

-3-3 用配方法解一元二次方程式

※預備知識：

一．一元二次方程式的標準型式：設 a 、 b 、 c 為已知數且 $a \neq 0$ ，則方程式 $ax^2+bx+c=0$ ，稱為一元二次方程式的標準型式。

※課文內容：

一．一元二次方程式的特殊類型及其解法：

1．缺常數項： $ax^2+bx=0$ ， $\Rightarrow x(ax+b)=0$ ， $\therefore x=0$ 或 $ax+b=0$ ， $x=-\frac{b}{a}$

例 1：解方程式 $3x^2+5x=0$ 解： $x(3x+5)=0$ ， $\therefore x=0$ 或 $3x+5=0$ ， $x=-\frac{5}{3}$

2．缺一次項： $ax^2-c=0$ ， $\Rightarrow ax^2=c$ ， $x^2=\frac{c}{a}$ ， $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

例 2：解方程式 $3x^2-27=0$ 解： $3x^2=27$ ， $x^2=9$ ， $x=\pm\sqrt{9}$ ， $\therefore x=\pm 3$

3．完全平方式： $(x+a)^2=p$ ， $\Rightarrow x+a=\pm\sqrt{p}$ ， $x=-a\pm\sqrt{p}$

例 3：解下列方程式；(1) $(x+3)^2=4$ (2) $(2x-5)^2=25$

解：(1) $(x+3)^2=4$ ， $x+3=\pm\sqrt{4}$ ， $x=-3\pm 2$ ， $\therefore x=-3+2=-1$ 或 $x=-3-2=-5$

(2) $(2x-5)^2=25$ ， $2x-5=\pm\sqrt{25}$ ， $2x-5=\pm 5$ ， $2x=5\pm 5$ ， $2x=10$ ， $x=5$ 或 $2x=5-5$ ， $2x=0$ ， $x=0$

二．將多項式 $x^2\pm px$ 配成完全平方式：

多項式 $x^2\pm px$ 加上 $(\frac{p}{2})^2$ 就可配成完全平方式； $x^2\mp px+(\frac{p}{2})^2=x^2\mp 2\times x\times\frac{p}{2}+(\frac{p}{2})^2=(x\mp\frac{p}{2})^2$

例：將下列各式 \square 中填入適當數，使其配成完全平方式：(1) $x^2+6x+\square$ (2) $x^2-3x+\square$ (3) $x^2+\frac{3}{2}x+\square$

解：(1) $x^2+6x+\square$ ，此時 $p=6$ ， $\therefore (\frac{p}{2})^2=(\frac{6}{2})^2=3^2$ ，即原式加上 3^2 可配成完全平方式，

得 $x^2+6x+3^2=x^2+2\times x\times 3+3^2=(x+3)^2$

(2) $x^2-3x+\square$ ， $p=3$ ， $\therefore (\frac{p}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$ ，原式加 $(\frac{3}{2})^2$ 可得； $x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=x^2-2\times x\times\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2=(x-\frac{3}{2})^2$

(3) $x^2+\frac{3}{2}x+\square$ ， $p=\frac{3}{2}$ ， $\therefore (\frac{p}{2})^2=(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2})^2=(\frac{3}{4})^2$ ，原式加 $(\frac{3}{4})^2$ 得； $x^2+\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=x^2+2\times x\times\frac{3}{4}$

$+(\frac{3}{4})^2=(x+\frac{3}{4})^2$

三·「配方法」解一元二次方程式：

1·配方法：將 $ax^2+bx+c=0$ ，化為 $(x+p)^2=q$ 之形式，再求得解的方式稱為配方法。

2·配方法使用時機：當一元二次方程式無法用十字交乘法求解時用。

3·配方法原理： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

4·解題步驟：

例：用配方法解方程式 $x^2-4x-1=0$

①將非常數項移到等號左邊，常數項移到等號的右邊。	① $x^2-4x=1$
②將 x^2 項的係數化為 1； 若 x^2 項係數不為 1，則等號兩邊同除 x^2 項係數。	② x^2 項係數為 1，所以不變。
③將左邊多項式配成完全平方式；即等號兩邊同時加上 $(\frac{x\text{項的係數}}{2})^2$	③ $x^2-4x+2^2=1+2^2$ ， $\therefore x^2-2 \times x \times 2 + 2^2 = 5$ ， $(x-2)^2=5$
④兩邊開平方	④ $x-2 = \pm \sqrt{5}$
⑤移項求解	⑤ $x=2 \pm \sqrt{5}$

例 1：用配方法解方程式； $2x^2+3x-1=0$

解：原式為 $2x^2+3x=1$ ， $x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$ ， $x^2 + \frac{3}{2}x + (\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{2} + (\frac{3}{4})^2$ ， $\therefore x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{16}$ ，

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{8}{16} + \frac{9}{16}，(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{17}{16}，x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{17}{16}}，\therefore x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

例 2：解一元二次方程式 $x^2-2x-399=0$

解：原式為 $x^2-2x=399$ ， $x^2 - 2x + 1^2 = 399 + 1^2$ ， $x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = 400$ ， $(x-1)^2=400$ ， $x-1 = \pm \sqrt{400}$ ， $x=1 \pm 20$

$$\therefore x=1+20=21 \text{ 或 } x=1-20=-19$$

四·多項式 ax^2+bx+c 為完全平方的條件： $b^2-4ac=0$

例：設 x^2+x+c 為完全平方式，求 c 之值？

解：因為完全平方式， $\therefore b^2-4ac=0$ ， $1^2-4 \times 1 \times c = 0$ ， $4c=1$ ， $c = \frac{1}{4}$