

1-1

乘法公式

1 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

2 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



溫故啟思



重點整理



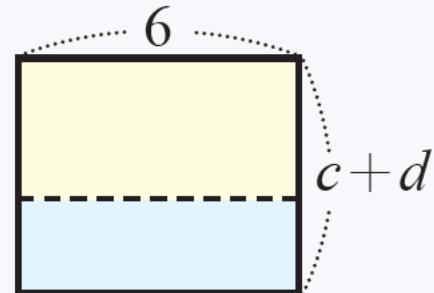
自我評量



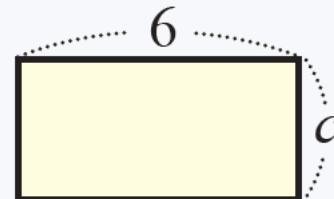


溫故啟思

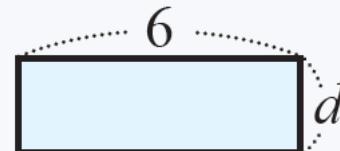
- 1 長為 6、寬為 $c + d$ 的長方形面積為 $6(c + d)$ 。



- 2 長為 6、寬為 c 的長方形面積為 $6c$ 。



- 3 長為 6、寬為 d 的長方形面積為 $6d$ 。



- 4 由 ① ~ ③ 可以得知

$$\underline{6(c + d)} = \underline{6c + 6d} \#.$$

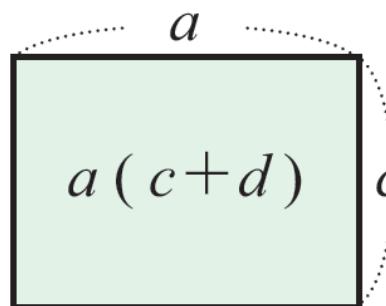
ALL



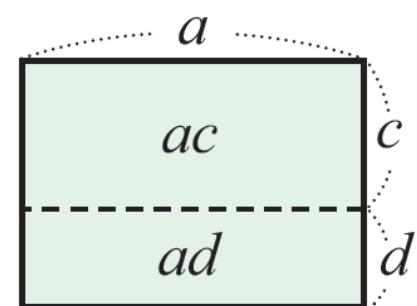
1

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

一個長為 a 、寬為 $c + d$ 的長方形，其面積為 $a \times (c + d)$ ，省略乘號「 \times 」可記為 $a(c + d)$ 。將長方形的寬分成 c 、 d 兩段，則長方形可分成兩個小長方形，其面積分別為 ac 、 ad ，因此得知 $a(c + d) = ac + ad$ 。



將寬分成 c 、 d 兩段

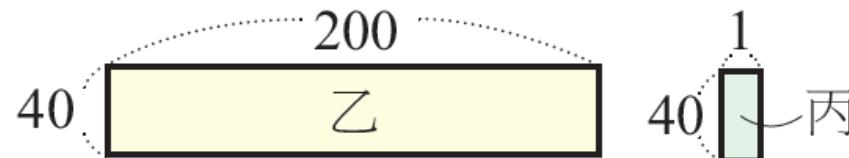


隨堂練習

- 1 如右圖，長方形甲的面積為 199 $\times 40$ 。



- 2 如右圖，長方形乙的面積為 200 $\times 40$ ，長方形丙的面積為 1 $\times 40$ 。



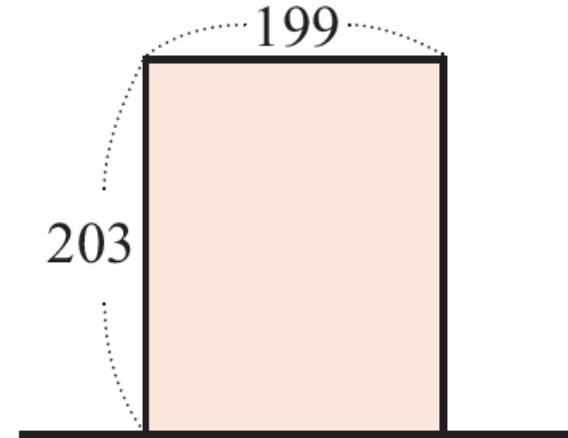
- 3 承 1 和 2，
由於甲的面積為乙扣掉丙的面積

$$\begin{aligned} \text{得知: } 199 \times 40 &= (200 - \underline{\quad 1 \quad}) \times 40 \\ &= 200 \times 40 - \underline{\quad 1 \quad} \times 40 \\ &= 8000 - \underline{\quad 40 \quad} \\ &= \underline{\quad 7960 \quad} \# \end{aligned}$$

