

1

相似形與三角比

數學雜談

一、教學設計理念

1-1 連比

本節首先透過七年級所學的比例概念來引入連比，再接著學習三個數兩兩相比的比例求得三數的連比例，並利用連比例的概念處理生活上的實際問題，例如：三種水果含醣量的比、面積相同時邊長與高成反比。

1-2 比例線段

本節首先透過八年級所學的「兩平行線間的距離相等」來引入，接著將此性質透過探索活動，發展出「平行線所截線段成比例」。當學生有了比例線段的觀念後，反過來利用此概念判別所截的線段是否平行，接著再學習三角形兩邊中點連線的性質與應用。

1-3 相似多邊形

本節首先了解某縮放中心對點的縮放，推廣到線段的縮放，再討論平面圖形的縮放。接著以圖形的縮放引出多邊形相似的意義，最後利用三角形的縮放，導出相似三角形的判別性質。

1-4 相似三角形的應用與三角比

本節將利用前兩節所學的性質，進一步探討相似三角形的相關概念。首先討論兩個相似三角形的對應邊與對應高，及對應邊與面積的關係，接著了解直角三角形的相似關係，並將相似三角形應用在實際的測量問題上，讓學生有學以致用的機會。雖然題目的設計上有些做作，總是希望能提供學生對自然界與數學的連結，期待能因此引起思考的興趣與想要深入討論的動機。最後並利用三角形相似的概念來學習三角比，認識直角三角形邊長比值的不變性的意義與用 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 的符號來表示，並練習使用計算機來操作三角比，了解三角比與坡度的關係。

二、注意事項

1. 教導連比例時，請不要過多去強調一些繁瑣的計算問題。
2. 三角形的內、外分比在能力指標中沒有明確的規範，故教師可視學生程度適時補充。
3. 若題目有 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 時，應再註明 A 、 D 為對應點， B 、 E 為對應點， C 、 F 為對應點。
4. 牽涉到尺規作圖的題目時，可列出作法，只要求學生能畫圖即可。
5. 問答式的題目，宜採取寬鬆的評分標準。例如：問為什麼？只要能答出重點即可給分。
6. 命題時，盡量給予圖形，以方便作答。
7. 學習三角比時，只要教到認識 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 就好，並教導學生利用計算機或手機中三角比的操作。請勿多做琢磨，教導學生其它三角比，如： $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$ 。

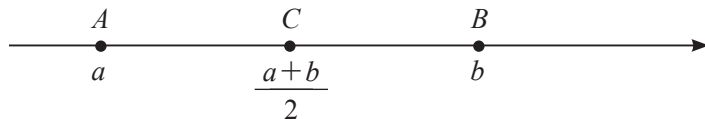
三、相關教學資源

1. 相關資源補充

因 12 年國教課綱在 P18 中提及「已從九年一貫 97 年課程綱要刪除者，以及未列入現有內容且較難者，不可在教科用書呈現。」，故以下提供補充內容參考。

① 坐標平面上線段的中點坐標

在七年級時，我們曾經學過，若 C 點為數線上 $A(a)$ 、 $B(b)$ 兩點所連線段的中點，則 C 點坐標為 $\frac{a+b}{2}$ ，如下圖。接著，要利用平行線截比例線段性質，將數線上中點坐標的概念，延伸到直角坐標平面上線段的中點坐標。



探索活動 中點坐標

已知坐標平面上 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，若 C 點為 $\overline{AB}$ 的中點，要如何求 C 點的坐標呢？

(1) 如圖一，過 A 、 C 、 B 三點分別作 x 軸的垂線，

交 x 軸於 D 、 F 、 E 三點，則：

① D 點的坐標為何？ E 點的坐標為何？

② F 點的坐標為何？

① $D(x_1, 0)$ ，② $\because \overline{AD} \parallel \overline{CF} \parallel \overline{BE}$ ，且 C 為 $\overline{AB}$ 的中點，
 $E(x_2, 0)$ 。 $\therefore F$ 為 $\overline{DE}$ 的中點，故 $F(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ 。

