

**彰化縣113學年度草湖國民中學校長及教師公開授課活動
教學活動設計單**

領域/科目	數學	教學者	許宜玲
實施年級	七年級	教學時間	1 節課(45 分鐘)
單元名稱	質因數分解		
學校願景			
設計理念	熟練質因數及標準分解式運算運算		
學習重點	學習表現	n-IV-1 理解因數、倍數、質數、最大公因數、最小公倍數的意義及熟練其計算，並能運用到日常生活的情境解決問題。。	A 自主行動 ☐ A1 身心素質與自我精進 ☒ A2 系統思考與解決問題 ☐ A3 規劃執行與創新應變 B 溝通互動 ☒ B1 符號運用與溝通表達 ☐ B2 科技資訊與媒體素養 ☐ B3 藝術涵養與美感素養 C 社會參與 ☐ C1 道德實踐與公民意識 ☒ C2 人際關係與團隊合作 ☐ C3 多元文化與國際理解
	學習內容	N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。 N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。	

議題融入	涯-J2 具備生涯規劃的知識與概念。	
教材來源	康軒教科書	
教學設備 /資源	黑板、多媒體設備、學習單	
學習目標	1. 認識質因數及標準分解式 2. 熟練質因數及標準分解式	
教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	備註
一、引起動機 複習多因數概念。 讓同學分組排因數字卡並填寫學習單。	5 分鐘	因數字卡排排樂
二、課程活動 1. 認識質數、質因數。 2. 利用因數找出質因數。 3. 樹狀圖、短除法、標準分解式 教師講解題目，並由同學口頭回 答、練習課本隨堂題目，再請同學 上台練習講解。	35 分鐘	
三、綜合活動 1. 教師總結課程內容 2. 學習單練習(課後練習題)	5 分鐘	
參考資料： 康軒文教事業教科書		

上課課程內容

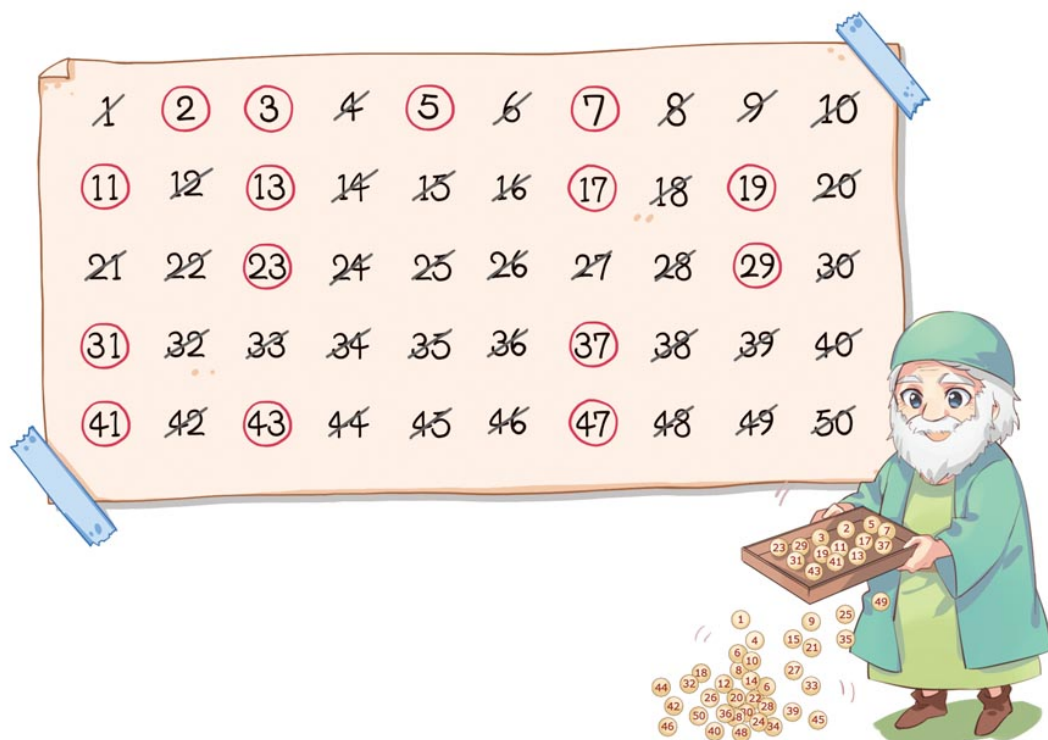
質數篩檢法

在兩千多年前，古希臘數學家埃拉托賽尼（*Eratosthenes*，約西元前 276 年～西元前 194 年）曾提出一種篩檢法，用來找出小於某個正整數的所有質數。接著我們來說明此篩檢法如何篩選 1 到 50 之間的所有質數。

