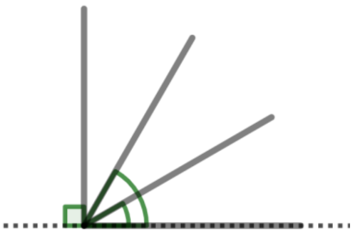
三角函數

指導：CA
編撰：陳梅仙

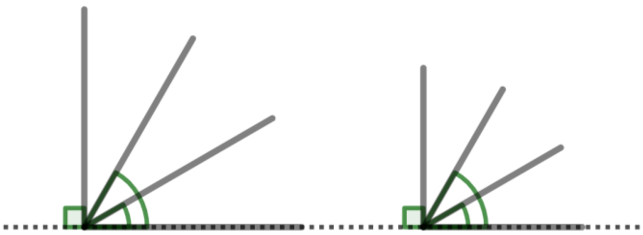
1. 古人利用日晷來知道時間。
   (1) 古人怎麼利用日晷知道時間呢？
   ________________。
   (2) 右圖當時的時間是幾點呢？_________。

2. 架設電線杆的時候，電線杆會從地面慢慢地被立直，當電線杆越來越高，電線杆的影子也越來越_______。
   (1) 請畫出下面電線杆在不同位置的投影和高度。

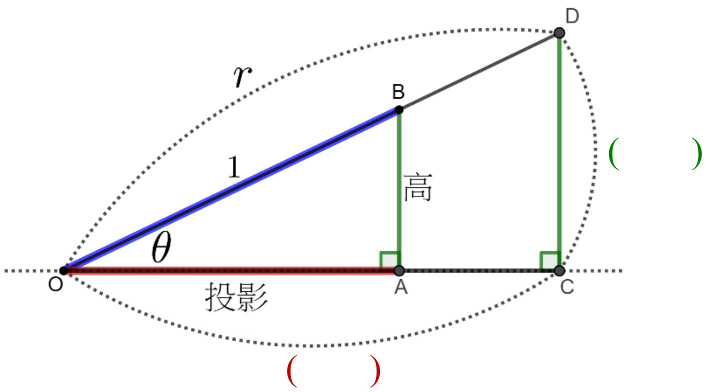


   (2) 電線杆的高度和投影長度的改變是受到什麼的影響呢？__________。

   (3) 請畫出下面兩根電線杆在相同位置的投影和高度，長度不同的原因是什麼呢？______________。



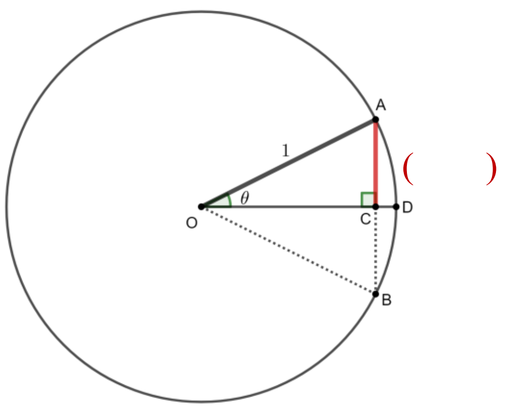
3. 在右圖可以看到，在相同角度之下，
   電線杆$\overline{OB}$越長，
   投影和高度也會越長，
   請利用相似形計算，
   當電線杆$\overline{OB}$放大r倍變成
   $\overline{OD}$時，
   投影$\overline{OC}$ ＝_______。
   高度$\overline{CD}$ ＝_______。



4. 在第 3 題，我們看到單位長度 1 的厲害與好算，因此，我們利用「單位圓」來命名那些隨著**角度**的變化而改變的**長度**。

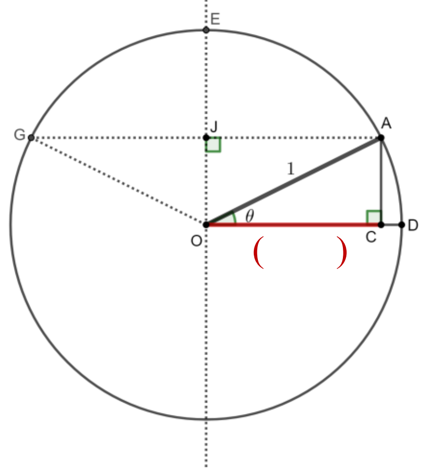
(1) 正弦函數：$sin\theta$

角度θ所正對到的弦長(高)



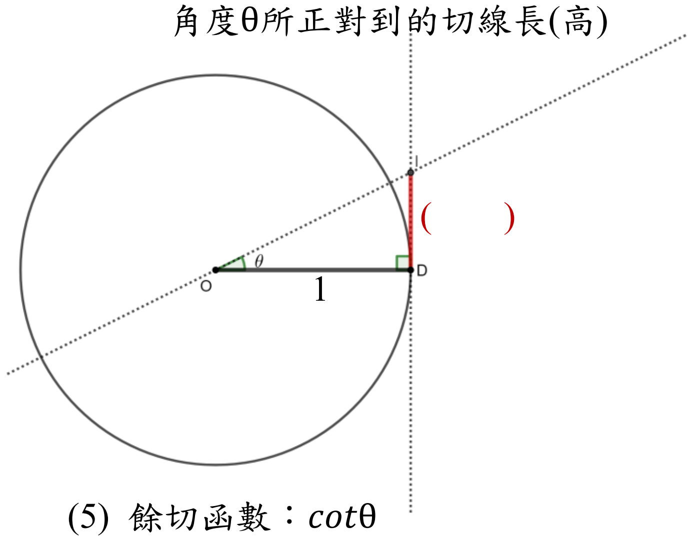
(2) 餘弦函數：$cos\theta$

角度θ的餘角所正對到的弦長(投影)



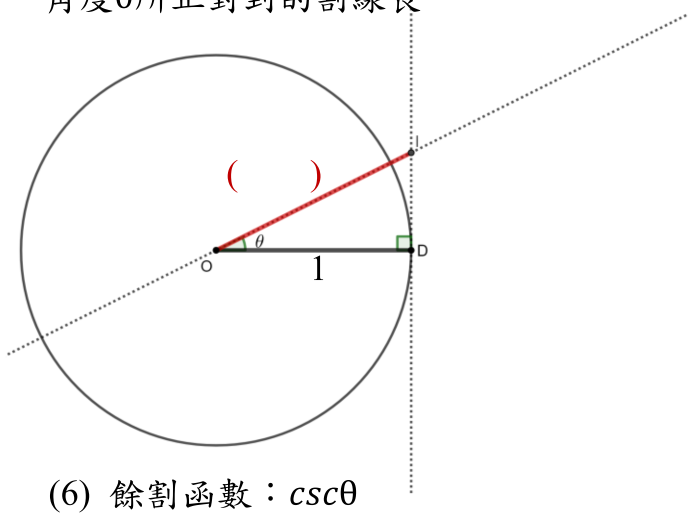
(3) 正切函數：$tan\theta$

角度θ所正對到的切線長(高)



