

1

乘法公式
與多項式

1-1 乘法公式

1-2 多項式與其加減運算

1-3 多項式的乘除運算

Are You Ready ?

+++ 分配律

利用分配律完成下列各式的化簡。

(1) $5 \times (x+3) = \underline{5x+15}$ 。

(2) $(y+4) \times 6 = \underline{6y+24}$ 。

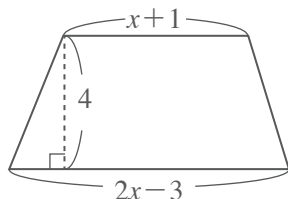
+++ 一元一次式的化簡

化簡下列各式。

(1) $5x-4-3x+1 = \underline{2x-3}$ 。

(2) $-2(x-3)+3(x-1) = \underline{x+3}$ 。

+++ 以文字符號列式並化簡

如下圖，梯形面積 = $\underline{6x-4}$ 。



引起動機

臺灣有多美？我們透過空拍的角度俯瞰新竹關西鎮的稻田，此處的天空、山巒與田野構成一幅大自然的山水畫，被線條切割後的田地如拼圖般，錯落有致的拼貼大地。如果田間小路的寬度都相同，你知道如何用此寬度表達出稻田的總面積嗎？

P.50 6

數學素養UP

P.51 一題多解

P.52 數學新視界 從巴斯卡三角形看數學之美

P.[3] 數學好好玩 解謎說故事

乘法公式

1 分配律

2 乘法公式

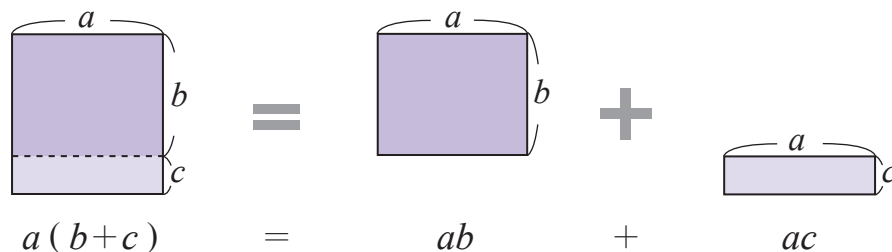
主題 1 分配律

在七年級時，曾經學過乘法對加（減）法的分配律，現在我們透過長方形的面積公式來說明此分配律。

1. $a(b+c)=ab+ac$

下圖的長方形中，長是 a 、寬是 $(b+c)$ ，面積表示成 $a(b+c)$ 。

經由面積計算，可以知道：



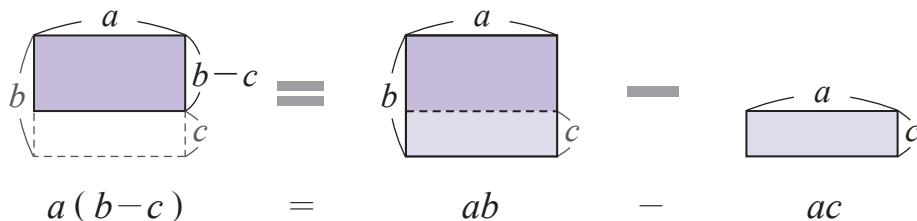
$a(b+c)=ab+ac$ ，這就是乘法對加法的分配律。

例如： $16 \times (100+2) = 16 \times 100 + 16 \times 2$ 。

2. $a(b-c)=ab-ac$

下圖的長方形中，長是 a 、寬是 $(b-c)$ ，面積表示成 $a(b-c)$ 。

經由面積計算，可以知道：



$a(b-c)=ab-ac$ ，這就是乘法對減法的分配律。

例如： $16 \times (100-2) = 16 \times 100 - 16 \times 2$ 。

我叫做
「木(2+3+1)」，
那你知道我的名字嗎？



答案請見第 10 頁

事實上， a 、 b 、 c 為任意數時，下列式子仍成立：

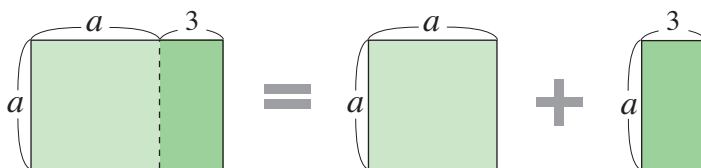
$$a(b+c)=ab+ac \quad ; \quad a(b-c)=ab-ac,$$