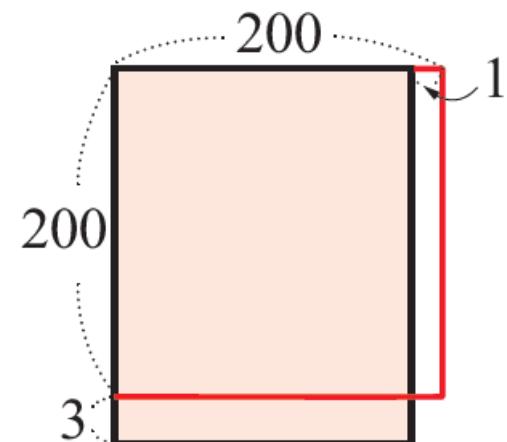
ALL

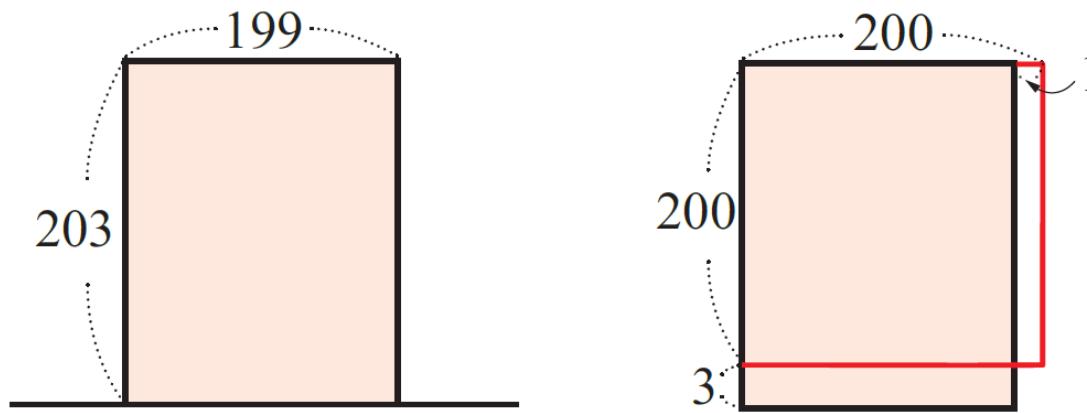


姜丙要油漆一面寬 199 公分，
高 203 公分的牆壁，
由於寬與高都接近 200 公分，
因此油漆面積會接近
 $200 \times 200 = 40000$ (平方公分)。



根據以往的經驗，一罐油漆足夠漆 40000 平方公分以下的面積，但超過 40000 平方公分時需要多準備一罐，那麼姜丙這次需要準備幾罐油漆？





$$199 \times 203$$

$$= (200 - 1) \times 203 \quad \boxed{\text{由 } (a-b) \times c = ac - bc}$$

$$= 200 \times 203 - 1 \times 203 \quad \boxed{\text{由 } a \times (b + c) = ab + ac}$$

$$= 200 \times (200 + 3) - 203 \quad \boxed{\text{由 } a \times (b + c) = ab + ac}$$

$$= 200^2 + 200 \times 3 - 203$$

$$= 200^2 + 397$$

所以這面牆壁油漆面積會超過 40000 平方公分，因此姜丙需要準備兩罐油漆。



► $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

一個長為 $a + b$ ，寬為 $c + d$ 的長方形，

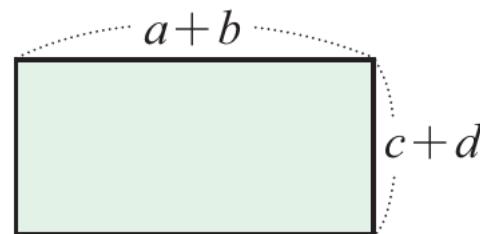
其面積為 $(a + b)(c + d)$ 。

若將長方形的長分成 a 、 b 兩段，

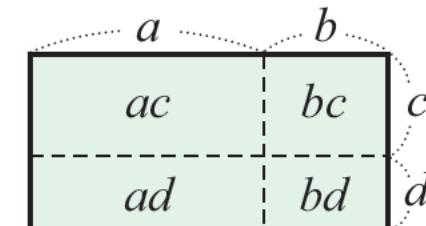
寬分成 c 、 d 兩段，

則長方形可被分成四個小長方形，

其面積分別為 ac 、 bc 、 ad 與 bd ，



將長分成 a 、 b 兩段
將寬分成 c 、 d 兩段



因此得知 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 。



事實上，對於任意數 a 、 b 、 c 、 d ，我們也可以利用分配律得到相同的結論：

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) \\&= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

可以先將 $(c+d)$ 看成 x ，
則 $(a+b)x = ax + bx$ 。





隨堂練習

類題演練



若 $a = 200$ 、 $b = 1$ 、 $c = 200$ 、 $d = 3$ ，利用計算機分別求 $(a + b)(c + d)$ 與 $ac + ad + bc + bd$ 的值，並比較這兩個值是否相等。

解 $(a + b)(c + d) = [200 + 1](200 + 3)$
 $= 201 \times 203 = 40803$

$$\begin{aligned} & ac + ad + bc + bd \\ &= 200 \times 200 + 200 \times 3 + 1 \times 200 + 1 \times 3 \\ &= 40000 + 600 + 200 + 3 = 40803 \end{aligned}$$