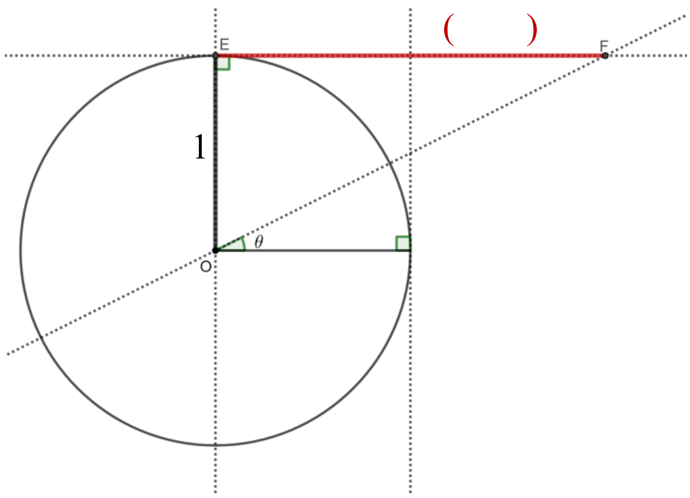
(4) 正割函數：$sec\theta$

角度θ所正對到的割線長



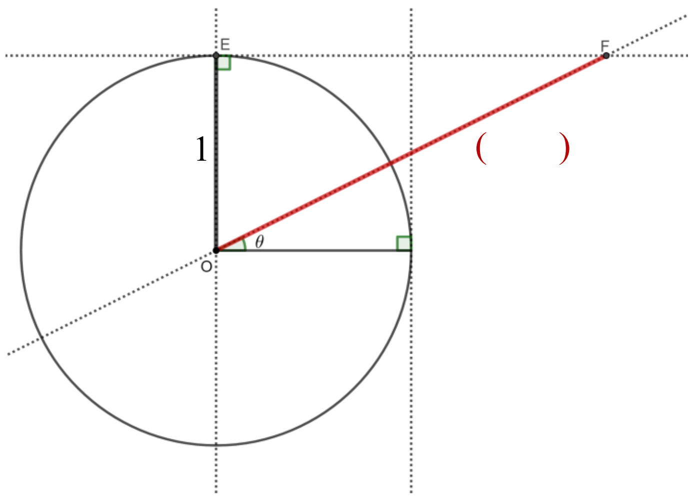
(5) 餘切函數：$cot\theta$

角度θ的餘角所正對到的切線長(高)

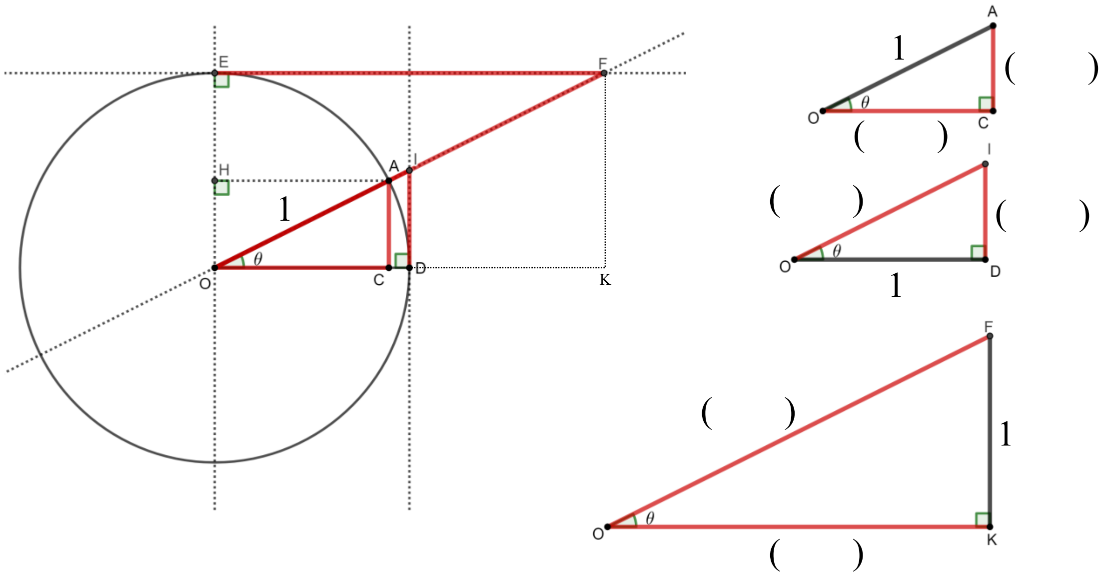


(6) 餘割函數：$csc\theta$

角度θ的餘角所正對到的割線長



5. 請你將第 4 題的 6 個三角函數標記在下圖中正確的線段位置。



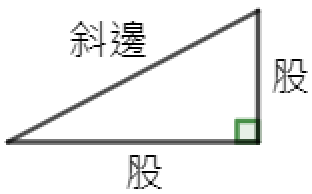
6. 請利用**畢氏定理**寫出下面直角三角形中三角函數的關係式。

畢氏定理：斜邊平方會等於兩股平方和。

直角 ΔAOC ：________________________ 。

直角 ΔIOD ：________________________ 。

直角 ΔFOK ：________________________ 。



7. 請利用**相似形**的邊長成比例的關係寫出三角函數的關係式。

$\Delta AOC \sim \Delta IOD \sim \Delta FOK$

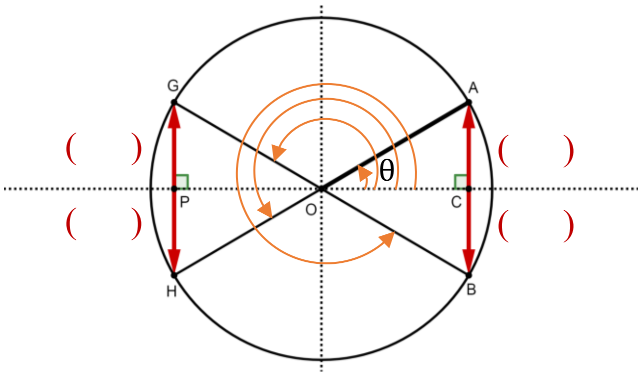
		直角的對邊	:	θ餘角的對邊	:	θ的對邊
ΔAOC 的邊長比	＝	( )	:	( )	:	( )
ΔIOD 的邊長比	＝	( )	:	( )	:	( )
ΔFOK 的邊長比	＝	( )	:	( )	:	( )

⇨ $tan\theta = \frac{(\quad)}{(\quad)}$、$cot\theta = \frac{(\quad)}{(\quad)}$、$tan\theta \times cot\theta = (\quad)$

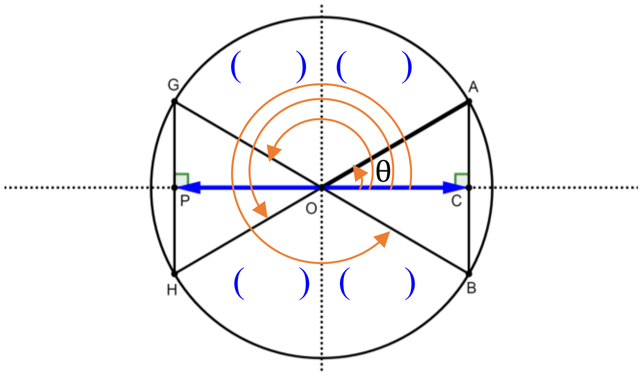
$sec\theta = \frac{1}{(\quad)}$、$csc\theta = \frac{1}{(\quad)}$、$sec\theta \times ccs\theta = (\quad)$

