

主題1 一元二次方程式的意義

8 課外探索 P.254

• 天元術

1 教師可適時提醒學生，方程式與多項式的差別在於方程式中含有等號。

2 教師可回顧一元一次方程式和二元一次方程式，再比較一元二次方程式，讓學生更清楚方程式的命名。

圖解筆記
一元二次方程式
最高次數是 2 有等號
 $3x^2 + 2x + 1 = 0$
一種未知數



根據上面的對話，我們可以假設小翊的年齡為 x 歲，依題意列出方程式： $(x+4)^2 - 20x = 29$ 。利用第 1 章學過的乘法公因式，得到 $x^2 + 8x + 16 - 20x = 29$ ，化簡得 $x^2 - 12x - 13 = 0$ 。

觀察化簡後的方程式，只含有一種未知數 x ，且 x 的最高次數是二次。像這樣經過化簡，可以寫成形如 $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 $a \neq 0$) 的等式，我們稱為 x 的一元二次方程式。

例如： $-2x^2 + 3x = 12$ 、 $2x^2 = 3x$ 、 $(x+3)(x-8) = 14$ 、 $6x^2 - 15 = 0$ 、... 都是 x 的一元二次方程式。但是方程式 $x^2 + 3x = x^2 - 13$ 經化簡後得到 $3x + 13 = 0$ ，就不是 x 的一元二次方程式。

Key point

一元二次方程式

一個方程式經化簡後可寫成 $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 $a \neq 0$) 的形式，就稱此方程式為 x 的一元二次方程式。

學習內容

A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。
A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。

• 隨堂練習
P.47 第1題

隨堂練習

判斷下列式子是否為一元二次方程式？是的打「○」，不是的打「×」。

(×) (1) $x+3=0$

(○) (2) $x^2+5x=-13$

(○) (3) $(x-4)(x+3)=0$

(×) (4) $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$

(×) (5) x^2+x-3

(1) $x+3=0$ 是一元一次方程式

(4) $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$, $2x^2+5x-2=2x^2-3x-2$, $8x=0$ 不是一元二次方程式

(5) x^2+x-3 是多項式

教師宜提醒學生，方程式須經化簡後，方可判斷是否為一元二次方程式。

如果將某數代入一元二次方程式的未知數中，會使等號左右兩邊的值相等，就稱這個數為此一元二次方程式的解或根。而求出一元二次方程式的解或根的過程，稱為解一元二次方程式。

例 1

判別一元二次方程式的解

• 隨堂練習
P.47 第2題

1. 判別 5 是否為一元二次方程式 $x^2+25x=50$ 的解？

2. 判別 -1 是否為一元二次方程式 $x^2-5x=-2x+4$ 的解？

利用代入法判斷一元二次方程式的解。可讓學生對方程式解的過程有更深的了解。

解

1. 將 $x=5$ 代入等號左邊，

得到 $5^2+25 \times 5=25+125 \neq 50$ ，

所以 5 不是一元二次方程式 $x^2+25x=50$ 的解。

2. 將 $x=-1$ 代入等號左邊，得到 $(-1)^2-5 \times (-1)=6$ ，

將 $x=-1$ 代入等號右邊，得到 $-2 \times (-1)+4=6$ ，

等號左、右兩邊的值相等，

所以 -1 是一元二次方程式 $x^2-5x=-2x+4$ 的解。

重新布題

重新布題

若一個一元二次方程式可化簡為「等號的一邊是兩個一次式，另一邊是0」，則可利用「有兩數 A 、 B ，若 $A \times B = 0$ ，則 $A=0$ 或 $B=0$ 」的性質求解。我們來看下面的例題。

例 2

1 因式分解一元二次方程式的步驟如下：

- (1) 將方程式右邊化為0。
- (2) 將方程式左邊分解為兩個一次因式的乘積。
- (3) 令每個因式分別為0，得到兩個一元一次方程式。
- (4) 解兩個一元一次方程式，它們的解就是原方程式的解。

利用提公因式解方程式 學習內容 A-8-7

解下列各一元二次方程式。

(1) $2x^2 + 3x = 0$

(2) $\frac{1}{3}x^2 - 4x = 0$

解 (1) $2x^2 + 3x = 0$
 $x(2x + 3) = 0$ (提公因式 x)
 $x = 0$ 或 $2x + 3 = 0$
 $x = 0$ 或 $x = -\frac{3}{2}$