(2) 如圖二，過 A 、 C 、 B 三點分別作 y 軸的垂線，

交 y 軸於 P 、 R 、 Q 三點，則：

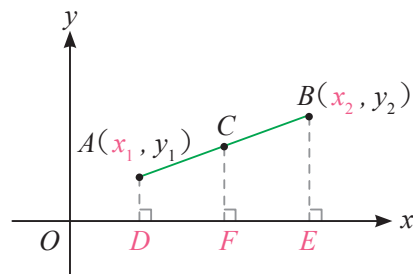
① P 點的坐標為何？ Q 點的坐標為何？

② R 點的坐標為何？

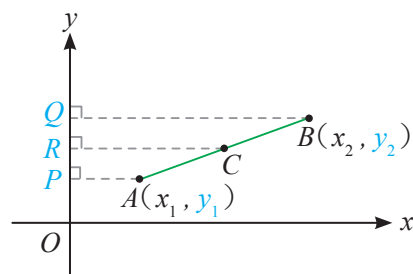
① $P(0, y_1)$ ，② $\because \overline{AP} \parallel \overline{CR} \parallel \overline{BQ}$ ，且 C 為 $\overline{AB}$ 的中點，
 $Q(0, y_2)$ 。 $\therefore R$ 為 $\overline{PQ}$ 的中點，故 $R(0, \frac{y_1+y_2}{2})$ 。

(3) 根據(1)及(2)的結果， C 點的坐標為何？

$C(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$



圖一



圖二

坐標平面上線段的中點坐標

若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 為坐標平面上的相異兩點，

則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ 。

隨堂練習

已知 $A(-6, 1)$ 、 $B(6, -5)$ 為坐標平面上的兩點，求 $\overline{AB}$ 的中點坐標。

$\overline{AB}$ 的中點坐標為 $(\frac{-6+6}{2}, \frac{1-5}{2}) = (0, -2)$ 。

例1 中點坐標

已知 $A(-1, -3)$ 、 $B(x, y)$ 為坐標平面上的相異兩點， $C(2, -5)$ 為 $\overline{AB}$ 的中點，求 B 點的坐標。

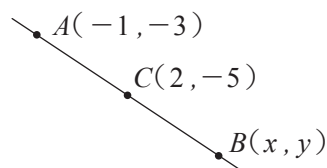
解 $\because A(-1, -3)$ 、 $B(x, y)$ ， C 點為 $\overline{AB}$ 的中點，

$\therefore C$ 點的坐標為 $(\frac{-1+x}{2}, \frac{-3+y}{2})$ ，

故 $\frac{-1+x}{2} = 2$ ， $\frac{-3+y}{2} = -5$ ，

得 $x = 5$ ， $y = -7$ ，

故 B 點的坐標為 $(5, -7)$ 。



隨堂練習

已知 $A(4, 6)$ 、 $B(x, y)$ 為坐標平面上的相異兩點， $C(1, 3)$ 為 $\overline{AB}$ 的中點，求 B 點的坐標。

$\because C$ 為 $\overline{AB}$ 的中點， $\therefore C$ 點坐標為 $(\frac{4+x}{2}, \frac{6+y}{2}) = (1, 3)$ ，

得 $x = -2$ ， $y = 0$ ，

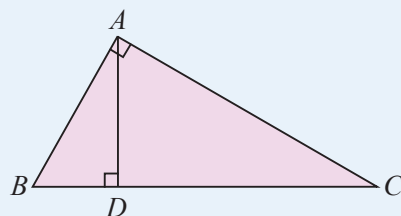
故 B 點坐標為 $(-2, 0)$ 。

② 直角三角形母子相似性質

例2 母子相似性質

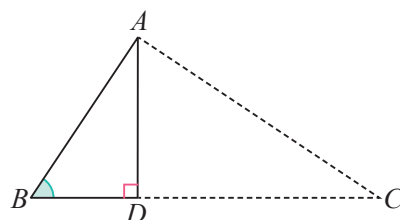
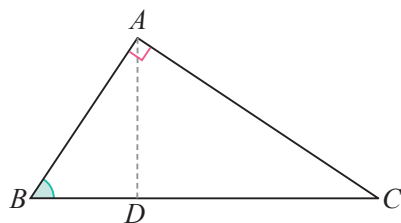
如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，回答下列問題：