8. 角度的大小會影響三角函數的值的大小，我們想進一步理解角度的大小會如何影響著三角函數的值的**正負號**，請在()中註記正或負。

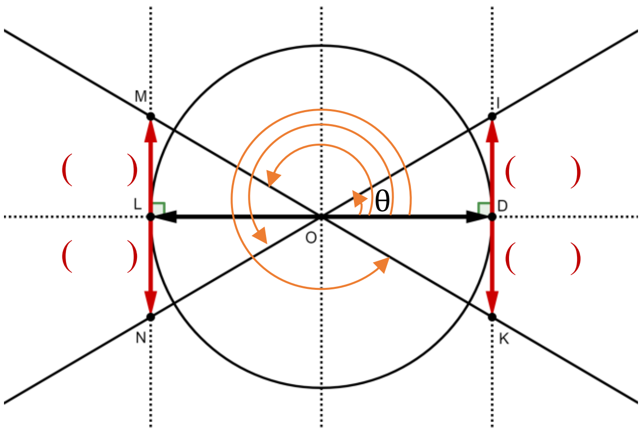
(1) 正弦函數：$sin\theta$
以**半徑為基準**來看
在不同角度，$sin\theta$的正負號



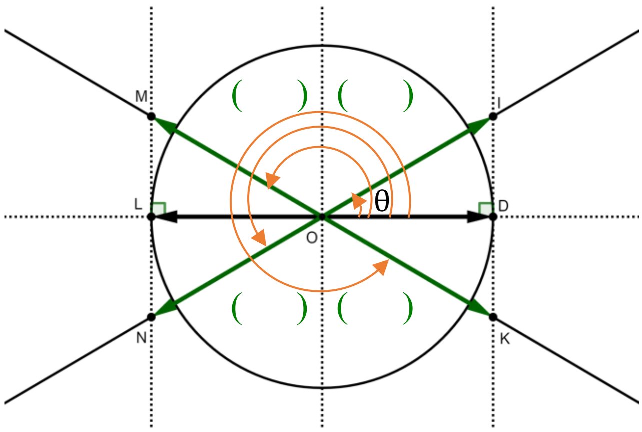
(2) 餘弦函數：$cos\theta$
以**半徑為基準**來看
在不同角度，$cos\theta$的正負號



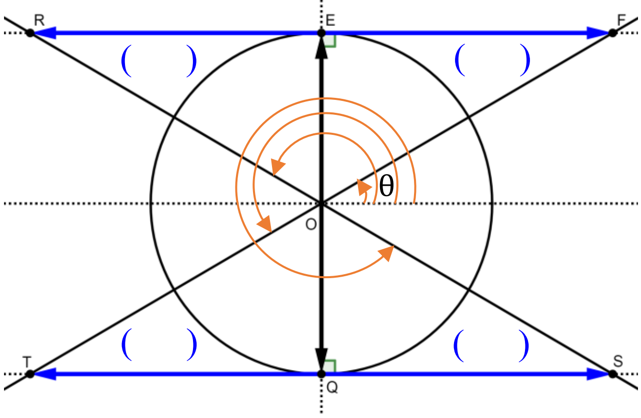
(3) 正切函數：$tan\theta$
以 ***x* 軸為基準**來看
在不同角度，$tan\theta$的正負號



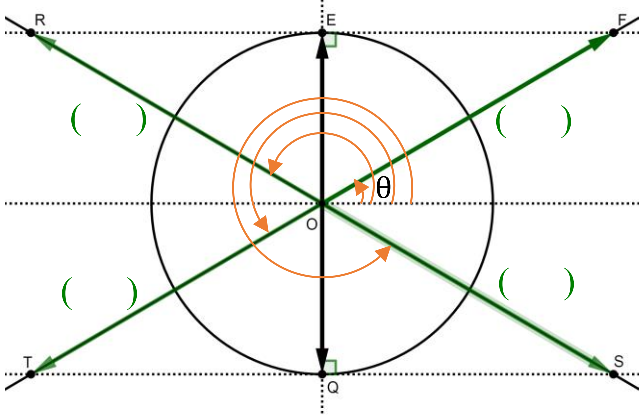
(4) 正割函數：$sec\theta$
以 ***x* 軸為基準**來看
在不同角度，$sec\theta$的正負號



(5) 餘切函數：$cot\theta$
以 ***y* 軸為基準**來看來看
在不同角度，$cot\theta$的正負號



(6) 餘割函數：$csc\theta$
以 ***y* 軸為基準**來看
在不同角度，$csc\theta$的正負號



9. 請使用角度θ改寫下面的三角函數。

(1) $sin(-\theta)=-sin\theta$、$cos(-\theta)=$ ______、$tan(-\theta)=$ ______

$cot(-\theta)=$ ______、$sec(-\theta)=$ ______、$csc(-\theta)=$ ______

(2) $sin(180°-\theta)=sin\theta$、$sin(180°+\theta)=-sin\theta$

$cos(180°-\theta)=$ ______、$cos(180°+\theta)=$ ______

$tan(180°-\theta)=$ ______、$tan(180°+\theta)=$ ______

$cot(180°-\theta)=$ ______、$cot(180°+\theta)=$ ______

$sec(180°-\theta)=$ ______、$sec(180°+\theta)=$ ______

$csc(180°-\theta)=$ ______、$csc(180°+\theta)=$ ______

(3) $sin(90°-\theta)=cos\theta$、$sin(90°+\theta)=cos\theta$

$cos(90°-\theta)=$ ______、$cos(90°+\theta)=$ ______

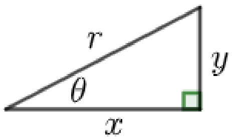
$tan(90°-\theta)=$ ______、$tan(90°+\theta)=$ ______

$cot(90°-\theta)=$ ______、$cot(90°+\theta)=$ ______

$sec(90°-\theta)=$ ______、$sec(90°+\theta)=$ ______

$csc(90°-\theta)=$ ______、$csc(90°+\theta)=$ ______

10. 請分別以 r、x 和 y 為基準(當作 1)，寫出三角函數以及它的值。



	r	:	x	:	y
=	1	:	$\frac{x}{r}$	:	(　　)
=	1	:	(　　)	:	$sin\theta$

	r	:	x	:	y
=	(　　)	:	1	:	$\frac{y}{x}$
=	$sec\theta$	:	1	:	(　　)

	r	:	x	:	y
=	$\frac{r}{y}$	:	(　　)	:	1
=	(　　)	:	$cot\theta$	:	1

結論： 以 r 為基準(當作 1)，$sin\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$、$cos\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$。

以 x 為基準(當作 1)，$tan\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$、$sec\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$。

以 y 為基準(當作 1)，$cot\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$、$csc\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$。