首先列出 1 到 50 之間的所有整數，並依照下列步驟進行：

- 1 1 不是質數，故刪去 1。
- 2 2 是質數，故圈出 2，並刪去其餘 2 的倍數。
- 3 下一個沒有被刪去最小的數是 3，圈出 3，並刪去其餘 3 的倍數。
- 4 下一個沒有被刪去最小的數是 5，圈出 5，並刪去其餘 5 的倍數。
- 5 下一個沒有被刪去最小的數是 7，圈出 7，並刪去其餘 7 的倍數。

完成步驟 1～步驟 5 的操作後，將剩下的 11、13、17、19、…… 圈起來，這些被圈出來的數就是 50 以內的質數。



解
不一定。
例如 12 是 3
的倍數，但
12 不是 9 的
倍數。



隨堂練習

請在下表圈出 51 到 100 之間的質數。

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4 標準分解式

如果一個正整數的因數也是質數，我們稱這個因數是這個正整數的**質因數**。例如：20 的因數有 1、2、4、5、10、20，其中 2、5 是質數，因此我們說 2、5 是 20 的質因數。

例 6 找出質因數

寫出 36 的因數及其質因數。

解

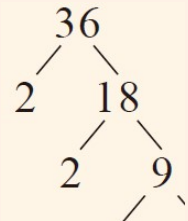
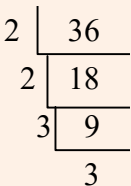
因為 $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ ，
所以 36 的因數有 1、2、3、4、6、9、12、18、36，
其中 2、3 是質數，因此 36 的質因數為 2、3。

隨堂練習

分別將整數 51、52 的因數填入下表，並將它們的質因數找出來。

整數	因數	質因數
51		
52		

在例題 6 中，用列出所有因數的方法找出 36 的質因數；在國小時我們學過，用樹狀圖或短除法也可以將一個正整數分解，並寫成質因數的乘積。

樹狀圖	短除法	因數分解
		$36 = 2 \times 18$ $= 2 \times 2 \times 9$ $= 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$	
質因數 2、3	質因數 2、3	質因數 2、3

由上面的三種方式將一個大於 1 的整數分解成質數的乘積，就是對此整數做質因數分解。

質因數分解求相異質因數

將 540 做質因數分解，並寫出 540 的相異質因數。

解

短除法

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 540} \\ 2 \overline{) 270} \\ 3 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

$$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

相異質因數為 2、3、5。

因數分解

$$540 = 2 \times 270$$

$$= 2 \times (2 \times 135)$$

$$= 2 \times 2 \times (3 \times 45)$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times (3 \times 15)$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

隨堂練習

將 680 做質因數分解，並寫出 680 的相異質因數。

將質因數分解依質因數由小到大排序，再將相同的質因數乘積寫成乘方的型式，我們稱這樣的表示法為**標準分解式**。例如： $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ 。

例 8

求標準分解式

① 求 300 的標準分解式。

② 求 855 的標準分解式。

解

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad 2 \overline{) 300} \\ \underline{2 \quad 150} \\ 3 \overline{) 75} \\ \underline{3 \quad 25} \\ 5 \overline{) 25} \\ \underline{5 \quad 0} \\ 5 \end{array}$$

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

故 300 的標準分解式為 $2^2 \times 3 \times 5^2$ 。

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \quad 5 \overline{) 855} \\ \underline{5 \quad 171} \\ 3 \overline{) 171} \\ \underline{3 \quad 57} \\ 3 \overline{) 57} \\ \underline{3 \quad 19} \\ 19 \end{array}$$

$$855 = 3 \times 3 \times 5 \times 19 = 3^2 \times 5 \times 19$$

故 855 的標準分解式是 $3^2 \times 5 \times 19$ 。

短除法不一定要
從最小的質因數
開始分解。



隨堂練習

① 求 112 的標準分解式。

② 求 780 的標準分解式。

例 9 短除法與標準分解式

小善利用短除法將正整數 a 分解成質因數乘積，計算過程如右圖。請將 a 、 d 用標準分解式表示。

$$\begin{array}{r|l} 2 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \\ 5 & d \\ 7 & \end{array}$$