- (1) 說明 $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ 。
- (2) 說明 $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。
- (3) 若 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BD}=2$ ，求 $\overline{BC}$ 。



說明

- (1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBA$ 中，
 $\because \angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle B$ ，
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (AA 相似性質)。
- (2) $\because \triangle ABC \sim \triangle DBA$ ，
 $\therefore \overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{AB}$ ，
 即 $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。
- (3) $4^2 = 2 \times \overline{BC}$ ， $\therefore \overline{BC} = 8$ 。



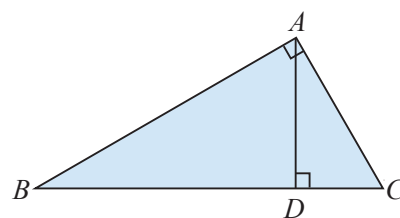
隨堂練習

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，回答下列問題：

- (1) 說明 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ 。
- (2) 說明 $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。
- (3) 若 $\overline{AC}=6$ ， $\overline{BC}=12$ ，求 $\overline{CD}$ 。

- (1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DAC$ 中，
 $\because \angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle C = \angle C$ ，
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC$ (AA 相似性質)。

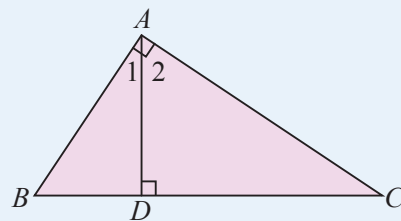
- (2) $\because \triangle ABC \sim \triangle DAC$ ，
 $\therefore \overline{AC} : \overline{CD} = \overline{CB} : \overline{AC}$ ，
 即 $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。
- (3) $6^2 = \overline{CD} \times 12$ ， $\therefore \overline{CD} = 3$ 。



例2 母子相似性質

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，回答下列問題：

- (1) 說明 $\triangle ADB \sim \triangle CDA$ 。
- (2) 說明 $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。



說明

$$\left. \begin{array}{l} (1) \angle 1 + \angle B = 90^\circ \quad (\overline{AD} \perp \overline{BC}) \\ \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ \quad (\angle BAC = 90^\circ) \end{array} \right\} \angle B = \angle 2$$

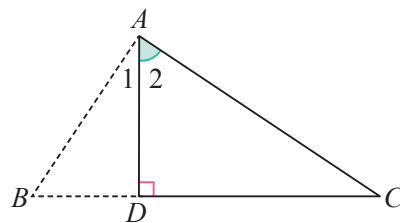
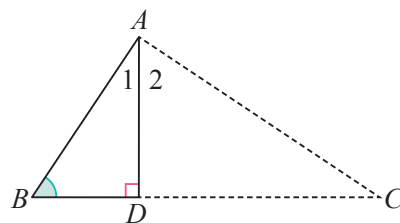
在 $\triangle ADB$ 與 $\triangle CDA$ 中，

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ, \angle B = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle CDA \text{ (AA 相似性質)}。$$

$$(2) \because \triangle ADB \sim \triangle CDA, \therefore \overline{AD} : \overline{DC} = \overline{DB} : \overline{AD},$$

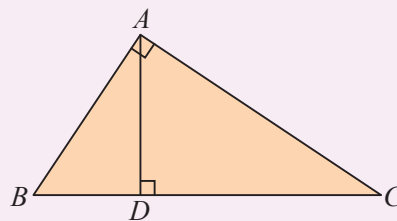
$$\text{即 } \overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}。$$



