



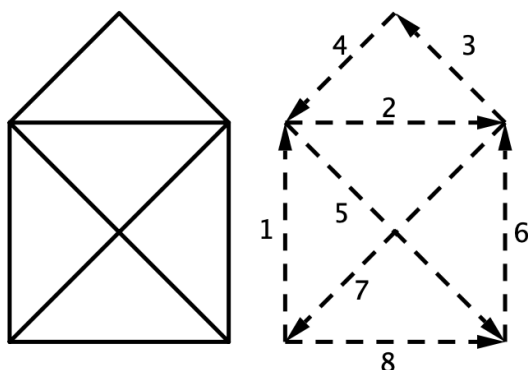
彰化縣國小資優巡迴班中年級數理活動教材(113)			
單元名稱	一筆畫問題	姓名	
授課教師：楊鈞如			

一筆畫

一筆畫指的是畫一張圖時，以某個點為起點，筆尖不離開紙面，且圖上的每條線只能畫一次不重複。以下圖為例，從 A 點出發，依照箭頭順序即可以一筆畫完成。

※提醒!多一點認識!

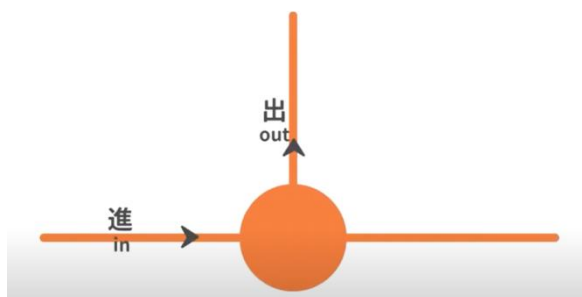
任何圖形都是由點與線組成的，圖中的點可以分成兩類：



(1)凡是從這個點出發的線，其數目是偶數的，稱為「偶點」。

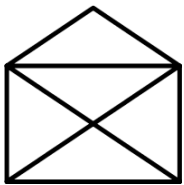
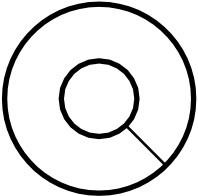
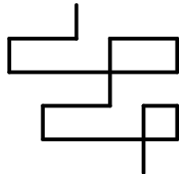
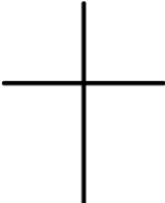
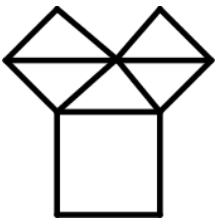
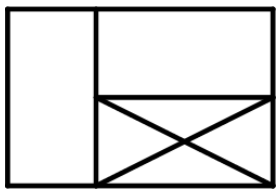
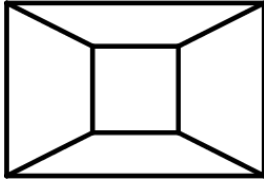
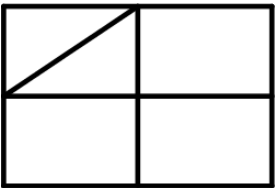
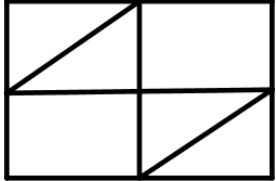
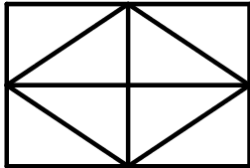
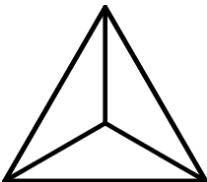
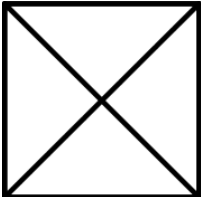
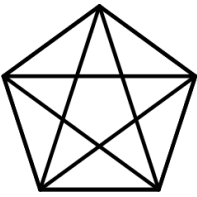
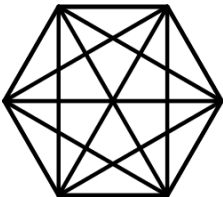
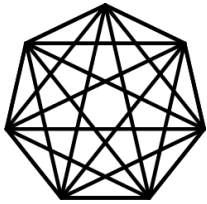