11. 請寫出下面三角函數的值

(1) $sin30^\circ =$ ____、$cos30^\circ =$ ____

$tan30^\circ =$ ____、$sec30^\circ =$ ____

$cot30^\circ =$ ____、$csc30^\circ =$ ____

(2) $sin45^\circ =$ ____、$cos45^\circ =$ ____

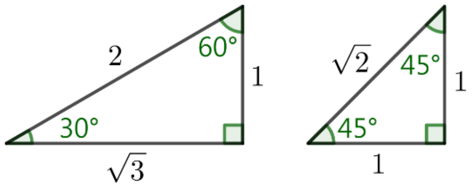
$tan45^\circ =$ ____、$sec45^\circ =$ ____

$cot45^\circ =$ ____、$csc45^\circ =$ ____

(3) $sin60^\circ =$ ____、$cos60^\circ =$ ____

$tan60^\circ =$ ____、$sec60^\circ =$ ____

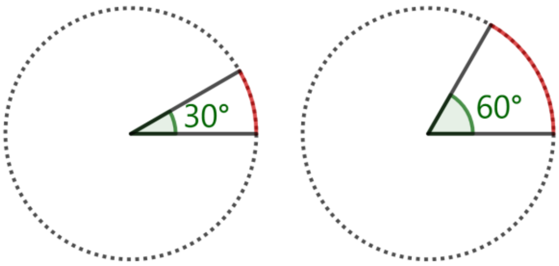
$cot60^\circ =$ ____、$csc60^\circ =$ ____



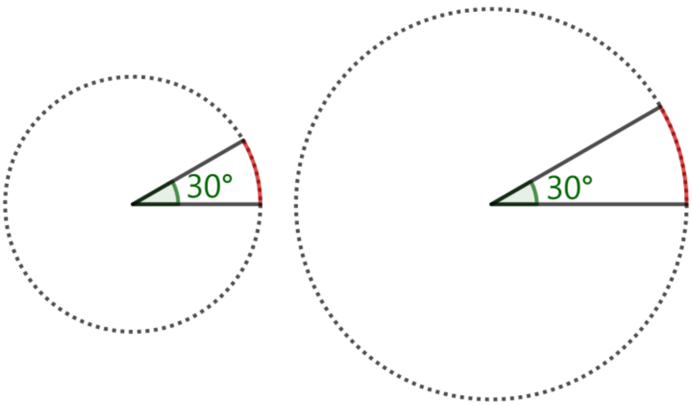
當角度改變，三角函數的值也跟著變化，在單位圓，以半徑為基準(當作 1)，長度就會是三角函數的值。

但是，角度的單位是**度度量**，三角函數的值是**半徑量**，如果想透過圖形來觀察角度和三角函數之間的變化關係，採用相同的單位就會是必須的，那麼，角度可以使用半徑來度量嗎？

在國中階段，我們有學過弧度，弧度就是圓弧所對圓心角的度數。在等圓，圓心角越大，其所對的圓弧長會跟著**等比例**變大，因此，圓弧長可以用來表現角度大小。



但是，相同的角度所對的圓弧長會因為半徑的大小而長短不一，怎麼辦呢？單位圓！以半徑為基準來測量圓弧長，就是**徑度量**！



12. 如圖 1，用直徑來測量圓周長，可以量 3.14 次，也就是 π 次。

(1) 如圖 2，用半徑來測量圓周長，可以量_____次，也就是_____次。

(2) 圖 1 用直徑量的角度大約幾度？ □大於□等於□小於 120 度。

(3) 圖 2 用半徑量的角度大約幾度？ □大於□等於□小於 60 度。

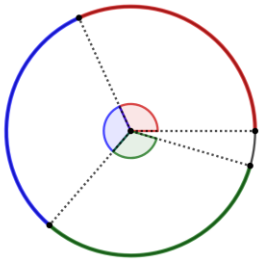


圖 1

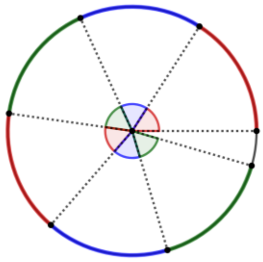


圖 2

用半徑畫 1 個圓，

以圓心角的**度度量**(degree)來說，轉了 360 度。

以圓心角所對的圓弧長的**徑度量**(radian)來說，用半徑畫了 2π 次。

圓心角和圓弧長一起連動，是正比關係，因此，

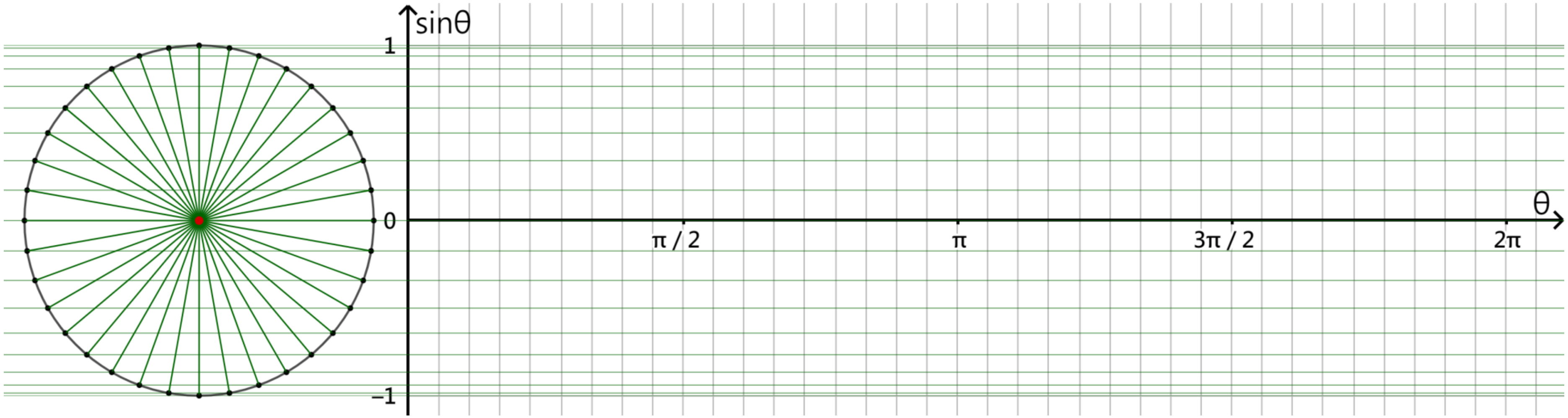
	度度量(圓心角)	:	弳度量(圓弧長是幾個半徑)
＝	360	:	2π
＝	180	:	π

