

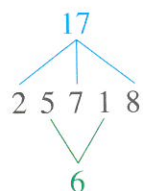
● 11 的倍數判別法

要檢查一個整數是否為 11 的倍數，判別方法如下：

Key point 11 的倍數判別法

如果一個整數的「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0，那麼這個整數就是 11 的倍數；否則就不是 11 的倍數。

例如：25718 是否為 11 的倍數？



第 1、3、5 位 (奇數位) 的數字和 = $8+7+2=17$ ，

第 2、4 位 (偶數位) 的數字和 = $1+5=6$ 。

因為 $17-6=11$ 是 11 的倍數，

所以 25718 是 11 的倍數。

Hint

$$\begin{aligned}
 25718 &= 2 \times 10000 + 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 8 \\
 &= 2 \times (9999 + 1) + 5 \times (1001 - 1) + 7 \times (99 + 1) + 1 \times (11 - 1) + 8 \\
 &= 2 \times 9999 + 5 \times 1001 + 7 \times 99 + 1 \times 11 + (2 - 5 + 7 - 1 + 8) \\
 &\quad \text{11 的倍數} \quad \text{11 的倍數} \quad \text{11 的倍數} \quad \text{11 的倍數} \quad \text{11 的倍數}
 \end{aligned}$$

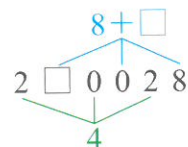
例 7

判別 11 的倍數 學習內容 N-7-2

◆ 搭配習作
P.30 第 4 題

已知六位數 $2\square 0028$ 是 11 的倍數，則 $\square$ 中可以填入的數為何？

解



$2\square 0028$ 的奇數位數字和 = $8+0+\square=8+\square$ ，

偶數位數字和 = $2+0+2=4$ 。

因為 $(8+\square)-4$ 要為 0 或 11 的倍數，

因此 $\square$ 中可填入 7。

隨堂練習

判斷 345345 和 37195 是不是 11 的倍數？

$(5+3+4)-(4+5+3)=12-12=0$ ，因此 345345 是 11 的倍數

$(9+7)-(5+1+3)=16-9=7$ ，因此 37195 不是 11 的倍數

主題 3 質數與質因數分解

課外探索 P.254

◆ 不足數與過剩數

● 質數與合數

一個大於 1 的整數，

(1) 除了 1 和本身以外，**沒有**其他的因數，這樣的數稱為**質數**。

例如：2、11、17 等都是質數。

(2) 除了 1 和本身以外，**還有**其他的因數，這樣的數稱為**合數**。

例如：4、15、51 等都是合數。

而 1 不是質數也不是合數，

2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

因此，要判斷一個正整數是質數還是合數，要看小於它的正整數中，除了 1 以外，是否有其他的因數。

例 8

判斷質數與合數 學習內容 N-7-1

分別判斷 21 和 23 兩數是質數還是合數？

1 只有本身一個因數，與質數的定義不合，所以 1 不是質數。此外，如果把 1 當作質數，那麼一個數的質因數分解中，可以包含任意有限個 1，質因數分解的唯一性就沒了。

2 4 是最小的合數。

3 判斷質數時，此質數應不宜過大。

(1) 在小於 21、大於 1 的正整數 2、3、4、5、6、……、20 中，3 和 7 皆是 21 的因數，所以 21 是合數。

(2) 在小於 23、大於 1 的正整數中，

① 2 不是 23 的因數，

所以 2 的倍數 4、6、8、10、12、14、16、18、20、22 也不是 23 的因數；

② 3 不是 23 的因數，所以 9、15、21 也不是 23 的因數；

③ 5、7、11、13、17、19 也不是 23 的因數。

因此，小於 23 的正整數中，除了 1 以外，再也找不到其他因數，所以 23 是質數。

由例 8 (2) 的步驟中，我們依序刪除由小到大質數的倍數，發現要判斷一個正整數是否為質數，只要看小於這個數的質數是否為此數的因數即可。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23		