因此會相等 #

ALL



分配律

設 a 、 b 、 c 、 d 是任意數，

$$\text{則 } (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$



利用分配律將上面左式運算成右式的過程
稱為展開 $(a+b)(c+d)$ 。



例 1 利用分配律求值

利用分配律計算下列各式，並用計算機檢驗
計算結果：

(1) 102×108

解 (1) 102×108

$$= (100 + 2)(100 + 8)$$

分配律乘開
時要注意正
負號變化。



$$= 100 \times 100 + 100 \times 8 + 2 \times 100 + 2 \times 8$$

$$= 10000 + 800 + 200 + 16$$

$$= 11016 \#$$

ALL



例 1 利用分配律求值



利用分配律計算下列各式，並用計算機檢驗
計算結果：

(2) 9.9×9.7

解 (2) 9.9×9.7

$$= [10 + (-0.1)] [10 + (-0.3)]$$

$$\begin{aligned} &= 10 \times 10 + 10 \times (-0.3) \\ &\quad + (-0.1) \times 10 + (-0.1) \times (-0.3) \\ &= 10 \times 10 - 10 \times 0.3 - 0.1 \times 10 + 0.1 \times 0.3 \\ &= 100 - 3 - 1 + 0.03 = 96.03 \# \end{aligned}$$

ALL





在例題 1(2) 中，計算 9.9×9.7 也可以用

$$9.9 \times 9.7 = (10 - 0.1)(10 - 0.3)$$

$$= 10 \times 10 - 10 \times 0.3 - 0.1 \times 10 + 0.1 \times 0.3$$

$$= 96.03$$





隨堂練習

計算機按法請參考附錄



利用分配律計算下列各式，並用計算機檢驗
計算結果：

類題演練

$$(1) 102 \times 99 = (100 + 2)(100 - 1)$$

解

$$\begin{aligned} &= 100 \times 100 - 100 \times 1 + 2 \times 100 - 2 \times 1 \\ &= 10000 - 100 + 200 - 2 = 10098 \end{aligned}$$

$$(2) 6\frac{1}{5} \times 5\frac{1}{6} = (6 + \frac{1}{5})(5 + \frac{1}{6})$$

解

$$\begin{aligned} &= 6 \times 5 + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times 5 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \\ &= 30 + 1 + 1 + \frac{1}{30} = 32\frac{1}{30} \# \end{aligned}$$