(2)凡是從這個點出發的線，其數目是奇數的，稱為「奇點」。



【任務1】

試著用一筆畫的規則完成下列圖形。

(1)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(2)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(3)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫
(4)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(5)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(6)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫
(7)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(8)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(9)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫
(10)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(11)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(12)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫
(13)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(14)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫	(15)  ☐ 可以一筆畫 ☐ 不可以一筆畫

【任務2】

比較個圖形直線的頂點數量、邊數、奇數點、偶數點的關係，比較可以用一筆畫完成的圖形和無法用一筆畫圓成圖形的共通點。

可以一筆畫完成的圖形有...

編號	頂點數量 (V)	邊數量(E)	奇線(數)點 (Q)	偶線(數)點 (R)

不行一筆畫完成的有...

編號	頂點數量 (V)	邊數量(E)	奇線(數)點 (Q)	偶線(數)點 (R)

【任務3】

比較任務2的表格中可以以一筆畫完成的圖形有什麼共同的特徵？

- 全部由_____點組成的圖形，一定可以一筆畫畫出；畫的時候以_____為起點，最後_____，如圖(_____)。
- 由_____個_____點組成的圖形，一定可以一筆畫畫出；畫的時候以_____為起點，最後_____，如圖(_____)。
- 其他情況的圖形都無法用一筆畫畫出，如圖 (_____)。

【任務4】

再試試看，不能一筆畫的圖形至少需要幾筆畫呢？

編號				
畫圖區				
至少幾筆畫 (S)				
編號				
畫圖區				
至少幾筆畫 (S)				