易 重新布題

1. 35789、246576、81026 中，哪些數是 11 的倍數？

答：246576、81026

2. 若五位數 $25\square 46$ 是 11 的倍數，則 $\square$ 中可以填入哪些數？

答：1

中 重新布題

下列哪些數是 11 的倍數，但不是 3 的倍數？

9119、66066、31625、2013、8346

答：9119、31625

易 重新布題

判別 47 與 121 分別是質數還是合數？

答：47 是質數、121 是合數

隨堂練習

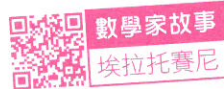
分別判斷 31 和 39 兩數是質數還是合數？

- (1) 在小於 31、大於 1 的質數中
2、3、5、7、11、13、17、19、23、29 皆不是 31 的因數
因此 31 是質數
- (2) 在小於 39、大於 1 的質數中
3 和 13 皆是 39 的因數
因此 39 是合數

Wordwall
判斷哪些是質數

質數篩檢法

大約在兩千多年前，古希臘數學家埃拉托賽尼 (Eratosthenes) 就已利用篩檢法找出某個範圍內的質數，我們來看下面的問題探索。



數學家故事
埃拉托賽尼

問題探索

篩出與檢驗 1 到 100 中的質數

◆搭配習作
P.31 第 6 題

在下面的百數表中，依下列過程操作，並回答問題：

百數表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

90 秒學數學
百數表

易重新布題

下表有 1~100 的整數，將表中的質數圈起來，是否發現什麼有趣的現象？說說看。

	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100

1 是質數，除餘 1 或不足 1 的數

課外探索 P.254

◆梅森質數

(1) 步驟①：1 不是質數，刪去 1。

步驟②：2 是質數，圈出 2，並刪去其他 2 的倍數。

步驟③：3 是質數，圈出 3，並刪去其他 3 的倍數。

步驟④：5 是質數，圈出 5，並刪去其他 5 的倍數。

步驟⑤：7 是質數，圈出 7，並刪去其他 7 的倍數。

步驟⑥：11 是質數，圈出 11，並刪去其他 11 的倍數。

步驟⑦：13 是質數，圈出 13，並刪去其他 13 的倍數。

(2) 在 (1) 步驟⑥中，是否有刪去 11 的倍數？

否，11 的倍數都已經在刪去 2、3、5、7 的倍數時被刪去了。

(3) 在 (1) 步驟⑦中，是否有刪去 13 的倍數？

否，13 的倍數都已經在刪去 2、3、5、7 的倍數時被刪去了。

(4) 列出目前剩下的所有數，並檢驗它們是否為質數。

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、
31、37、41、43、47、53、59、61、67、
71、73、79、83、89、97
共 25 個，它們都是質數

100 以內的質數
宜透過問題探索
來認識，不宜以
「100 以內的質數
有幾個」來命題，
以免學生死記。

由問題探索的過程可發現，在 1 到 100 的整數中，只要保留 2、3、5、7 並刪去 2、3、5、7 的倍數後，剩下的數都是質數。

數學好好玩

摩斯密碼

N
O
P
Q
R
S
1
2
3
4
5
6

摩斯密碼 (Morse code) 是透過「·」、「—」的排列順序，來表達不同的英文字母、數字等的一種代碼。例如：我們規定質數表示「—」，合數表示「·」，那麼 34 29 51 摩斯密碼為「—·—·」，透過左邊表格我們可以知道它代表的意思是「R」。

你可以翻到書末 [5] 「摩斯密碼解鎖」，利用所學的質數、合數概念，一起挑戰解謎。

數學好好玩
摩斯密碼

數學遊戲



▲ 書末 [5]