因為乘法具有交換律，所以下列式子也恆成立：

$$(b+c)a=ba+ca \quad ; \quad (b-c)a=ba-ca。$$

隨堂練習

下圖中，將一個長為 $(a+3)$ 、寬為 a 的大長方形，分割成邊長為 a 的正方形與長為 a 、寬為 3 的長方形。請在空格中填入適當的數或文字符號，以表示圖中的面積關係。

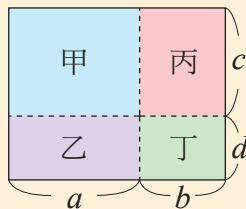


面積 = (a + 3) $\times$ a = a^2 + $3a$ 。

問題探索

透過面積分割，認識 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

右圖中，將一個大長方形分割成甲、乙、丙、丁四塊小長方形，請觀察圖形並完成下面表格。(以 a 、 b 、 c 、 d 表示)



以大長方形計算	以四塊小長方形計算
大長方形的長、寬分別為 <u>$a+b$</u> 、 <u>$c+d$</u> 。	甲面積 = <u>ac</u> 。 丙面積 = <u>bc</u> 。 乙面積 = <u>ad</u> 。 丁面積 = <u>bd</u> 。
大長方形面積 = 長 $\times$ 寬 = (a + <u>b</u>) (c + <u>d</u>)。	四塊小長方形面積和 = 甲面積 + 乙面積 + 丙面積 + 丁面積 = <u>ac</u> + <u>ad</u> + <u>bc</u> + <u>bd</u> 。

由大長方形面積＝四塊小長方形面積的和，可以知道：

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd。$$

也可以利用乘法對加法的分配律：

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd，$$

$$\text{得出 } (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd。$$

事實上， a 、 b 、 c 、 d 為任意數時，下式仍成立。

Key point

分配律

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd。$$

例 1

利用分配律求值 學習內容 A-8-1

利用分配律計算 99×501 的值。

可用計算機來
幫助驗算喔！



計算機操作



解

$$99 \times 501$$

$$=[100+(-1)](500+1)$$

$$=100 \times 500 + 100 \times 1 + (-1) \times 500 + (-1) \times 1$$

$$=100 \times 500 + 100 \times 1 - 1 \times 500 - 1 \times 1$$

$$=50000 + 100 - 500 - 1$$

$$=49599$$

Hint

也可以寫成

$$99 \times 501$$

$$=(100-1)(500+1)$$

$$=100 \times 500 + 100 \times 1 - 1 \times 500 - 1 \times 1$$

$$=50000 + 100 - 500 - 1$$

$$=49599$$

隨堂練習

利用分配律計算 89×102 的值。

$$89 \times 102 = (90-1)(100+2)$$

$$=90 \times 100 + 90 \times 2 - 1 \times 100 - 1 \times 2$$

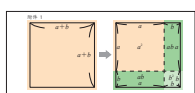
$$=9000 + 180 - 100 - 2$$

$$=9078$$

主題 2 乘法公式

✓ 和的平方公式 《可搭配附件 1 操作》

附件 1

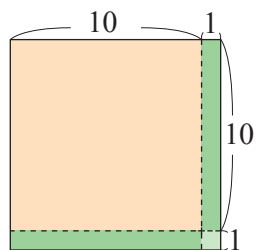


1. 用面積說明

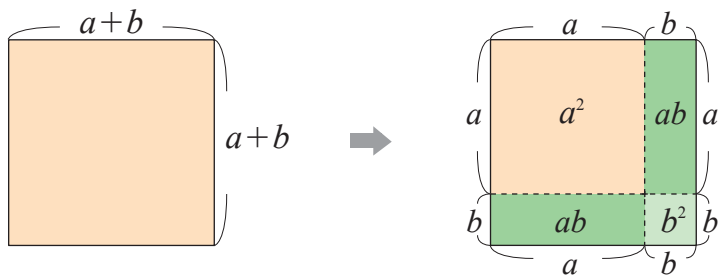
一個邊長為 11 公分的正方形，它的面積是 11^2 平方公分。將這個正方形分割成一個邊長為 10 公分的正方形及兩個長為 10 公分、寬為 1 公分的長方形和一個邊長為 1 公分的正方形。