所以方程式的解為0和 $-\frac{3}{2}$ 。

(2) $\frac{1}{3}x^2 - 4x = 0$
 $x^2 - 12x = 0$
 $x(x - 12) = 0$
 $x = 0$ 或 $x - 12 = 0$
 $x = 0$ 或 $x = 12$

所以方程式的解為0和12。

Hint

當係數有分數時，可以倍數，使係數變為整數。

2 已知 A 、 B 為兩數：

- (1) 若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。
- (2) 若 $|A| + |B| = 0$ ，則 $A = 0$ 且 $B = 0$ 。
- (3) 若 $A^2 + B^2 = 0$ ，則 $A = 0$ 且 $B = 0$ 。
- (4) 若 $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$ ，則 $A = 0$ 且 $B = 0$ 。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $3x^2 - 7x = 0$

$x(3x - 7) = 0$
 $x = 0$ 或 $3x - 7 = 0$
 $x = 0$ 或 $x = \frac{7}{3}$

所以方程式的解為0和 $\frac{7}{3}$ 。

(2) $-\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$

$-x^2 + 16x = 0$
 $x(-x + 16) = 0$
 $x = 0$ 或 $-x + 16 = 0$
 $x = 0$ 或 $x = 16$

所以方程式的解為0和16。

例 3

• 搭配 P.48 第

• 搭配 P.48

2 當學生學習動腦後，教師利用例 3 證如果兩邊同時 $(x-1)$ ，此式會少一個 $(=1)$ 。

主題2 利用因式分解解一元二次方程式

我們知道，當兩數都不為0時，這兩數的乘積一定不為0。那麼當兩數的乘積為0時，這兩數可能會是哪些數呢？

若 $A \times B = 0$ ，
則 $A \cdot B$ 有三種情

形：
(1) $A \neq 0, B = 0$
(2) $A = 0, B \neq 0$
(3) $A = 0, B = 0$
可合稱為 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。

在解方程式的過程使用「或」，是能使方程式為0的解是 A 或 B ；在一元二次方程式的解有兩個，所以最後文章再強調此一元二次方程式的解為 A 「和」 B ，即後者是最後的結論（相當於應用問題的答），因此用「和」。

• 搭配習作
P.47 第3題

一元二次方程式，就是把它化為兩一元一次式的乘積等於0，並得到兩解。

問題探索 若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。

設 A, B 為兩數，且 $A \times B = 0$ ，則：

- (1) 當 $A \neq 0$ 時， B 是不是一定要等於0？ 是
- (2) 當 $B \neq 0$ 時， A 是不是一定要等於0？ 是
- (3) A, B 可不可能都是0？ 可能
- (4) A, B 可不可能都不是0？ 不可能

由問題探索可以知道，若 A, B 為兩數，當 $A \times B = 0$ 時，則 A 和 B 至少有一個是0，即 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。

利用這個結論可以解一元二次方程式。

例如：方程式 $(x-3)(3x-2)=0$ 表示 $(x-3)$ 和 $(3x-2)$ 的乘積是0，

因為 $(x-3)$ 和 $(3x-2)$ 都是數，利用問題探索的結論，

可得 $x-3=0$ 或 $3x-2=0$ ，再解這兩個一元一次方程式，

即得到方程式 $(x-3)(3x-2)=0$ 的解為3和 $\frac{2}{3}$ 。

隨堂練習

找出下列各方程式的解。

(1) $x(x+3)=0$

$x=0$ 或 $x+3=0$

$x=0$ 或 $x=-3$

所以方程式的解為0和-3

(2) $(4x-2)(2x+5)=0$

$4x-2=0$ 或 $2x+5=0$

$x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{5}{2}$

所以方程式的解為 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{5}{2}$

隨堂練習

- 判別 0 是否為一元二次方程式 $x^2 - 5 = 4x$ 的解？
- 判別 4 和 -3 是否為一元二次方程式 $(x-4)(x+3)=0$ 的解？
 - 將 0 代入等號左邊，得到 $0^2 - 5 = -5$ ；
將 0 代入等號右邊，得到 $4 \times 0 = 0$ ；
等號左、右兩邊的值不相等；
所以 0 不是一元二次方程式 $x^2 - 5 = 4x$ 的解。
 - 將 4 和 -3 分別代入等號左邊
得到 $(4-4)(4+3)=0$ 、 $(-3-4)(-3+3)=0$ ；
等號左、右兩邊的值相等；
所以 4 和 -3 皆為一元二次方程式 $(x-4)(x+3)=0$ 的解。