13. 請完成下面度度量和弳度量的對照表。

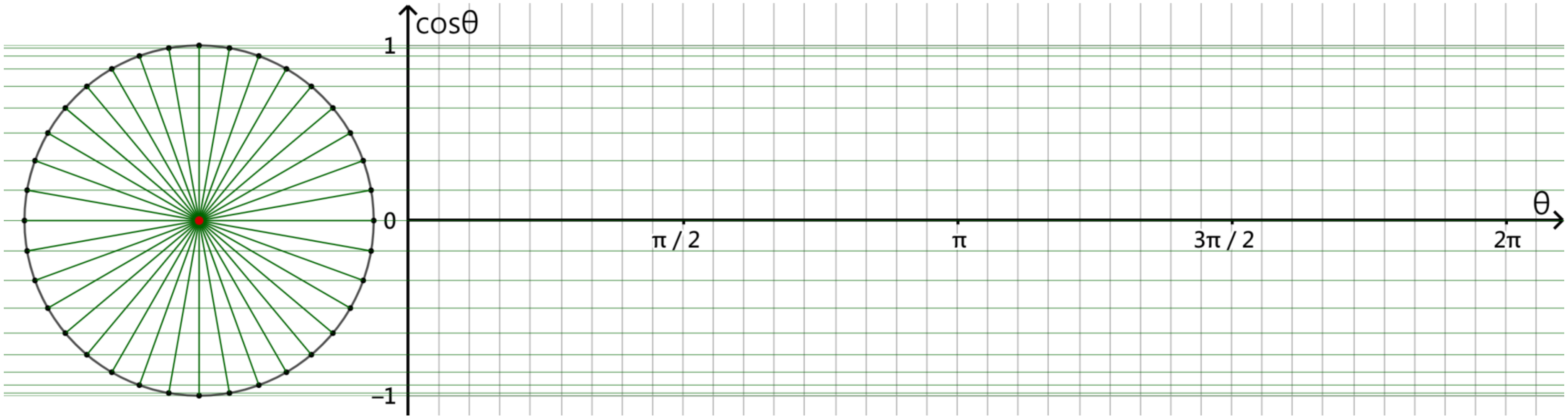
度度量	0	30	45	60	90	180	270	360
弳度量	0					π		2π