從面積來看可以得到：

$$11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 1 + 1^2。$$



同樣的，下圖為邊長 $(a + b)$ 的大正方形，將它分割成一個邊長為 a 的正方形及兩個長為 a 、寬為 b 的長方形和一個邊長為 b 的正方形。



從面積來看可以得到： $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2。$

2. 用分配律說明

$(a + b)^2$ 可以表示成 $(a + b) \times (a + b)$ ，用分配律的規則來計算：

$$\begin{aligned} (a + b) \times (a + b) &= a \times (a + b) + b \times (a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

事實上， a 、 b 為任意數時，下式仍成立。

Key point

和的平方公式

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2。$$

公式中的 a 、 b 也可以用其他文字符號代替，

例如： a 、 b 分別用 x 、 y 代替，

$$\begin{array}{ccccccc} (a+b)^2 & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow\uparrow & & \uparrow \\ x & y & x & & xy & & y \end{array}$$

$$\text{得 } (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2。$$

例 2

和的平方公式 學習內容 A-8-1

利用和的平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，計算 504^2 的值。

計算機操作



解 由 $504 = 500 + 4$ ，

將 $a = 500$ 、 $b = 4$ 代入 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned} \text{可得} \quad 504^2 &= (500 + 4)^2 = 500^2 + 2 \times 500 \times 4 + 4^2 \\ &= 250000 + 4000 + 16 \\ &= 254016 \end{aligned}$$



在例 2 中，利用和的平方公式計算 504^2 時，是將 504 看成 $500 + 4$ 。如果將 504 看成 $498 + 6$ ，再利用和的平方公式來算，答案會一樣嗎？哪種比較好算？說說你的想法。

如果拆成其他兩數的和，再利用和的平方公式來算，算出來的值都是一樣的，我們將 504 拆解成 500 與 4 的和，是因為 500^2 比較容易計算

隨堂練習

利用和的平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，計算 201^2 的值。

$$\begin{aligned} 201^2 &= (200 + \underline{1})^2 \\ &= \underline{200^2} + 2 \times \underline{200} \times \underline{1} + \underline{1^2} \\ &= \underline{40401} \end{aligned}$$

答對了嗎？



答案：林森木。

如果將和的平方公式的等號兩邊對調，可以得到等式

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2。$$

我們也可以利用這個等式計算下式，

例如： $61^2 + 2 \times 61 \times 39 + 39^2 = (61 + 39)^2 = 100^2 = 10000。$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a^2 & + & 2 \cdot & a & \cdot & b & + & b^2 & = & (& a & + & b &)^2 \end{array}$$

隨堂練習

在空格中填入適當的數，並完成計算結果。

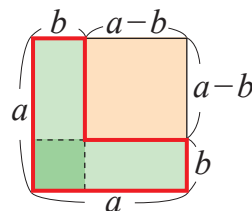
$$44^2 + 2 \times 44 \times 6 + 6^2 = (44 + \underline{6})^2 = \underline{2500}$$

✓ 差的平方公式 《可搭配附件 2 操作》

附件 2

1. 用面積說明

如右圖，邊長為 $(a - b)$ 的正方形面積比邊長為 a 的大正方形面積少了一塊 L 型區域。而 L 型區域是兩個長為 a 、寬為 b 的長方形所疊合成的，重疊部分正好是邊長為 b 的小正方形，也就是說：



$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{c} b \\ | \\ a \\ | \\ \text{L 型區域} \end{array} & = & \begin{array}{c} b \\ | \\ a \\ | \\ \text{L 型區域} \end{array} \\ \text{L 型區域面積} & = & ab + ab - b^2 \\ & = & 2ab - b^2 \end{array}$$

所以

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{c} a-b \\ | \\ a-b \\ | \\ \text{正方形} \end{array} & = & \begin{array}{c} a \\ | \\ a \\ | \\ \text{正方形} \end{array} - \begin{array}{c} b \\ | \\ a \\ | \\ \text{L 型區域} \end{array} \\ (a-b)^2 & = & a^2 - (2ab - b^2) \\ & = & a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

2. 用分配律說明

$(a-b)^2$ 可以表示成 $(a-b) \times (a-b)$ ，用分配律的規則來計算：

$$\begin{aligned}(a-b) \times (a-b) &= a \times (a-b) - b \times (a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

事實上， a 、 b 為任意數時，下式仍成立。

Key point

差的平方公式

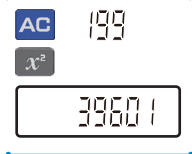
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2。$$