本文要讓學生發
現代入法解一元
二次方程式的方法
沒效率，進而引
導學習其他解一元
二次方程式方法的
機會。

由例 1 和隨堂練習可知，要判別一個數是不是方程式的解，只該數代入方程式的未知數中，看看是否能讓方程式的等號成立就知道。但如果用代入法找一元二次方程式 $2x^2 - 87x - 135 = 0$ 的解，假設從整數 1 開始一個一個代進去試，則要試到 45 才能找到這個方程式的解。而它的另一個解 $-\frac{3}{2}$ 為負分數，若只拿整數試，則永遠也找不到這個解。

因此，接下來將學習其他更有效率的方法來解一元二次方程式。



數 學 好 好 玩

「代數」的由來

《代數學》由阿拉伯數學家、天文學家花拉子米 (al-Khwārizmī, 約西元 780~850 年) 所著，是第一本解決一元二次方程式的著作。

書中首創還原 (al-jabr) 及平衡 (al-muqābala) (相當於現今的「移項」和「合併同類項」) 的方法，並明確提出代數、已知數、未知數、根及移項等一系列概念，有系統的闡述一元二次方程式的解法，把代數學發展成一門與幾何學相提並論的獨立學科。代數 (algebra) 一詞即是由書中還原 (al-jabr) 而來。

花拉子米
(約西元 780~850 年) 阿拉伯數學家，其著作《代數學》是第一本關於代數的著作，與古希臘共享為「代數之父」。



例 3

• 搭配習作
P.48 第 5 題

先移項再提公因式解方程式 學習內容 4-3-7

解一元二次方程式 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$ 。

$$\begin{aligned}
 &\text{解 } (x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2) \\
 &(x-1)(2x+3)-(x-1)(x+2)=0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{移項使等號右邊為 } 0 \\ \text{提公因式 } (x-1) \end{array} \right\} \\
 &(x-1)[(2x+3)-(x+2)]=0 \\
 &(x-1)(x+1)=0 \\
 &x-1=0 \text{ 或 } x+1=0 \\
 &x=1 \text{ 或 } x=-1 \\
 &\text{所以方程式的解為 } 1 \text{ 和 } -1。
 \end{aligned}$$

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

$$(1) (x+3)(x+4)=(x+3)(2x-1) \quad (2) (x-1)^2=(x-1)(2x+3)$$

$$\begin{array}{ll}
 (x+3)(x+4)-(x+3)(2x-1)=0 & (x-1)^2-(x-1)(2x+3)=0 \\
 (x+3)[(x+4)-(2x-1)]=0 & (x-1)[(x-1)-(2x+3)]=0 \\
 (x+3)(-x+5)=0 & (x-1)(-x-4)=0 \\
 x+3=0 \text{ 或 } -x+5=0 & x-1=0 \text{ 或 } -x-4=0 \\
 x=-3 \text{ 或 } x=5 & x=1 \text{ 或 } x=-4 \\
 \text{所以方程式的解為 } -3 \text{ 和 } 5 & \text{所以方程式的解為 } 1 \text{ 和 } -4
 \end{array}$$

• 搭配習作
P.48 第 4 題

目 學生學習活動
動 動 腦
動 腦後，教師可再
利用例 3，證實，
當兩邊同時除以
 $(x-1)$ ，此方程
式會少一個根（ x
=1）。

動 動 腦

例 3 中，若將 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$ 等號兩邊同時除以 $(x-1)$ 得 $2x+3=x+2$ ，解一元一次方程式得 $x=-1$ ，這樣的解法對不對？說說看你的想法。

不對，當 $x-1=0$ 時，等號兩邊不可同除以 $(x-1)$ 。
由 $x-1=0$ 可知， $x=1$ 也是此一元二次方程式的解。
若等號兩邊同除以 $(x-1)$ ，則會少掉 $x=1$ 這個解。

重新布置