ALL

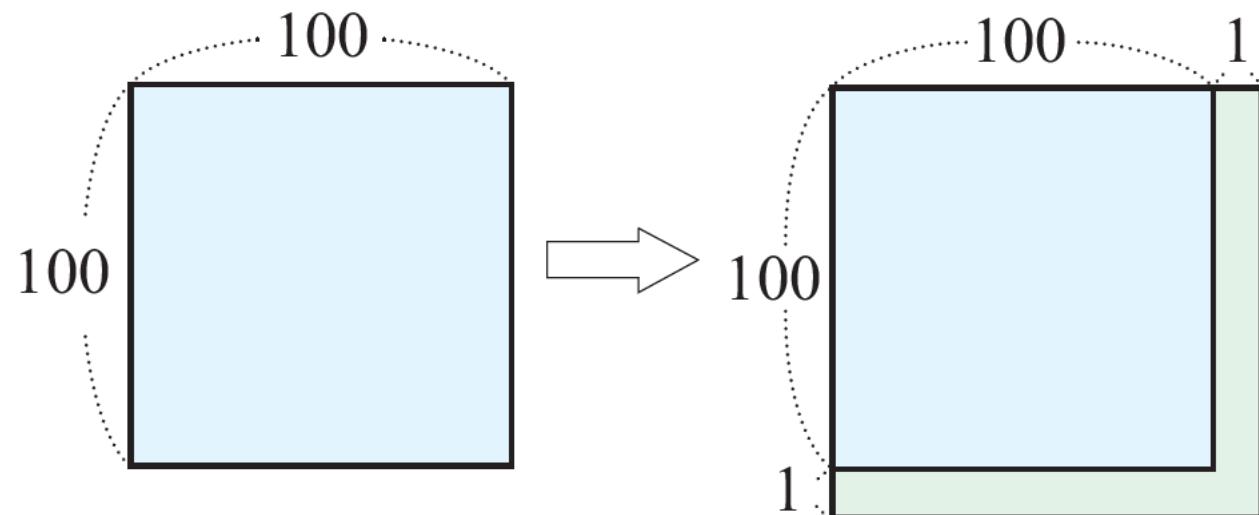


2

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

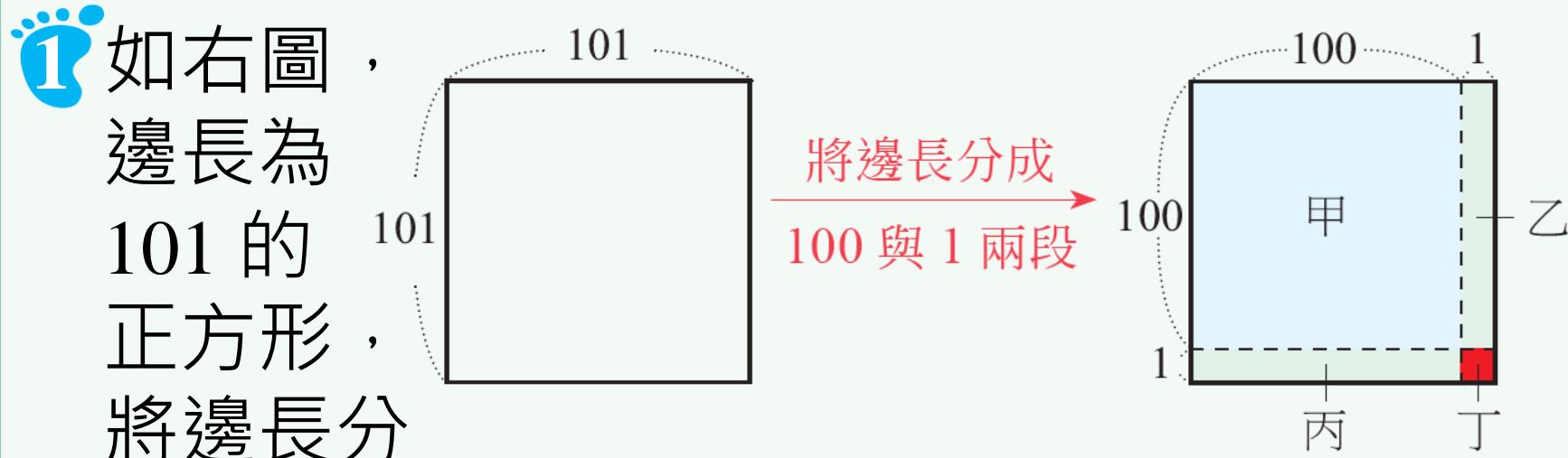
► 和的平方公式

在本章開頭 (P.5) 的例子中，現有邊長為 100 的正方形，如果將邊長增加 1 後，則面積會增加多少呢？我們來看下面的討論。





探索活動

利用面積的分割比較 101^2 與 100^2 。

成 100 與 1 兩段，則正方形可被分成甲、乙、丙、丁四個長方形，此時甲的面積為 100^2 ，求其餘三個長方形面積分別為何？

$$\text{乙} = \text{丙} = 100 \times 1 = 100, \text{ 丁} = 1^2 = 1.$$

#

ALL

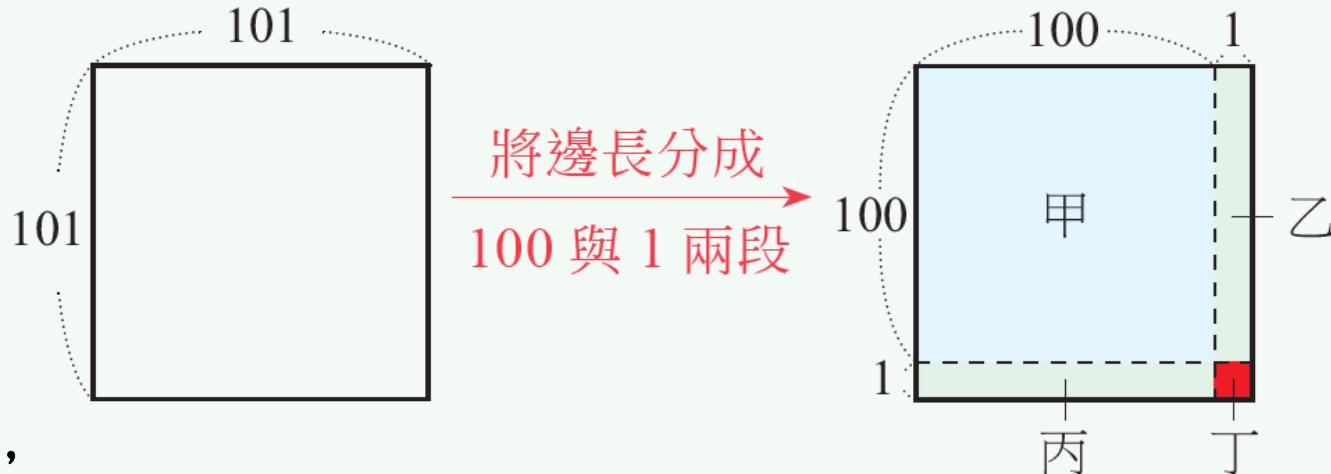




探索活動

利用面積的分割比較 101^2 與 100^2 。

2 利用分
割前、
後的正
方形面
積不變，



說明 101^2 比 100^2 大多少？

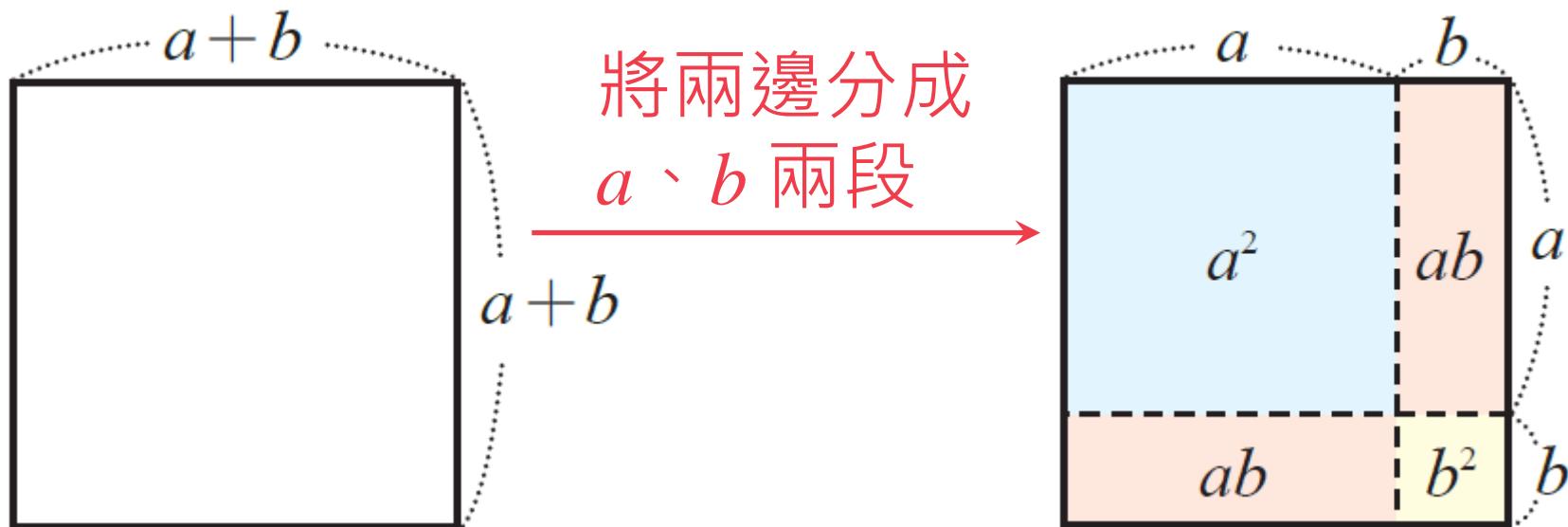
$$101^2 = 100^2 + 2 \times 100 + 1 = 100^2 + 201.$$

$$\text{或 } 101^2 - 100^2 = 2 \times 100 + 1 = 201. \#$$

ALL



接下來討論一般的情況，一個邊長為 $a + b$ 的正方形，其面積為 $(a + b)^2$ 。將邊長分成 a 、 b 兩段，則正方形可被分成四個小長方形，其面積分別為 a^2 、 ab 、 ab 與 b^2 ，



因此得知 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。
(可使用附件1操作)





事實上，對於任意數 a 、 b ，我們也可以利用分配律得到相同的結論：

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\&= a^2 + ab + ba + b^2 \\&= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

因為 $ab = ba$ ，
所以 $ab + ba = 2ab$ 。





和的平方公式

設 a 、 b 是任意數，
則 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。



$$\begin{aligned}(5 + 3)^2 \\= 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2\end{aligned}$$





隨堂練習

類題演練

延伸演練

根據和的平方公式，判斷下表中的等式對或錯。若錯誤，試加以更正。**解**

等 式	對	錯	更 正
$(4 + 3)^2 = 4^2 + 3^2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$(4 + 3)^2$ $= 4^2 + 2 \times 4 \times 3 + 3^2$