例 3

差的平方公式 學習內容 A-8-1

利用差的平方公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，計算 199^2 的值。

計算機操作



解

由 $199 = 200 - 1$ ，

將 $a = 200$ 、 $b = 1$ 代入 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

可得

$$\begin{aligned}199^2 &= (200 - 1)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 1 + 1^2 \\ &= 40000 - 400 + 1 \\ &= 39601\end{aligned}$$



在例 3 中，利用差的平方公式計算 199^2 時，是將 199 看成 $200 - 1$ 。如果將 199 看成 $206 - 7$ ，再利用差的平方公式來算，答案會一樣嗎？哪種比較好算？說說你的想法。

如果拆成其他兩數的差，再利用差的平方公式來算，算出來的值都是一樣的，我們將 199 拆解成 200 與 1 的差，是因為 200^2 比較容易計算

◆ 隨堂練習

利用差的平方公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，計算 498^2 的值。

$$\begin{aligned}
 498^2 &= (500 - \underline{2})^2 \\
 &= \underline{500^2} - 2 \times \underline{500} \times \underline{2} + \underline{2^2} \\
 &= \underline{248004}
 \end{aligned}$$

如果將差的平方公式的等號兩邊對調，可以得到等式

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2。$$

我們也可以利用這個等式計算下式，

例如： $161^2 - 2 \times 161 \times 61 + 61^2 = (161 - 61)^2 = 100^2 = 10000。$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 a^2 & - 2 & \cdot & a & \cdot & b & + b^2 = (a - b)^2
 \end{array}$$

◆ 隨堂練習

1. 計算 $93^2 - 2 \times 93 \times 3 + 3^2$ 的值。

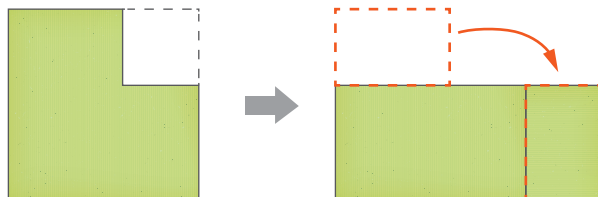
$$\begin{aligned}
 93^2 - 2 \times 93 \times 3 + 3^2 &= (93 - 3)^2 \\
 &= 90^2 \\
 &= 8100
 \end{aligned}$$

2. 判斷下表的等式是否正確，正確的打「○」，錯誤的打「×」，並在更正欄中加以更正。（等式正確就無需更正）

等式	更正
(×) (1) $(7-2)^2 = 7^2 - 2^2$	$(7-2)^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times 2 + 2^2$
(○) (2) $(8-4)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 4 + 4^2$	
(×) (3) $(9-3)^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 3 - 3^2$	$(9-3)^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 3 + 3^2$

✓ 平方差公式

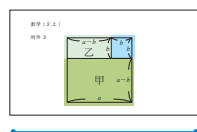
小妍想利用一塊正方形珍珠板布置教室，他先在珍珠板右上角切下一個小正方形，剩下的 L 型珍珠板再切割重組為一個長方形，如下圖。



你能看出上面左、右兩塊珍珠板面積有什麼關係嗎？

經過切割重組，上面左、右兩塊珍珠板面積相等

附件 3

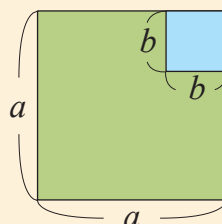


《可搭配附件 3 操作》

問題探索 平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

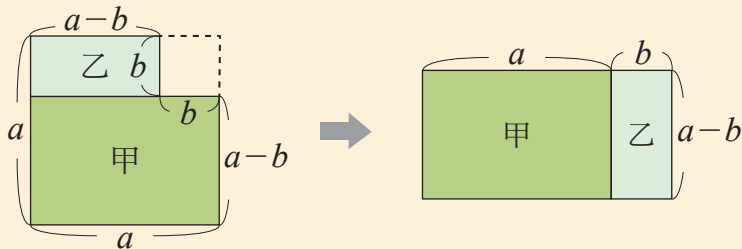
1. 在一張邊長為 a 的大正方形紙片中，將藍色區域邊長為 b 的小正方形剪下，剩餘的面積該如何用 a 和 b 來表示？

$$a^2 - b^2$$



2. 如下圖，將剩餘的部分分割成甲和乙，並重新組合成一個長方形，那麼組合後的長方形面積該如何用 a 和 b 來表示？

$$(a+b)(a-b)$$



3. 比較前兩題 a 、 b 的式子有何關係？

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

由問題探索可知切割重組後， L 型與長方形的面積相等，所以 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