14. 請問「弳度 1」和「60 度」的圓弧長，誰比較長？

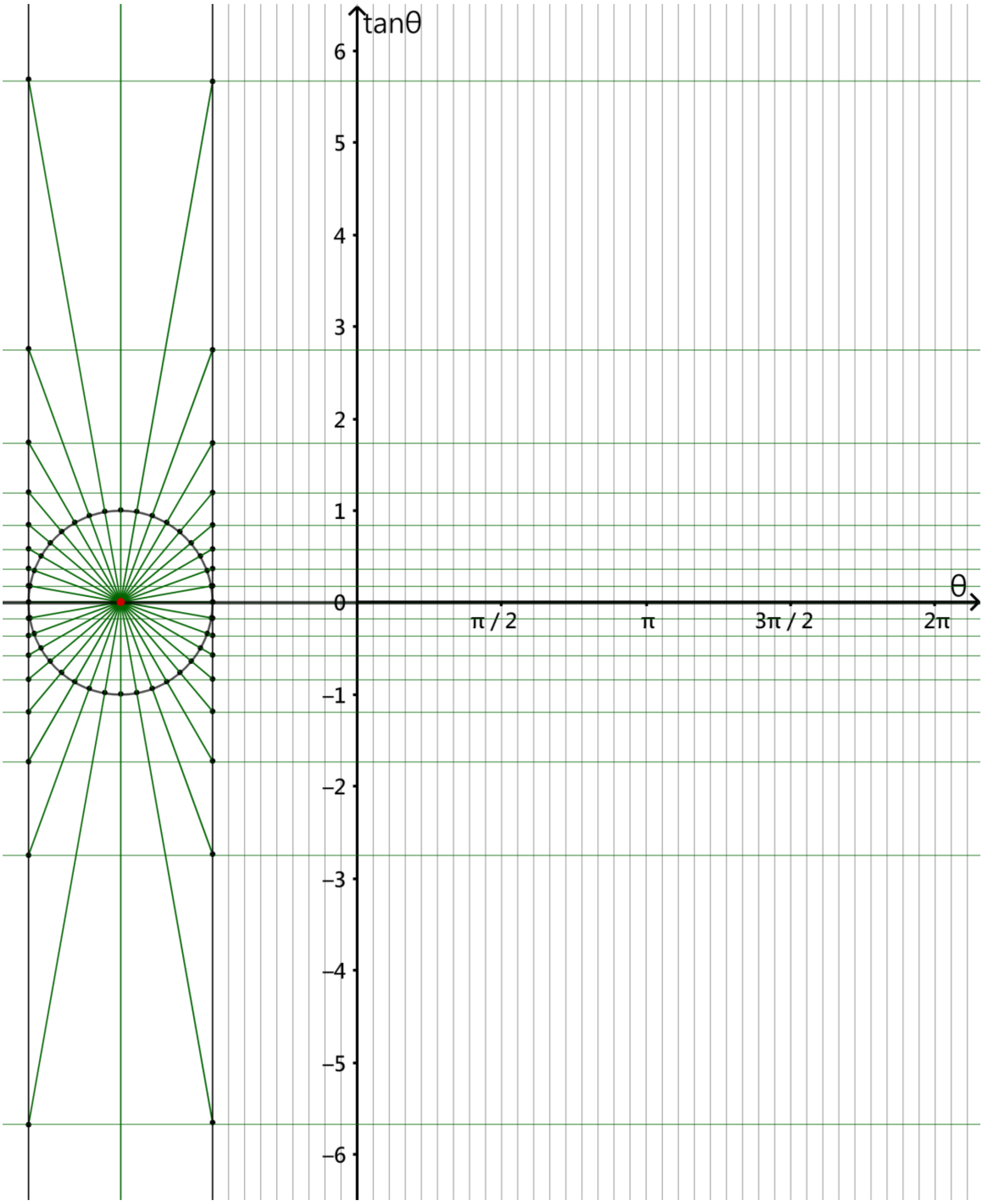
15. 請利用單位圓在下面畫出**正弦函數*sinθ***的函數圖形。



16. 請利用單位圓在下面畫出**餘弦函數*cosθ***的函數圖形。

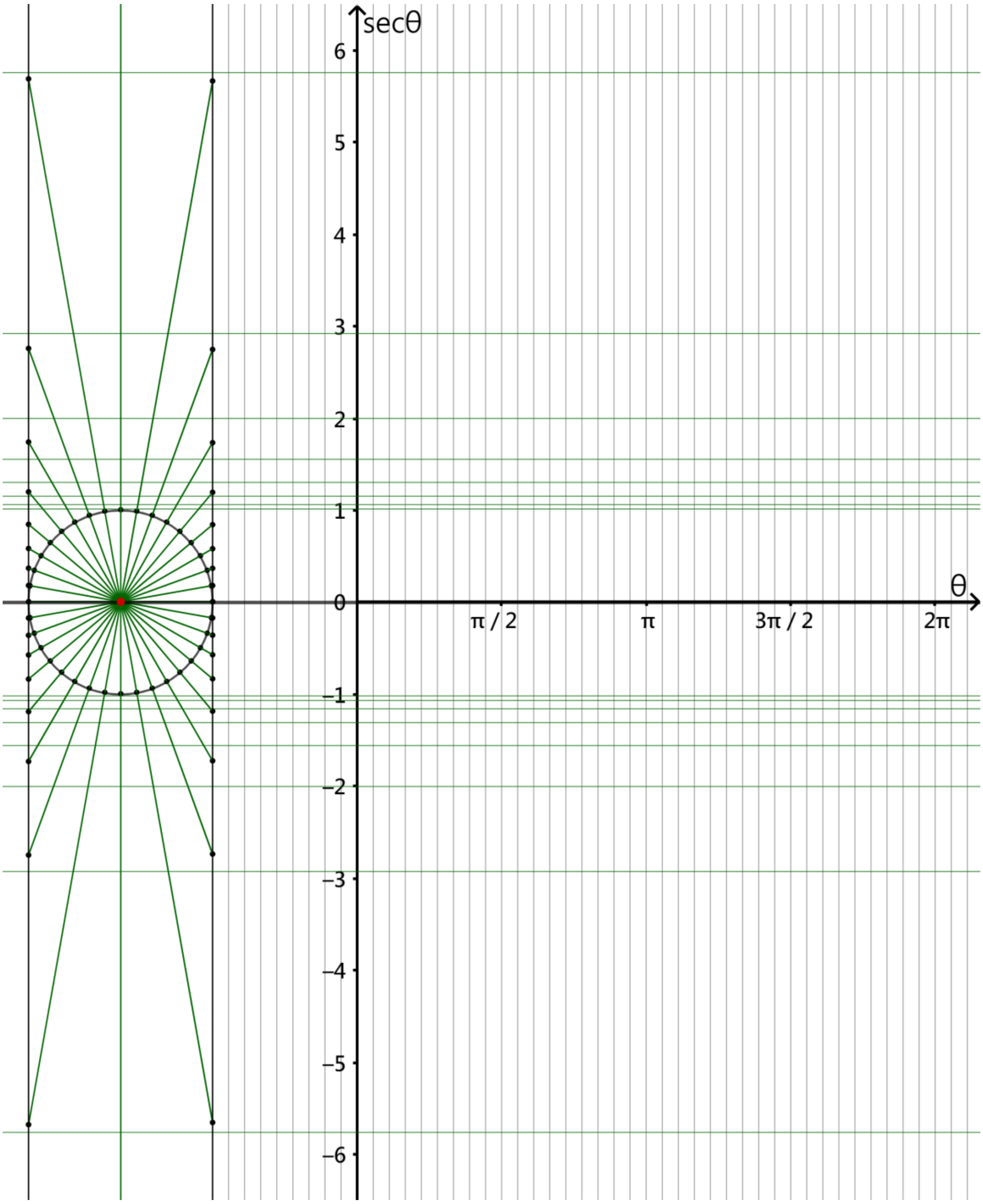


17. 請利用單位圓在下面畫出**正切函數$\boldsymbol{tan\theta}$**的函數圖形。

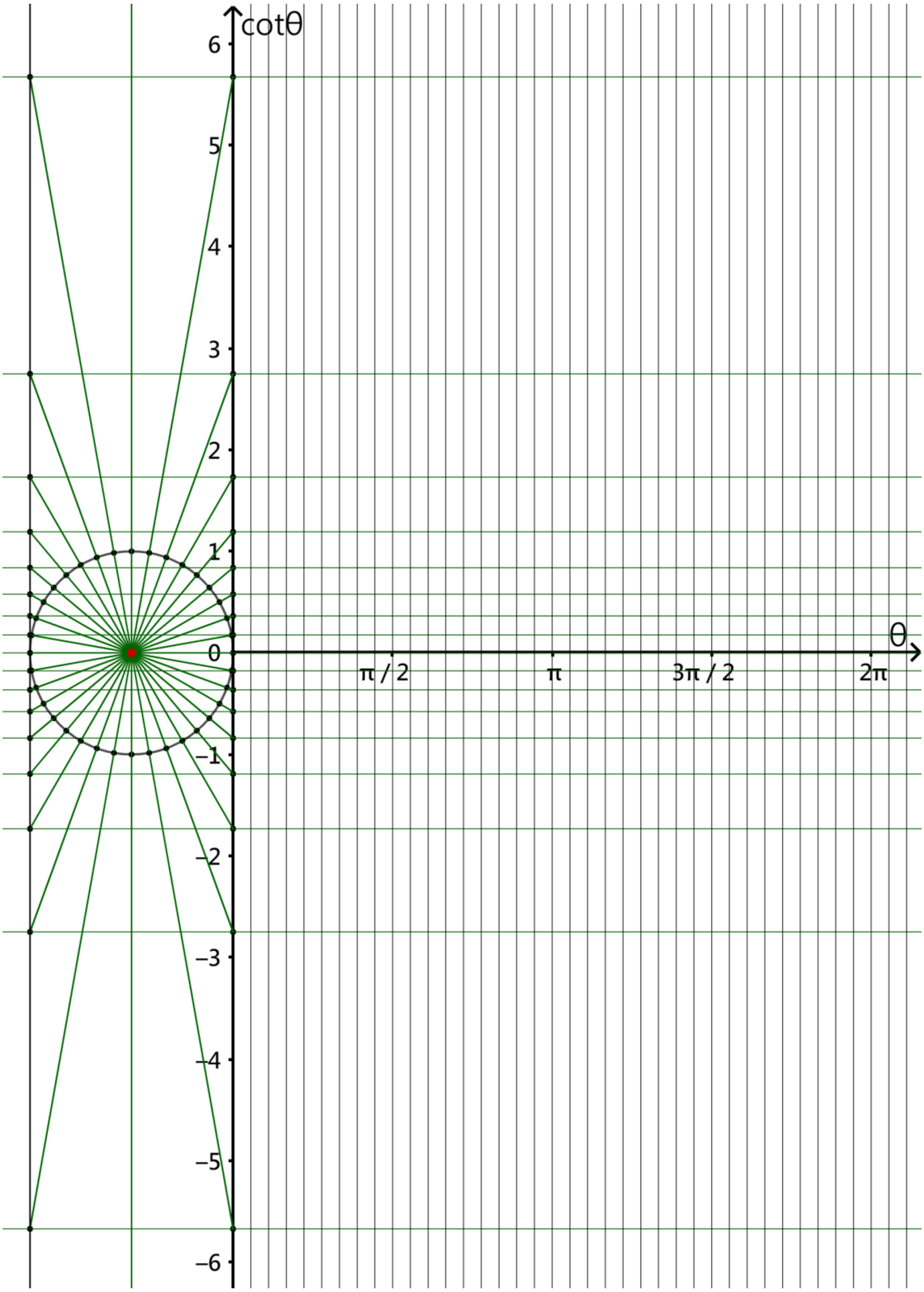


18. 請利用單位圓在下面畫出**正割函數$sec\theta$**的函數圖形。

Hint：利用圓規複製割線的長度。

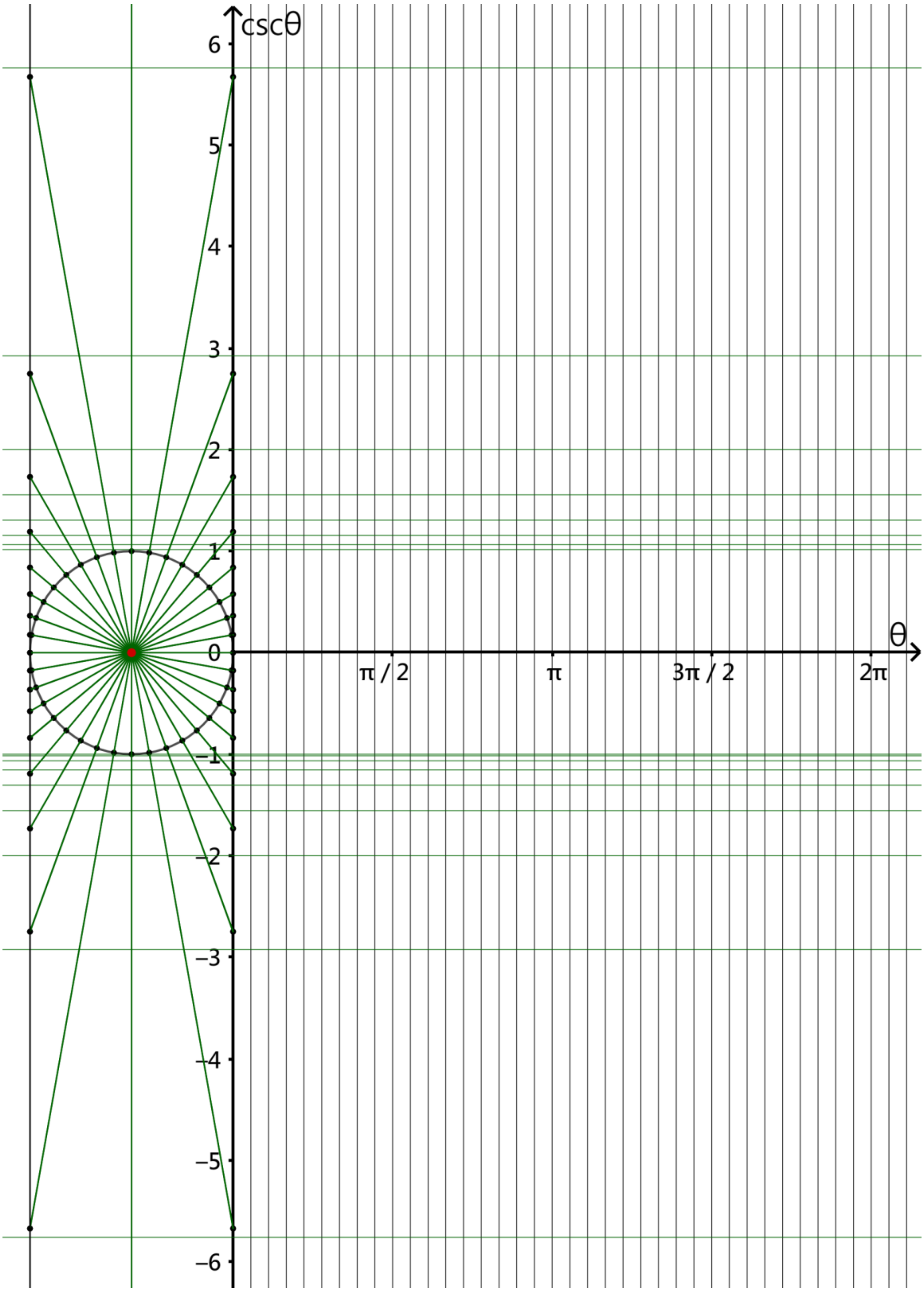


19. 請利用單位圓在下面畫出**餘切函數*cotθ***的函數圖形。



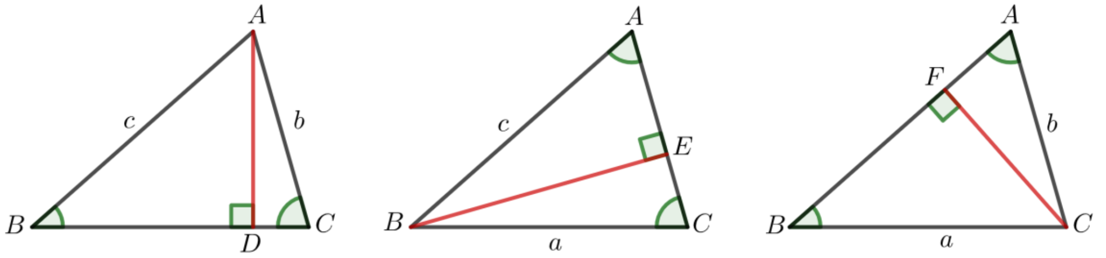
20. 請利用單位圓在下面畫出**餘割函數$csc\theta$**的函數圖形。

Hint：利用圓規複製割線的長度。



有注意到嗎？6 個三角函數，只要知道______和______，就可以寫出另外 4 個，而其中的$sin\theta$所表現的高，用來計算面積很方便喔！

21. 已知ΔABC如下圖，請使用$sin\theta$來表現高的長度。



$\overline{AD}=(\quad)\times sinB$
$\quad=(\quad)\times sin\angle C$

$\overline{BE}=(\quad)\times sinA$
$\quad=(\quad)\times sinC$

