-2\sin(10^\circ-30^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=4\text{。}$$

主題二　利用疊合求最大最小值
（搭配課本 P.70～P.76）

1. 函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的圖形是以 2π 為週期，振幅為 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的波狀圖形。
2. 函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$。

例題 5
【配合課本例 3】

求下列各函數的最大值與最小值：

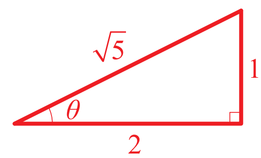
(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$。　　(2) $y=2\sin x-\cos x$。

解 (1) 將函數表成正弦函數的形式，得

$$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)。$$

故 y 的最大值為 2，最小值為 -2。

(2) 將函數表成正弦函數的形式，得



$$y=2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x-\theta)，$$

其中 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$、$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。

故 y 的最大值為 $\sqrt{5}$，最小值為 $-\sqrt{5}$。

演練 5

求下列各函數的最大值與最小值：

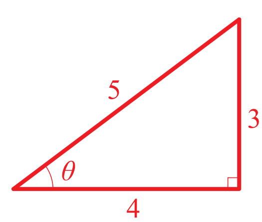
(1) $y=\sin x-\cos x$。　　(2) $y=4\sin x+3\cos x$。

解 (1) 將函數表成正弦函數的形式，得

$$y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)。$$

故 y 的最大值為 $\sqrt{2}$，最小值為 $-\sqrt{2}$。

(2) 將函數表成正弦函數的形式，得



$$y=4\sin x+3\cos x=5\left(\frac{4}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x\right)=5\sin(x+\theta)，$$

其中 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$、$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$。

故 y 的最大值為 5，最小值為 -5。

例題 6　【配合課本例 4】

求函數 $y=2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-4\sin x$ 的最大值與最小值。

解　先利用差角公式把 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 展開，得

$$y=2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)-4\sin x$$

$$=-\sin x-\sqrt{3}\cos x\text{ 。}$$

再將函數表成正弦函數的形式，得

$$y=-2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=-2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\text{ 。}$$

故 y 的最大值為 2，最小值為 -2。

演練 6

求函數 $y=2\cos x-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值與最小值。

解　先利用和角公式把 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 展開，得

$$y=2\cos x-2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\cos x-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=-\sqrt{3}\sin x+\cos x\text{ 。}$$

再將函數表成正弦函數的形式，得

$$y=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=-2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\text{ 。}$$

故 y 的最大值為 2，最小值為 -2。

例題 7

【常考題】

已知 $f(x)=5\cos x-12\sin x$，且當 $x=\theta$ 時，$f(x)$ 有最大值 M，求 M 與 $\sin\theta$ 的值。

解　將函數表成正弦函數的形式，得

$f(x)=-12\sin x+5\cos x=-13\left(\dfrac{12}{13}\sin x-\dfrac{5}{13}\cos x\right)=-13\sin(x-\alpha)$，

其中 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$、$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$。

因為當 $x-\alpha=270^\circ+360^\circ k$，$k$ 為整數時，$f(x)$ 有最大值 $(-13)\times(-1)=13$，

所以 $M=13$。

此時，$\sin\theta=\sin(270^\circ+360^\circ k+\alpha)=\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$。

4

演練 7

已知 $f(x)=3\sin x+4\cos x$，且當 $x=\theta$ 時，$f(x)$ 有最小值 m，求 m 與 $\cos\theta$ 的值。

解　將函數表成正弦函數的形式，得

$f(x)=3\sin x+4\cos x=5\left(\dfrac{3}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}\cos x\right)=5\sin(x+\alpha)$，

其中 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$、$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$。

因為當 $x+\alpha=270^\circ$，即 $x=\theta=270^\circ-\alpha$ 時，$f(x)$ 有最小值 $5\times(-1)=-5$，

所以 $m=-5$。

此時，$\cos\theta=\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$。

例題 8

【配合課本例 5】

在下列各範圍內，求函數 $y=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{6}\cos x+3$ 的最大值與最小值，並求其對應的 x 值。

(1) $0\le x<2\pi$。　　(2) $0\le x\le \pi$。

解　將函數表成正弦函數的形式，得

$$y=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{6}\cos x+3$$
$$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+3$$
$$=2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+3$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\text{。}$$

(1) 因為 $0\le x<2\pi$，即 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，所以 $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$。