解

$$d = 5 \times 7、$$

$$c = 3 \times 5 \times 7、$$

$$b = 2 \times 3 \times 5 \times 7、$$

$$a = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7。$$

$$\text{故 } a = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7、d = 5 \times 7。$$

隨堂練習

如右圖，將 a 用標準分解式表示後可得 $2^p \times 3 \times q^2 \times r$ ，則 $p + q + r = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2 & a \\ 3 & b \\ 7 & c \\ 7 & d \\ 11 & \end{array}$$



數養時光機

質數找得完嗎？

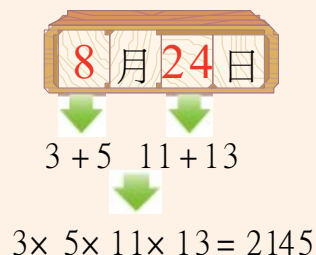
無論世界上有幾個質數，歐幾里德說只要把它們相乘再加 1，就可以找出新質數。例如世界上只有 3 個質數甲、乙、丙，假設丁 = 甲 × 乙 × 丙 + 1。

- ① 如果丁是質數，因為比甲、乙、丙都要大，所以是一個新質數。
- ② 如果丁是合數，它會有比自己小的質因數，可是丁除以甲、乙、丙都餘 1，所以必有一個跟甲、乙、丙都不一樣的質數戊可以整除了。

例 10 標準分解式的應用

如右圖，小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，他分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼。

若小明以相同方式得到的密碼為 2030，則小明的生日是幾月幾日？



解

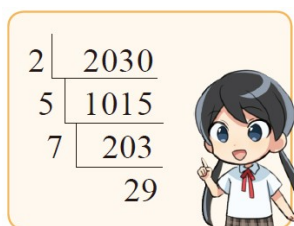
因為 $2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 29$ ，

所以四個質數為 2、5、7、29。

又月分不會超過 12，日期不會超過 31，

故 $5+7=12$ ， $2+29=31$ ，

因此小明的生日是 12 月 31 日。



隨堂練習

承例題 10，若小丘以相同方式得到的密碼為 2618，則小丘的生日是幾月幾日？

2-1 質因數分解學習單

課程內容：標準分解式

班級：七年三班 座號：_____ 姓名：_____



一、課程複習：

1. 回答下列問題：

(1) 最小的質數是_____。(2) 最小的合數是_____。

(3) 奇數中，最小的質數是_____。

(4) 91 是質數還是合數？答：_____。

2. 20 的因數中，有哪些為質數？答：_____。

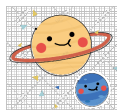
3. 欲使 n 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成矩形，且不會剩下任何小正方形，則：(1) 若 $n=15$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

(2) 若 $n=17$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

(3) 若 $n=18$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

(4) 若 $n=36$ ，可以拼出_____種不同形狀的矩形。

二、課程練習：



1. 若 2448 的標準分解式為 $2^a \times 3^b \times c$ ，則 $a=_____$ ， $b=_____$ ， $c=_____$ 。

2. 將 1062 用短除法做質因數分解的過程如右，則

$a=_____$ ， $b=_____$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1062} \\ 3 \overline{) \quad a} \\ \quad b \end{array}$$

3. 將下列各數做質因數分解並寫出它的標準分解式。

(1) $60=_____$ 。(2) $345=_____$ 。

(3) $117=_____$ 。(4) $456=_____$ 。

(5) $336=_____$ 。(6) $936=_____$ 。

(7) $2475=_____$ 。(8) $3375=_____$ 。



4. 若 2448 的標準分解式為 $2^a \times 3^b \times c$ ，則 $a=_____$ ， $b=_____$ ， $c=_____$ 。

5. 將 1062 用短除法做質因數分解的過程如右，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1062} \\ 3 \overline{) \quad a} \\ b \end{array}$$

6. 小原設定手機解鎖的密碼為 $abcd$ 四碼，若他是利用 1080 的標準分解式 $2^a \times b^c \times d$ 來設計密碼，請問此組密碼為何？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。