$\overline{CF}=(\quad)\times sinA$
$\quad=(\quad)\times sinB$

ΔABC面積
$=\frac{1}{2}\times a\times(\quad)\times sinB$
$=\frac{1}{2}\times a\times(\quad)\times sinC$

ΔABC面積
$=\frac{1}{2}\times b\times(\quad)\times sinA$
$=\frac{1}{2}\times b\times(\quad)\times sinC$

ΔABC面積
$=\frac{1}{2}\times c\times(\quad)\times sinA$
$=\frac{1}{2}\times c\times(\quad)\times sinB$

⇨ $\frac{1}{2}\times(\quad)\times(\quad)\times sinA=\frac{1}{2}\times(\quad)\times(\quad)\times sinB=\frac{1}{2}\times(\quad)\times(\quad)\times sinC$

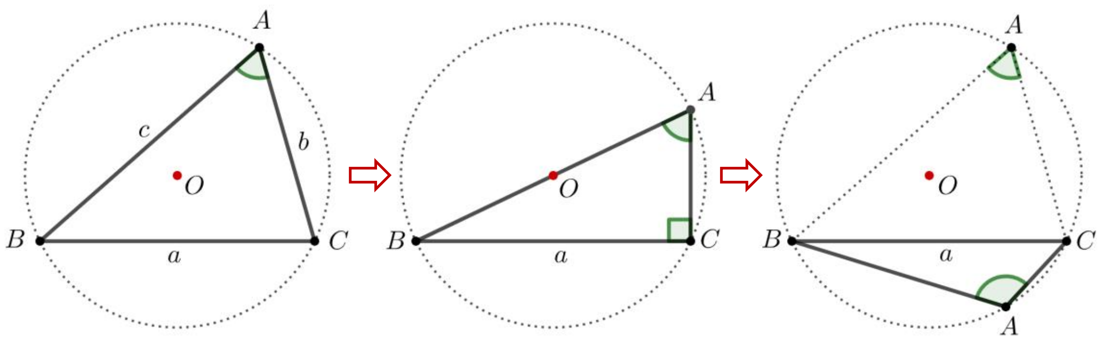
⇨ $\frac{sinA}{a}=\frac{sinB}{b}=\frac{sinC}{c}$

這相等的定值會是多少呢？

畫出ΔABC的外接圓圓 O，在保持 a 不變之下，移動 A 點，讓$\overline{AB}$通過圓心，此時的$\angle C=90°$，

此時的$sinA=\frac{(\quad)}{(\quad)}$，同理可得$sinB=\frac{(\quad)}{(\quad)}$，$sinC=\frac{(\quad)}{(\quad)}$