①當 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 時，y 有最大值 $2\sqrt{2}\times1+3=3+2\sqrt{2}$。

②當 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{11\pi}{6}$ 時，y 有最小值 $2\sqrt{2}\times(-1)+3=3-2\sqrt{2}$。

(2) 因為 $0\le x\le\pi$，即 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$。

①當 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 時，y 有最大值 $2\sqrt{2}\times1+3=3+2\sqrt{2}$。

②當 $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 時，y 有最小值 $2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3=3-\sqrt{6}$。

演練 8

在下列各範圍內，求函數 $y=\sin x+\cos x+2$ 的最大值與最小值，並求其對應的 x 值。

(1) $0\le x<2\pi$。　　(2) $0\le x\le \pi$。

解　將函數表成正弦函數的形式，得

$$y=\sin x+\cos x+2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+2$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+2=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\text{。}$$

(1) 因為 $0\le x<2\pi$，即 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{4}$，所以 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$。

①當 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 時，y 有最大值 $\sqrt{2}\times1+2=2+\sqrt{2}$。

②當 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{4}$ 時，y 有最小值 $\sqrt{2}\times(-1)+2=2-\sqrt{2}$。

(2) 因為 $0\le x\le\pi$，即 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$。

①當 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 時，y 有最大值 $\sqrt{2}\times1+2=2+\sqrt{2}$。

②當 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\pi$ 時，y 有最小值 $\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2=1$。

例題 9

【配合課本例 6】

在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，求方程式 $\cos x-\sin x=1$ 的解。

解　將方程式的左式表成正弦函數的形式，得

$$-\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=-\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\text{。}$$

代回原方程式，得 $-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$。

因為 $0\le x<2\pi$，即 $-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$，所以 $x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$。

故解得 $x=0$ 或 $\frac{3\pi}{2}$。

演練 9

在 $0 \le x < 2\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ 的解。

解　將方程式的左式表成正弦函數的形式，得

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)。$$

代回原方程式，得 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$，即 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

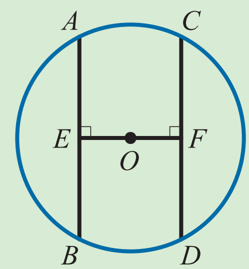
因為 $0 \le x < 2\pi$，即 $-\frac{\pi}{3} \le x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$，所以 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$。

故解得 $x = \frac{7\pi}{12}$ 或 $\frac{13\pi}{12}$。

例題 10

【配合課本例 7】

素　想在半徑 50 公尺的圓形池塘內，建造一座 H 字形的木橋跨越池面，如右圖所示。設 O 為圓心，$\angle COF = x$（$0 < x < \frac{\pi}{2}$），$\overline{EF} \perp \overline{AB}$，$\overline{EF} \perp \overline{CD}$，且 $\overline{EO} = \overline{OF}$。



(1) 選出木橋的總長。

　① $200\sin x$　② $100\cos x$　③ $200\sin x + 100\cos x$

　④ $100\sin x + 200\cos x$。

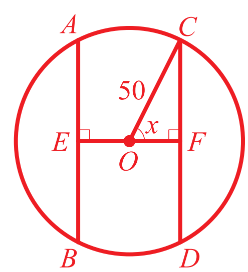
(2) 求木橋總長最長的長度，與此時 $\overline{EF}$ 的長度。

解　(1) 依題意得 $\overline{CF} = 50\sin x$、$\overline{OF} = 50\cos x$。

因此，木橋總長為

$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = 2\times 50\sin x + 2\times 50\sin x + 2\times 50\cos x = 200\sin x + 100\cos x$

故選③。



(2) $200\sin x + 100\cos x = 100\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right) = 100\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$，

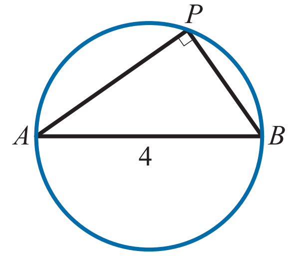
其中 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$、$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$。

故當 $x + \alpha = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 時，木橋總長最長為 $100\sqrt{5}$ 公尺。

此時 $\overline{EF} = 100\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 100\sin\alpha = 100\times\frac{1}{\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}$（公尺）。

演練 10

素 想在直徑為 4 公尺的圓形池塘，建造一座直角三角形的木橋跨越池面，如右圖所示。設 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，求木橋總長最長的長度。



