例題 4 --

某工廠有甲、乙兩臺機器，其產量分別占總產量的 60 %與 40 %。根據過去經驗知道甲機器產品中的 4 %，乙機器產品中的 3 %為劣品。今任取一產品，且每個產品被取出的機會相同，則取出的產品為劣品的機率為何？

解 令 A_1 表示甲機器的事件，A_2 表示乙機器的事件，因此 A_1，A_2 為一個分割。

令 B 表示取到劣品的事件，它們之間的關係如圖 8 所示。

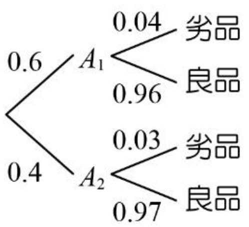

圖 7

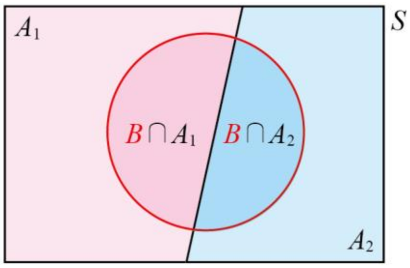

圖 8

由題意知

$$P(A_1)=0.6，P(A_2)=0.4，$$
$$P(B|A_1)=0.04，P(B|A_2)=0.03。$$

我們要求的是 $P(B)$，因此

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2) \\ &= 0.6\times 0.04+0.4\times 0.03 \\ &= 0.036。\end{aligned}$$

隨堂練習

甲外出工作，委託鄰居乙照顧一盆花。根據過去經驗知道如果不澆水，花死去的機率是 0.8；若澆水，花死去的機率是 0.1。如果甲有九成的把握乙會記得澆水，試問甲回家後，這盆花還活著的機率為何？

● 貝氏定理

在例題 4 中，我們已經知道圖 8 分割中各塊的機率了，如圖 9 所示。

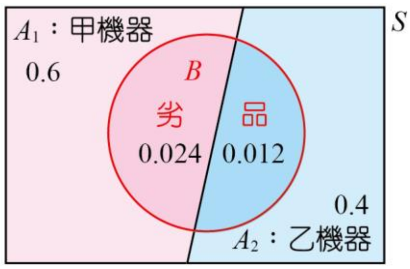

圖 9

現在，若已經知道取到的是“劣品，”試問它來自甲機器的機率是多少？顯然答案是

$$\frac{0.6\times0.04}{0.6\times0.04+0.4\times0.03}=\frac{0.024}{0.036}=\frac{2}{3},$$

我們解釋如下。

較仔細來看這個算式，因為 A_1 表示來自甲機器的事件，A_2 表示來自乙機器的事件，B 表示取到劣品的事件，我們要求的是 $P(A_1|B)$。

由條件機率的定義與加法法則，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)},$$

這就是**貝氏定理**。

※貝氏定理

設 $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割，B 為一事件，且 $P(B)>0$。則

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)},$$

其中 $i=1, 2, \cdots, n$。