我們也可以將 $(a+b)(a-b)$ 用分配律的規則來計算：

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

事實上， a 、 b 為任意數時，下式仍成立。

Key point

平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2。$$

例 4

平方差公式 學習內容 A-8-1

利用平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ，計算 203×197 的值。

計算機操作



解 由 $203=200+3$ 、 $197=200-3$ ，

將 $a=200$ 、 $b=3$ 代入 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\begin{aligned} \text{可得} \quad 203 \times 197 &= (\overset{\uparrow}{200} + \overset{\uparrow}{3})(\overset{\uparrow}{200} - \overset{\uparrow}{3}) = 200^2 - 3^2 \\ &= 40000 - 9 \\ &= 39991 \end{aligned}$$

隨堂練習

利用平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ，計算 301×299 的值。

$$\begin{aligned} 301 \times 299 &= (300 + \underline{1})(300 - \underline{1}) \\ &= (\underline{300})^2 - (\underline{1})^2 \\ &= \underline{89999} \end{aligned}$$

如果將平方差公式的等號兩邊對調，可以得到等式

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)。$$

我們也可以利用這個等式計算下式，

例如： $101^2 - 100^2 = (101 + 100)(101 - 100) = 201 \times 1 = 201。$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a^2 & - & b^2 & = & (a + b) & (a - b) & \end{array}$$

隨堂練習

計算 $64^2 - 36^2$ 的值。

$$64^2 - 36^2 = (64 + 36)(64 - 36) = 100 \times 28 = 2800$$

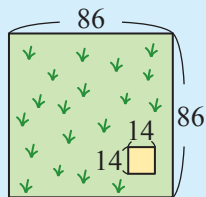
✓ 綜合應用

乘法公式除了可以幫助計算，也可以用來解生活中的問題。

例 5

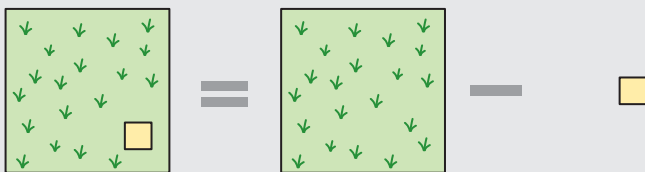
乘法公式解應用問題 學習內容 A-8-1

邊長為 86 公尺的正方形公園預定地，要在園內圈出一塊邊長為 14 公尺的正方形土地蓋遊樂設施，如右圖，則剩餘土地面積為多少平方公尺？



解

想法 剩餘土地面積 = 大正方形面積 - 小正方形面積

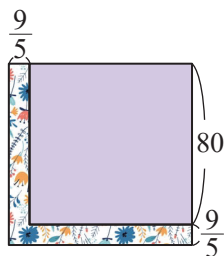


$$\begin{aligned}
 \text{剩餘土地面積} &= 86^2 - 14^2 \\
 &= (86 + 14)(86 - 14) \\
 &= 100 \times 72 \\
 &= 7200
 \end{aligned}$$

所以剩餘土地面積為 7200 平方公尺。

◆ 隨堂練習

瑩芳在邊長為 80 公分的正方形桌墊外加了一條寬為 $\frac{9}{5}$ 公分的 L 型拼布，如右圖，則桌墊加了拼布後的面積總和為多少平方公分？



$$\begin{aligned}
 \text{桌墊加了拼布後的面積總和} &= \left(80 + \frac{9}{5}\right)^2 \\
 &= 80^2 + 2 \times 80 \times \frac{9}{5} + \left(\frac{9}{5}\right)^2 \\
 &= 6400 + 288 + \frac{81}{25} \\
 &= 6691\frac{6}{25}
 \end{aligned}$$

所以桌墊加了拼布後的面積總和為 $6691\frac{6}{25}$ 平方公分



1 分配律

a 、 b 、 c 、 d 為任意數時， $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。

$$\begin{aligned}\text{例 } 99 \times 501 &= [100 + (-1)](500 + 1) \\ &= 100 \times 500 + 100 \times 1 + (-1) \times 500 + (-1) \times 1\end{aligned}$$