解 因為 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，所以 $\overline{AB}$ 為直徑。

設 $\angle PAB=x$（$0<x<\frac{\pi}{2}$），得 $\overline{PA}=4\cos x$、$\overline{PB}=4\sin x$。

因此，木橋總長為

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{AB}=4\cos x+4\sin x+4=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+4=4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4，$$

故木橋總長最長為 $4\sqrt{2}+4$ 公尺。

例題 11 【常考題】

求函數 $y=5\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x$ 的最大值與最小值。

解 $y=5\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=5\times\frac{1-\cos 2x}{2}-\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=-\sin 2x-3\cos 2x+2=-\sqrt{10}\sin(2x+\theta)+2$，

其中 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$、$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$。

故 y 的最大值為 $\left(-\sqrt{10}\right)\times(-1)+2=2+\sqrt{10}$、最小值為 $\left(-\sqrt{10}\right)\times 1+2=2-\sqrt{10}$。

演練 11

求函數 $y=\cos x(\sin x-\cos x)$ 的最大值與最小值。

解 $y=\cos x\left(\sin x-\cos x\right)=\sin x\cos x-\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$。

故 y 的最大值為 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$、最小值為 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

重要精選考題

基礎題

（主：代表本單元對應的主題）

1 關於函數 $y=\sin x-\cos x$ 的圖形，選出正確的選項。

(1)週期為 π

(2)振幅為 2

(3)與 y 軸的交點為 $(0,-1)$

(4)與 x 軸有無限多個交點

(5)對稱於直線 $x=\frac{\pi}{4}$。 主一

解 (3)(4)

2 求函數 $y=4\sin 2x+3\cos 2x$ 圖形的週期與振幅。 主一

解 週期為 π，振幅為 5

3 求 $\frac{\sqrt{3}}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sin 250^\circ}$ 的值。 主一

解 4

4 下列哪一個數值最接近 2？

(1) $\sqrt{3}\cos 44^\circ+\sin 44^\circ$

(2) $\sqrt{3}\cos 54^\circ+\sin 54^\circ$

(3) $\sqrt{3}\cos 64^\circ+\sin 64^\circ$

(4) $\sqrt{3}\cos 74^\circ+\sin 74^\circ$

(5) $\sqrt{3}\cos 84^\circ+\sin 84^\circ$。 主一

解 (1)

5 求函數 $y=5\sin x+12\cos x+10$ 的最大值與最小值。 主二

解 最大值 23，最小值 -3

6 求函數 $y=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin x$ 的最大值與最小值。 主二

解 最大值 1，最小值 -1

7 已知 $f(x)=3\cos x-4\sin x+2$，且當 $x=\theta$ 時，$f(x)$ 有最大值，求 $\cos\theta$ 的值。 主二

解 $\dfrac{3}{5}$

8 在 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 的範圍內，求函數 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$ 的最大值與最小值。 主二

解 最大值 2，最小值 $1-\sqrt{3}$

9 在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ 的解。 主二

解 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{11\pi}{6}$

10 求函數 $y=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的最大值與最小值。 主二

解 最大值 $\dfrac{3}{2}$，最小值 $-\dfrac{1}{2}$

進階題

1 下列哪些函數的週期為 π？

(1) $\sin x+\cos x$ (2) $\sin x-\cos x$ (3) $3\sin x-4\sin^3 x$ (4) $\cos^2 x-\sin^2 x$ (5) $\sin x\cos x$。

解 (4)(5)

重要精選考題

2 設 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\cos 2020^\circ$，選出 θ 可能的值。

(1) 20°　(2) 100°　(3) 200°　(4) 280°。

解　(3)(4)

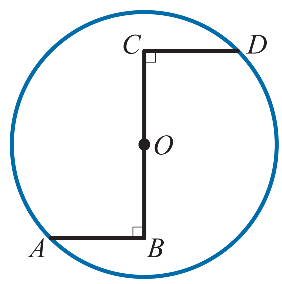
3 已知函數 $f(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$。

(1)設 $f(x)=r_1\sin(x+\theta_1)$，其中 $r_1>0$，$0<\theta_1<\pi$，求 r_1、θ_1 的值。

(2)設 $f(x)=r_2\cos(x+\theta_2)$，其中 $r_2>0$，$0<\theta_2<\pi$，求 r_2、θ_2 的值。

解　(1) $r_1=2$，$\theta_1=\dfrac{2\pi}{3}$　(2) $r_2=2$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$