例9

質數與合數的應用 學習內容 N-7-1

◆搭配習作
P.31 第6題1例9改寫自90
年第一次基本學
測。2此處將 1×12
與 12×1 視為同
種形狀的矩形，而
 2×6 與 6×2 等其
他長寬數據亦同。欲將 n 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成矩形，且不會剩下任何小正方形，則：(1) $n=12$ 時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？(2) $n=13$ 時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？解 矩形面積 = 長 $\times$ 寬，所以將 n 分解成兩個因數的乘積就可以判斷。(1) $n=12$

$=1 \times 12$

$=2 \times 6$

$=3 \times 4$

拼法：



2 所以可以拼出 3 種矩形。

(2) $n=13$

$=1 \times 13$

拼法：



所以只可以拼出 1 種矩形。

Hint

2×6



6×2



矩形是一樣的。

隨堂練習

在例9中，若 $n=36$ ，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

$n=36=1 \times 36=2 \times 18=3 \times 12=4 \times 9=6 \times 6$

所以可以拼出 5 種矩形

動動腦

在例9中，當 n 是質數時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？若 n 是質數，則 $n=1 \times n$

只可以拼出 1 種矩形

易 重新布題

將 231 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成長方形，且不會剩下任何小正方形，則可拼成幾種不同形狀的長方形？

答：4 種

中 重新布題

將 90 個邊長均為 1 公分的小正方形拼成一個面積為 90 平方公分的長方形，則長方形的周長最小可為多少公分？

(A) 19 (B) 38 (C) 42 (D) 46

答：(B)

● 質因數分解

如果一個整數的因數也是質數，我們稱此因數為這個整數的質因數。

例如：18 的因數有 1、2、3、6、9、18，

其中 2、3 是質數，所以 2、3 就是 18 的質因數；

其他的因數 1、6、9、18 都不是 18 的質因數。

我們曾經學過，利用短除法將一個合數分解，並寫成它的質因數連乘積。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 72} \\
 2 \overline{) 36} \\
 2 \overline{) 18} \\
 3 \overline{) 9} \\
 3
 \end{array}$$

$72=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

表示 72 是 3 個質因數 2 和 2 個質因數 3 的連乘積。

3 每一個比 1 大的整數，必可唯一分解成質因數的乘積（不管出現的次序），叫做算術基本定理。

4 教師可引導學生發現寫成標準分解式的表示法是唯一的。

事實上，每一個合數都可以分解成質因數的連乘積，這樣的過程稱為質因數分解。將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為標準分解式。

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

質因數分解 標準分解式

例10

質因數與標準分解式 學習內容 N-7-1

◆搭配習作
P.32 第7題
第8題

將 180 以標準分解式表示，並寫出所有的質因數。

解

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 180} \\
 2 \overline{) 90} \\
 3 \overline{) 45} \\
 3 \overline{) 15} \\
 5
 \end{array}$$

$180=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$=2^2 \times 3^2 \times 5$

180 的質因數為 2、3、5。

隨堂練習

將下列各數以標準分解式表示，並寫出所有的質因數。

(1) 105

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 105} \\
 5 \overline{) 35} \\
 7
 \end{array}$$

$105=3 \times 5 \times 7$

105 的質因數為 3、5、7

(2) 150

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 150} \\
 3 \overline{) 75} \\
 5 \overline{) 25} \\
 5
 \end{array}$$

$150=2 \times 3 \times 5^2$

150 的質因數為 2、3、5

易 重新布題

將下列各數以標準分解式表示，並寫出所有的質因數。

(1) 66 (2) 315

答：(1) $2 \times 3 \times 11$ ，66 的質因數為 2、3、11(2) $3^2 \times 5 \times 7$ ，315 的質因數為 3、5、7

中 重新布題

若四位數 $4 \square 24$ 可質因數分解成 $2^a \times 3^b \times 11^c$ ，且 a 、 b 、 c 均為正整數，則：

(1) 此四位數為多少？

(2) a 、 b 、 c 分別為多少？

答：(1) 4224

(2) $a=7$ 、 $b=1$ 、 $c=1$