$(2 + 8)^2$ $= 2^2 + 2 \times 8 + 8^2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$(2 + 8)^2$ $= 2^2 + 2 \times 2 \times 8 + 8^2$
$(5 + 1)^2$ $= 5^2 + 2 \times 5 \times 1 + 1^2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$10^2 + 2 \times 10 \times 2 + 2^2$ $= (10 + 2)^2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

ALL



#



例 2 利用和的平方公式求值

利用和的平方公式計算下列各式：

(1) 201^2

解 (1) 201^2

$$= (200 + 1)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 1 + 1^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

$$= 40000 + 400 + 1$$

$$= 40401 \#$$

ALL





例 2 利用和的平方公式求值

利用和的平方公式計算下列各式：

(2) 10.5^2

解 (2) 10.5^2

$$= (10 + 0.5)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 0.5 + 0.5^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

$$= 100 + 10 + 0.25$$

$$= 110.25 \#$$

ALL





例 2 利用和的平方公式求值

類題演練

利用和的平方公式計算下列各式：

$$(3) 37^2 + 2 \times 37 \times 23 + 23^2$$

解 $(3) 37^2 + 2 \times 37 \times 23 + 23^2 = (37 + 23)^2$

$$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ a^2 & + 2 \times a \times b & + b^2 & = & (a + b)^2 & & & \end{array}$$

$$= 60^2$$

$$= 3600 \#$$

ALL





隨堂練習

利用和的平方公式計算下列各式：

(1) 103^2

解 $= (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$
 $= 10000 + 600 + 9 = 10609$

(2) $(10\frac{1}{5})^2$

解 $= (10 + \frac{1}{5})^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times \frac{1}{5} + (\frac{1}{5})^2$
 $= 100 + 4 + \frac{1}{25} = 104\frac{1}{25}$ #