4 素　欲在一半徑為 50 公尺的圓形池塘上建造一座如圖的木橋。已知 O 為圓心，且 $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$、$\overline{OC}=\overline{OB}$，求木橋總長 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ 最長的長度。

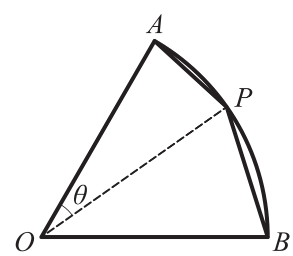


解　$100\sqrt{2}$ 公尺

5 如圖，扇形 OAB 的半徑為 3、$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，$P$ 為圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一點。

(1)設 $\angle AOP=\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，已知四邊形 $OAPB$ 的面積可以表示成 $a\sin\theta+b\cos\theta$，求 $a+b$ 的值。

(2)求四邊形 $OAPB$ 的面積最大值。



解　(1) $\dfrac{9+9\sqrt{3}}{4}$　(2) $\dfrac{9}{2}$

考前衝刺精華

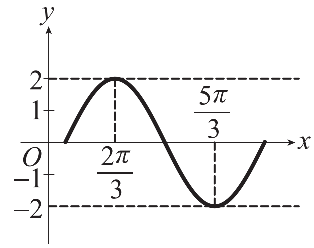
1 關於函數 $f(x)=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ 的圖形，下列敘述何者為真？

(1)週期是 π　(2)振幅是 2　(3) $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸的交點為 $(0,3)$

(4) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有無限多個交點　(5) $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點。【屏東高中】

解　(3)(4)

2 已知 $y=a\sin x+b\cos x$ 的圖形如右圖所示，求數對 $(a,b)=$______。



解　$(\sqrt{3},-1)$

【花蓮女中】

3 下列各選項的值，何者滿足不等式：$\sqrt{3}\sin x+\cos x\le 1$？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5。【宜蘭高中】

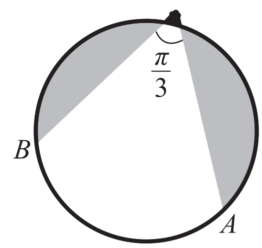
解　(3)(4)(5)

4 設 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\sin 10^\circ$，$b=3\sin 12^\circ-4\sin^3 12^\circ$，$c=\cos^2 24^\circ-\sin^2 24^\circ$，$d=\sqrt{\frac{1-\cos 112^\circ}{2}}$，

則 a,b,c,d 大小關係為______。（答案請以 a,b,c,d 表示）【大直高中】

解　$d>a>c>b$

5 素 有一個半徑 $50m$ 的圓形廣場，在牆面上裝有一個探照燈，已知探照燈射出的光線區域所張成的角為 $\frac{\pi}{3}$，如右圖。則：



(1)燈光打在圓形廣場牆面上的弧長為______ m（請用 π 表示）。

(2)燈光所照射的區域面積最大為多少 m^2？

解　(1) $\frac{100\pi}{3}$　(2) $\frac{2500\pi}{3}+1250\sqrt{3}m^2$

【高師大附中】

歷屆大考觀摩

1 令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試選出正確的選項。

(1)鉛直線 $x=\frac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸

(2)若鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 均為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a)=f(b)$

(3)在區間 $[0,2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

(4)在區間 $[0,2\pi)$ 中滿足 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π

(5) $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=4\sin^2\frac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到。【112 學測 A】

解 (1)(5)

2 x 代表實數，請選出正確的選項：

(1)當 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 時，$\cos 2x$ 之值恆為正

(2)當 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 時，$\sin 2x$ 之值恆為正

(3)不論 x 為何，$\cos^2 x-\sin^2 x\le\frac{1}{2}$ 恆成立

(4)不論 x 為何，$\sin x\cos x\le\frac{1}{2}$ 恆成立

(5)不論 x 為何，$\sin x+\cos x\le\frac{3}{2}$ 恆成立。【指乙】【答對率 49%】

解 (2)(4)(5)

3 考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項：

(1) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(2) f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) f 的最小值為 0

(4) $f\left(\frac{\pi}{10}\right)>f\left(\frac{\pi}{9}\right)$

(5)函數 f 的（最小正）週期為 π。【102 指甲】【答對率 54%】

解 (1)(2)