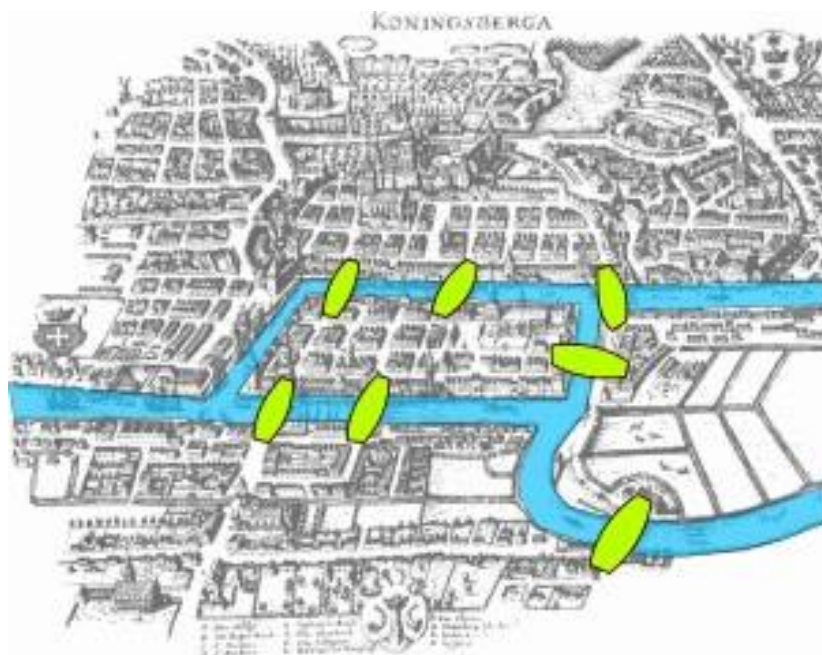
【任務5】

比較任務2與任務4的表格，找出 S 與 Q 或 R 之間的關係式。

--

主題二 七橋問題

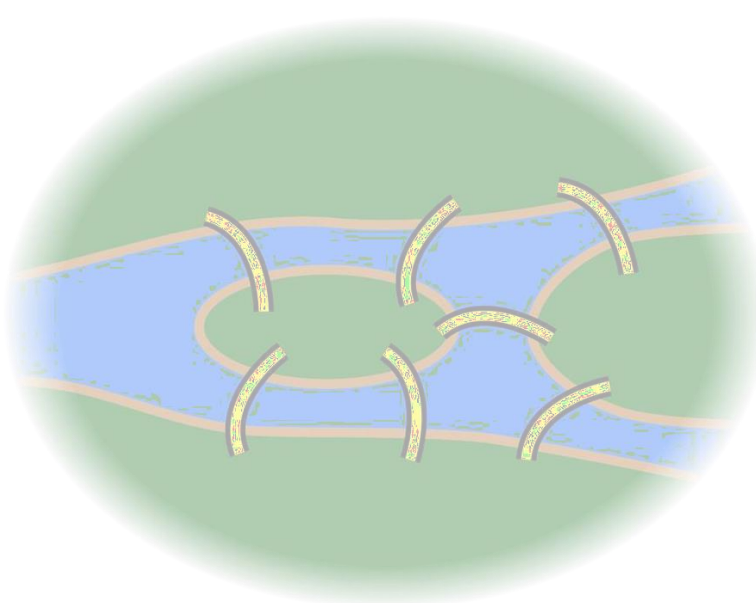
一筆畫問題是圖論中一個著名的問題，起源於柯尼斯堡七橋問題。在十八世紀東普魯士的歌尼斯堡市（Königsberg），即今日俄羅斯的加里寧格勒，市區被普列戈利亞河（Pregel）分成四塊區域，並以七座橋連接，如圖所示。



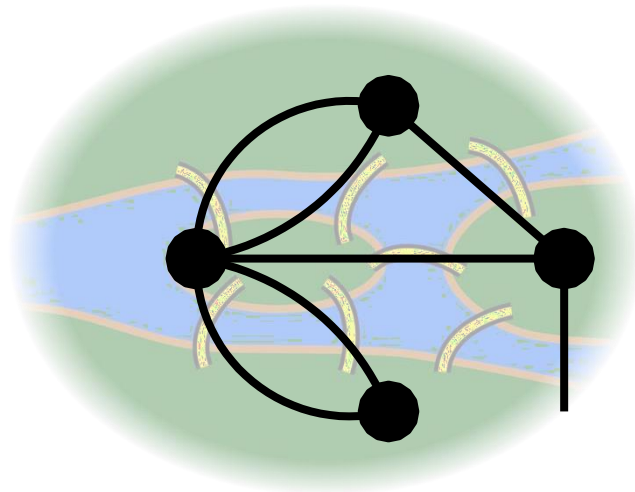
後來城鎮中的人提出一個疑問：「有沒有可能從城中任何一點開始散步，經過所有的橋，但每座橋只能經過一次？」人們試了又試，始終無法得到答案，直到引起數學家尤拉（L. Euler）的關注。

【任務 6】

依照圖示，試著找出一條能經過所有橋且每座橋只經過一次的散步路徑。



尤拉在1735年發表的論文《柯尼斯堡的七橋》提出答案，他在研究時發現在這個問題中重要的是橋連接的方式，因此他從城市地圖中將陸地簡化成點而橋則用線來代表，如下圖所示。



【任務 7】

請依據任務3可以以一筆畫完成的圖形特徵與上圖說明這一個散步路徑是否存在？為什麼？

若存在的請用箭頭標示出散步的路線應為何。

【總結】

尤拉在1735年發表的論文中除了解決七橋問題外，還提出一筆畫定理及一筆畫問題的解決

答案，成為現在圖論的開端。他提出了定理如下：

- (1)任何圖形中()的個數一定是()。
- (2)可以()繪製的圖形一定是連通的，及任何兩點都有()可到。
- (3)無奇線點的圖形是封閉的一筆畫，意即一筆畫可以從()開始，並在結束時回到起始點。
- (4)有()個奇點的圖形亦可以一筆畫完成，且兩個奇點分別為一筆畫的()與()。
- (5)有()奇點的圖形不是一筆畫，但有()奇點的網路含有()一筆畫。