ALL





隨堂練習

利用和的平方公式計算下列各式：

(3) $67^2 + 2 \times 67 \times 133 + 133^2$

解 $= (67 + 133)^2$

$= 200^2$

$= 40000$ #

ALL

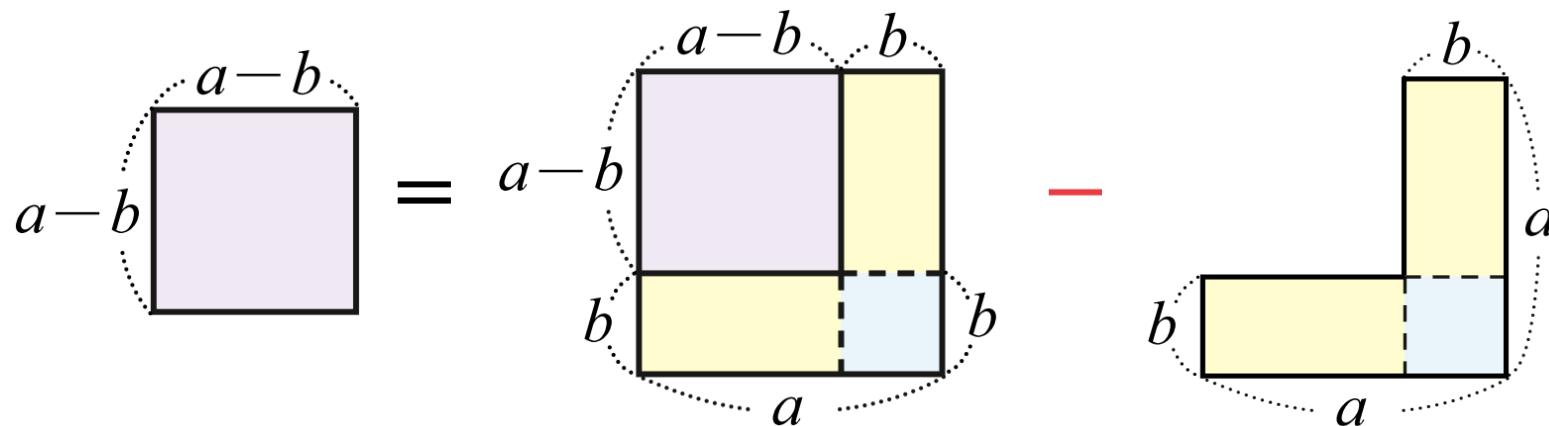


3

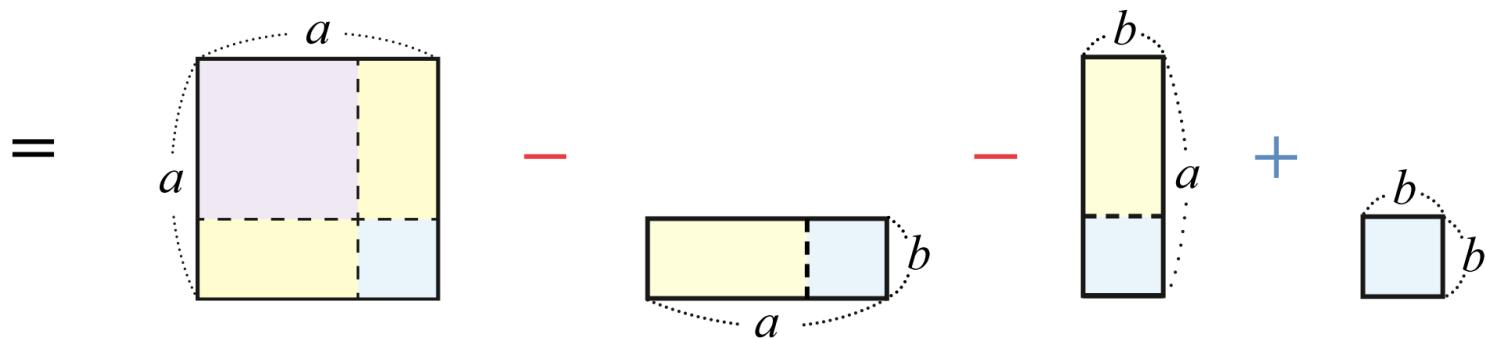
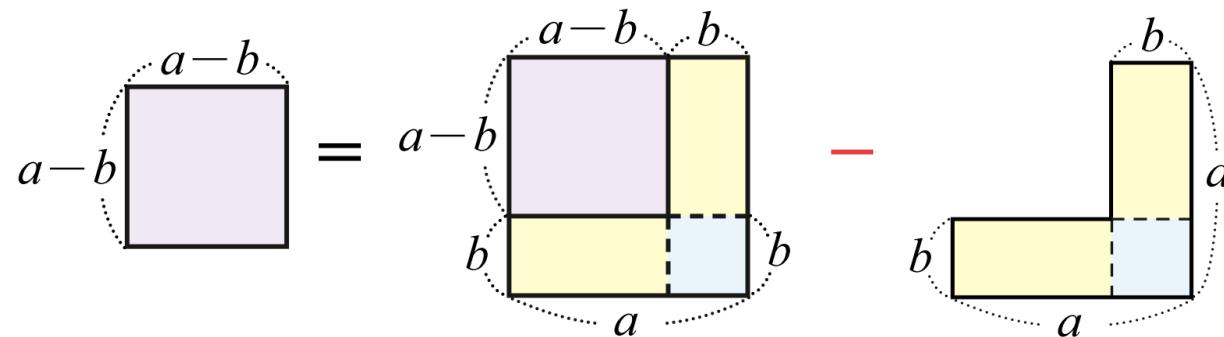
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

► 差的平方公式

一個邊長為 $a-b$ 的正方形，
其面積為 $(a-b)^2$ ，由於 a 比 $(a-b)$ 多 b ，
因此我們可以用邊長為 a 的正方形面積扣除
多出的區域面積來計算 $(a-b)^2$ ，