這個結果被稱為**正弦定理**。



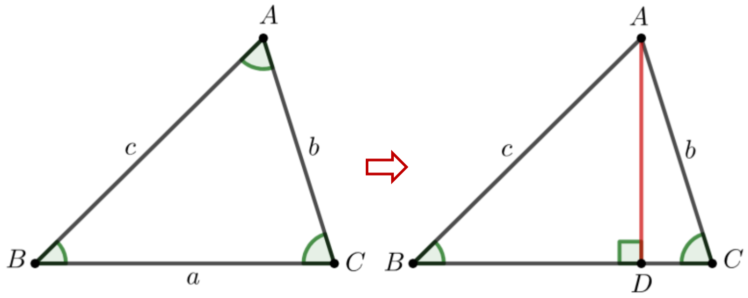
我有疑問？

當 A 點移到$\overline{BC}$另外一邊的圓弧上，此時$sinA$的值會相同嗎？

______，理由是什麼？____________________________。

畢氏定理可以表現直角三角形 3 個邊長的關係，那麼，不是直角的三角形，它們 3 個邊長的關係會是什麼呢？

22. 已知ΔABC如下圖，利用三角函數和畢氏定理寫出邊長關係式。



$\overline{AD} = (\quad) \times sinB$

$\overline{BD} = (\quad) \times cosB$

$\overline{CD} = a - (\quad) \times cosB$

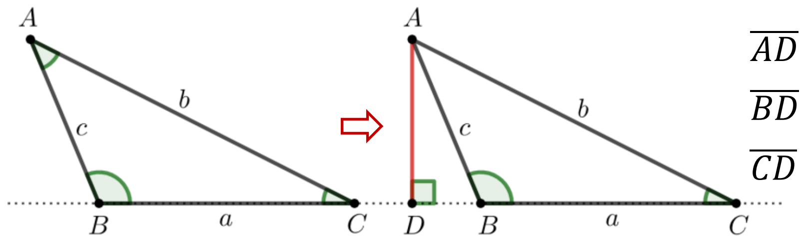
在直角ΔACD中，

利用畢氏定理可以寫出邊長的關係式如下：

$b^2 = (c \times sinB)^2 + (a - c \times cosB)^2$　　請展開並化簡！

鈍角三角形的 3 個邊長也會有相同的關係式嗎？

23. 已知ΔABC如下圖，利用三角函數和畢氏定理寫出邊長關係式。



$\overline{AD} = (\quad) \times sinB$

$\overline{BD} = (\quad) \times cosB$

$\overline{CD} = a - (\quad) \times cosB$

在直角ΔACD中，

$\boxed{cosB\text{是正數還是負數呢？\_\_\_\_\_\_。}}$

利用畢氏定理可以寫出邊長的關係式如下：

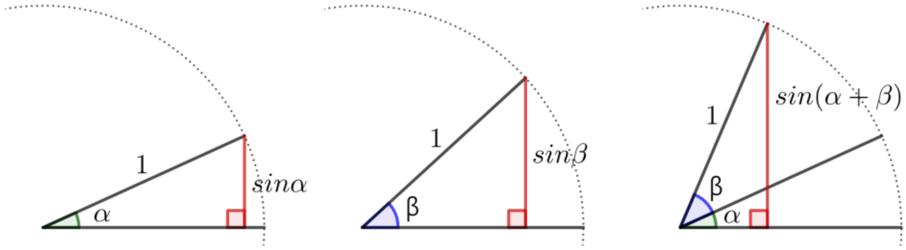
$b^2 = (c \times sinB)^2 + (a - c \times cosB)^2$　　請展開並化簡！

這個結果被稱為**餘弦定理**。

當$\angle B = (\quad)^\circ$，此時的餘弦定理就是畢氏定理！

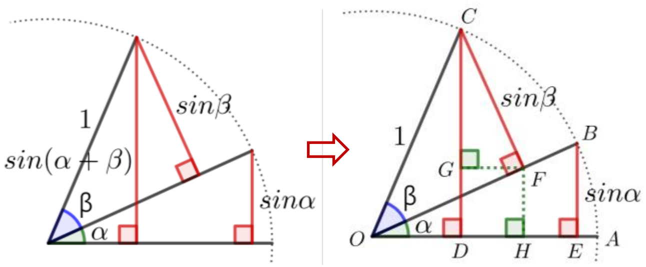
我有疑問？

$sin(\alpha+\beta)$會等於$sin\alpha+sin\beta$嗎？_______。



有發現嗎？不會喔！

那，$sin(\alpha+\beta)$應該是什麼呢？



⇨ $\overline{CD}=sin(\alpha+\beta)$

$\overline{CD}=\overline{CG}+\overline{GD}$

$\overline{CG}=sin\beta\times(\qquad)$

$\overline{GD}=\overline{FH}$

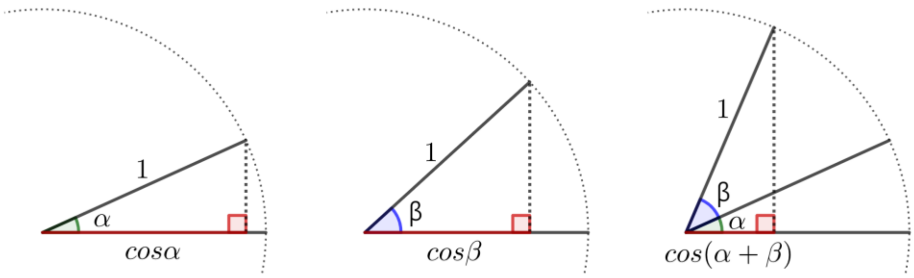
$\overline{FH}=\overline{FO}\times(\qquad)$

$=cos\beta\times(\qquad)$

⇨ $sin(\alpha+\beta)=sin\beta\times(\qquad)+cos\beta\times(\qquad)$

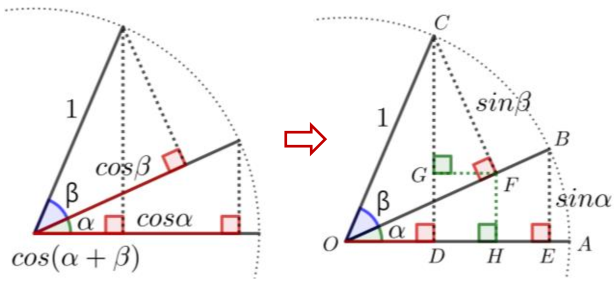
我有疑問？

$cos(\alpha+\beta)$會等於$cos\alpha+cos\beta$嗎？_______。



有發現嗎？不會喔！

那，$cos(\alpha+\beta)$應該是什麼呢？



⇨ $\overline{OD}=cos(\alpha+\beta)$

$\overline{OD}=\overline{OH}-\overline{DH}$

$\overline{OH}=\overline{FO}\times(\qquad)$

$=cos\beta\times(\qquad)$

$\overline{DH}=\overline{GF}$

$\overline{GF}=sin\beta\times(\qquad)$

⇨ $cos(\alpha+\beta)=cos\beta\times(\qquad)-sin\beta\times(\qquad)$