2 和的平方公式

a 、 b 為任意數時， $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。

$$\begin{aligned}\text{例 } 504^2 &= (500 + 4)^2 \\ &= 500^2 + 2 \times 500 \times 4 + 4^2\end{aligned}$$

3 差的平方公式

a 、 b 為任意數時， $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

$$\begin{aligned}\text{例 } 199^2 &= (200 - 1)^2 \\ &= 200^2 - 2 \times 200 \times 1 + 1^2\end{aligned}$$

4 平方差公式

a 、 b 為任意數時， $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

$$\begin{aligned}\text{例 } 203 \times 197 &= (200 + 3)(200 - 3) \\ &= 200^2 - 3^2\end{aligned}$$



1 把相等的式子連起來。

P.10 例2、P.12 例3、P.15 例4

(1) $(200+4)^2$

- 200^2+4^2
- $200^2+2\times 200\times 4+4^2$

(2) $(300-6)^2$

- 300^2-6^2
- $300^2-2\times 300\times 6+6^2$
- $300^2-2\times 300\times 6-6^2$

(3) 319^2-119^2

- $2\times (319-119)$
- $(319-119)^2$
- $(319+119)(319-119)$

2 計算下列各式的值。

(1) 43^2

P.10 例2

$$\begin{aligned} &= (40+3)^2 \\ &= 40^2+2\times 40\times 3+3^2 \\ &= 1600+240+9 \\ &= 1849 \end{aligned}$$

(2) $293^2+2\times 293\times 7+7^2$

P.11 隨堂

$$\begin{aligned} &= (293+7)^2 \\ &= 300^2 \\ &= 90000 \end{aligned}$$

(3) 97^2

P.12 例3

$$\begin{aligned} &= (100-3)^2 \\ &= 100^2-2\times 100\times 3+3^2 \\ &= 10000-600+9 \\ &= 9409 \end{aligned}$$

(4) $954^2-2\times 954\times 54+54^2$

P.13 下方隨堂

$$\begin{aligned} &= (954-54)^2 \\ &= 900^2 \\ &= 810000 \end{aligned}$$

(5) 248×252

P.15 例4

$$\begin{aligned} &= (250-2)(250+2) \\ &= 250^2-2^2 \\ &= 62500-4 \\ &= 62496 \end{aligned}$$

(6) 888^2-112^2

P.15 下方隨堂

$$\begin{aligned} &= (888+112)(888-112) \\ &= 1000\times 776 \\ &= 776000 \end{aligned}$$

3 回答下列問題：

P.15 例 4

(1) 化簡 $(a+1)(a-1)-a^2$ 。

(2) 利用(1)的結果，計算 $2007 \times 2005 - 2006^2$ 的值。

(1) $(a+1)(a-1)-a^2=a^2-1^2-a^2=-1$

(2) 因為 $(a+1)(a-1)-a^2=-1$

將 $a=2006$ 代入

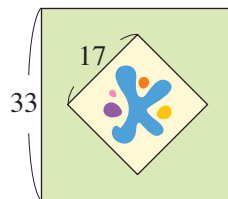
所以 $2007 \times 2005 - 2006^2$

$$= (2006+1)(2006-1) - 2006^2$$

$$= 2006^2 - 1^2 - 2006^2$$

$$= -1$$

4 世均為自創品牌設計商標，此商標由兩個正方形組成，其邊長分別為 33 公分和 17 公分，如右圖，則這兩個正方形之間的綠色區域面積為多少平方公分？



P.16 例 5

兩正方形之間的綠色區域面積 = 大正方形面積 - 小正方形面積

$$= 33^2 - 17^2$$

$$= (33+17)(33-17)$$

$$= 50 \times 16$$

$$= 800$$

所以兩正方形之間的綠色區域面積為 800 平方公分

挑錯題

以下是小妍和小翊利用乘法公式計算「 $(90-8)^2$ 」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小妍：	小翊：
$(90-8)^2 = 90^2 - 8^2$	$(90-8)^2 = 90^2 - 90 \times 8 + 8^2$
$= 8100 - 64$	$= 8100 - 720 + 64$
$= 8036$	$= 7444$

正確解法如下：

$$\begin{aligned} (90-8)^2 &= 90^2 - 2 \times 90 \times 8 + 8^2 \\ &= 8100 - 1440 + 64 \\ &= 6724 \end{aligned}$$