作法如下：(可使用附件2操作)



$$\begin{aligned} \text{因此得知 } (a-b)^2 &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$



對於任意數 a 、 b ，我們也可以利用和的平方公式得到相同的結論：

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= [a+(-b)]^2 \\&= a^2 + 2a \times (-b) + (-b)^2 \\&= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$



差的平方公式

設 a 、 b 是任意數，

則 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。



$$\begin{aligned}(5-3)^2 &= 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2\end{aligned}$$





隨堂練習

類題演練

根據差的平方公式，判斷下表中的等式對或錯。若錯誤，試加以更正。**解**

等 式	對	錯	更 正
$(11 - 1)^2 = 11^2 - 1^2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$(11 - 1)^2 = 11^2 - 2 \times 11 \times 1 + 1^2$
$(10 - 5)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 5 + 5^2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$(20 - 8)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 8 + 8^2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$(20 - 8)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 8 + 8^2$
$8^2 - 2 \times 8 \times 3 + 3^2 = (8 - 3)^2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

ALL



#



例 3 利用差的平方公式求值

利用差的平方公式計算下列各式：

(1) 299^2

解 (1) 299^2

$$\begin{aligned} &= (300 - 1)^2 = 300^2 - 2 \times 300 \times 1 + 1^2 \\ &\quad \begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & -b & a^2 & -2 \times & a & \times b & b^2 \end{array} \\ &= 90000 - 600 + 1 \\ &= 89401 \ # \end{aligned}$$





例 3 利用差的平方公式求值

利用差的平方公式計算下列各式：

$$(2) \left(9\frac{1}{2} \right)^2$$

解 $(2) \left(9\frac{1}{2} \right)^2$

$$= \left(10 - \frac{1}{2} \right)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

$$= 100 - 10 + \frac{1}{4}$$

$$= 90\frac{1}{4} \#$$

ALL





例 3

利用差的平方公式求值

類題演練

利用差的平方公式計算下列各式：

(3) $212^2 - 2 \times 212 \times 12 + 12^2$

解 (3) $212^2 - 2 \times 212 \times 12 + 12^2 = (212 - 12)^2$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a^2 & - 2 \times & a & \times b & + b^2 & = (a - b)^2 \end{array}$$

$$= 200^2$$

$$= 40000 \text{ } \#$$

ALL





隨堂練習

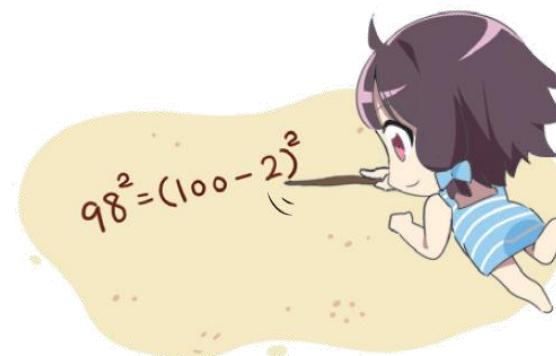
利用差的平方公式計算下列各式：

(1) 98^2

解 $= (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
 $= 10000 - 400 + 4 = 9604$

(2) 9.7^2

解 $= (10 - 0.3)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 0.3 + 0.3^2$
 $= 100 - 6 + 0.09 = 94.09$ #



ALL





隨堂練習

延伸演練

利用差的平方公式計算下列各式：

(3) $54^2 - 2 \times 54 \times 4 + 4^2$

解 $= (54 - 4)^2$

$= 50^2$

$= 2500$ #

ALL

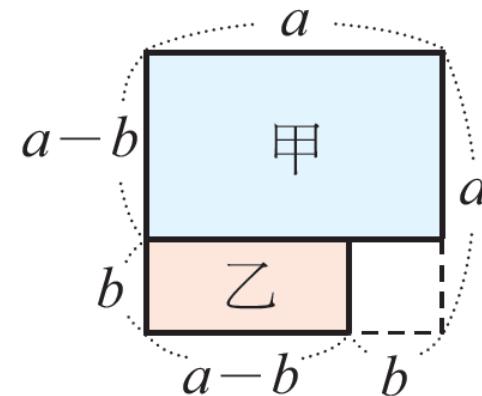
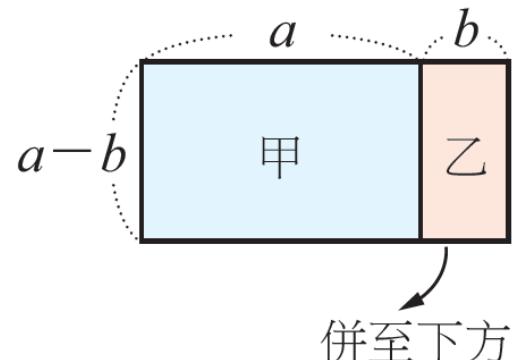
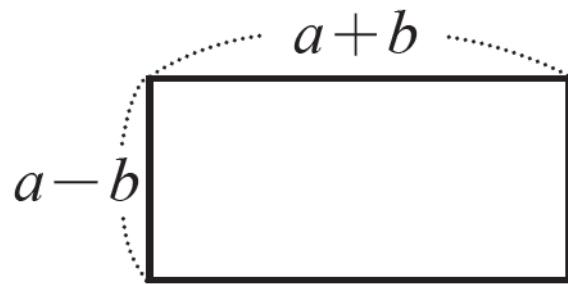


4

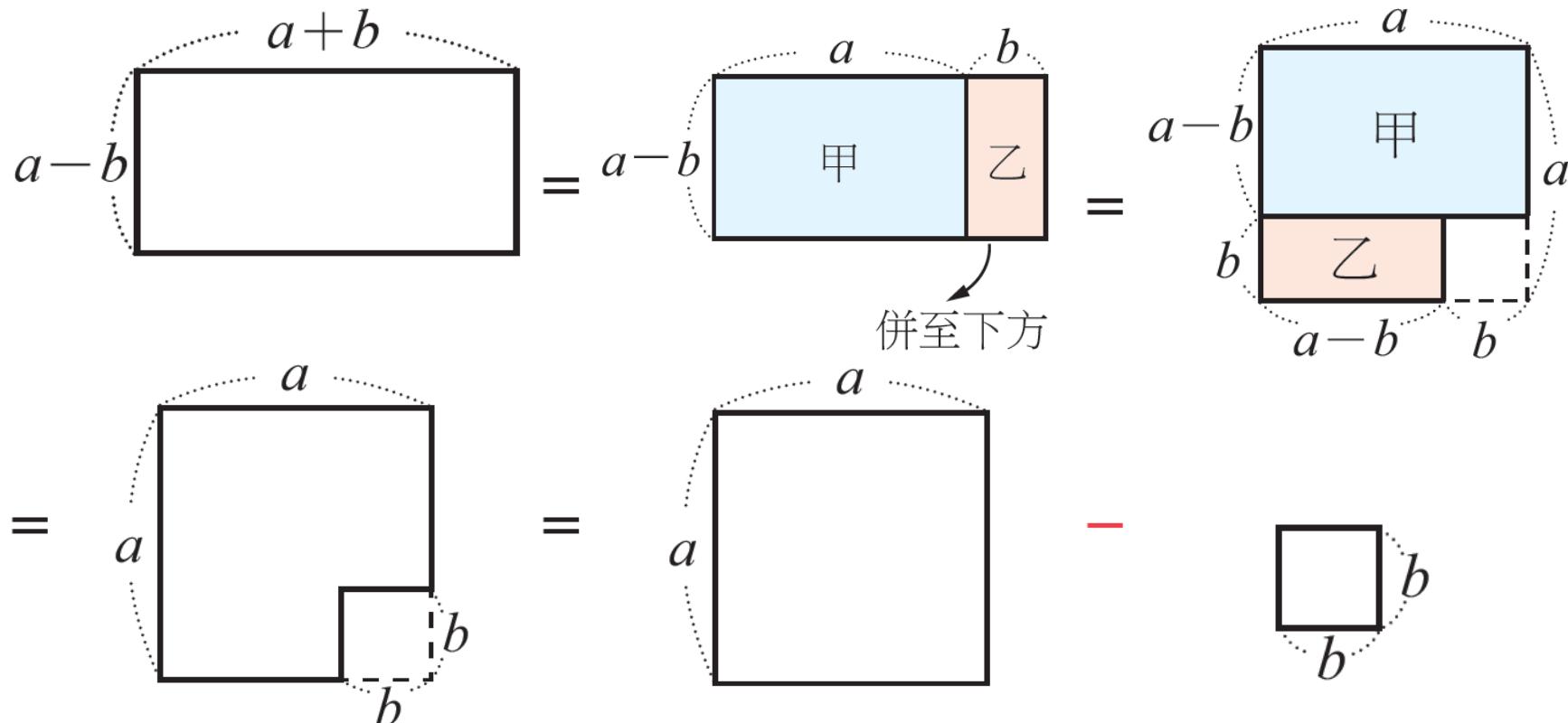
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

► 平方差公式

一個長為 $a+b$ 、寬為 $a-b$ 的長方形，
其面積為 $(a+b)(a-b)$ ，
我們可以將長分成 a 、 b 兩段，
則長方形就可以分成甲、乙兩個小長方形。
然後將長方形乙併至長方形甲的下方，



作法如下：(可使用附件3操作)



由於上圖為一個缺角的正方形，

其面積為 $a^2 - b^2$ ，

因此得知 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 。





事實上，對於任意數 a 、 b ，我們也可以利用分配律得到相同的結論：

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$



平方差公式

設 a 、 b 是任意數，

則 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。



$$\begin{aligned}(5+3)(5-3) \\ = 5^2 - 3^2\end{aligned}$$





隨堂練習

根據平方差公式，判斷下表中的等式對或錯。
若錯誤，試加以更正。 **解**

等 式	對	錯	更 正
$(15 + 5)(15 - 5) \\ = 15^2 - 5^2$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$101^2 - 100^2 \\ = (101 - 100)^2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$101^2 - 100^2 \\ = (101 + 100)(101 - 100)$ #

ALL





例 4

利用平方差公式求值

利用平方差公式計算下列各式：

(1) 103×97

解 (1) 103×97

$$= (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$= 10000 - 9$$

$$= 9991 \#$$

ALL