直角三角形母子相似性質

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，則：

- (1) $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。
- (2) $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。
- (3) $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。

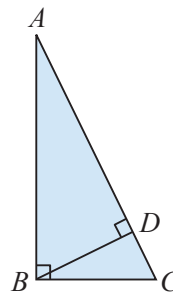


隨堂練習

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 於 D 點，若 $\overline{CD}=3$ ， $\overline{AD}=12$ ，求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BD}$ 。

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC} = 12 \times (12 + 3) = 180, \overline{AB} = 6\sqrt{5}。$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC} \times \overline{DA} = 3 \times 12 = 36, \overline{BD} = 6。$$



2. 連比－微笑單車 (YouBike) (補充戶外議題)

如下圖，腳踏車的鏈條把前齒輪和後齒輪鏈接在一起，當我們踩動踏板使前齒輪轉動時，就會由鍊條帶動後齒輪跟著轉動，進而後齒輪的輪軸就會帶著後輪及前輪一起轉動往前行進。

微笑單車後輪的輪胎直徑是 26 吋（1 吋約等於 2.54 公分），每轉動 1 圈大約可以行走約 207 公分（ $26 \times 2.54 \times 3.14 \div 2 \approx 207$ ；圓周率以 3.14 計算）。它的前齒輪有 38 齒，經由手把的變速器轉到 1 號、2 號、3 號後達到三段變速，此時後齒輪會轉換為 26 齒、19 齒及 14 齒。如果用變速 1 號，前輪與後輪齒輪的數目比為 $38:26$ （ $\frac{38}{26} \approx 1.46$ ）。當經由踏板使得前齒輪每轉動 1 圈 38 個齒輪時，後齒輪也跟著轉動 38 個齒輪可以轉動 1.46 圈，此時後齒輪的輪軸就會帶動後輪與前輪轉動約 1.46 圈，進而往前行走的距離約 302 公分（ $207 \times 1.46 \approx 302$ ）。



隨堂練習

1. 由上文可知，當變速器在 1 號、2 號、3 號時，後輪齒數分別是 26、19、14。若踩前輪踏板 1 圈，後齒輪可轉圈數的比是 $1:a:b$ ，求 a 、 b 的值。

（四捨五入取至小數點後第二位）

$$\frac{38}{26} : \frac{38}{19} : \frac{38}{14} = 1 : a : b,$$

$$\text{故 } a = \frac{26}{19} \approx 1.37, b = \frac{26}{14} = \frac{13}{7} \approx 1.86。$$

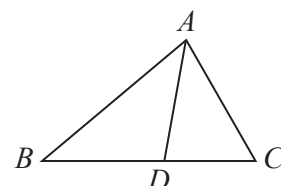
2. 承 1.，用變速 1 號，踩前輪踏板 1 圈，後輪約轉 1.46 圈，可以行走 302 公分，若用變速 3 號，前輪與後輪齒輪的數目比踩前輪踏板 1 圈，後齒輪跟著轉動，可以行走的距離是多少公分？（四捨五入取至小數點後第二位）

$$302 \times 1.86 \approx 561.72 \text{ (公分)}$$

3. 三角形的內分比

依課綱規定，三角形的內分比不可用重點框呈現，但在高中階段出現次數非常頻繁，故教師可依據學生程度給予適當的補充，以下提供兩種內分比的證法。

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，求證 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 。



證明1 (1) 過 D 點分別作 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ 。

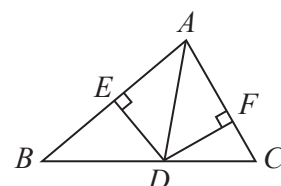
$\because \overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線

$\therefore \overline{DE} = \overline{DF}$ 。 ← 角平分線上任一點，到此角的兩邊距離相等

$$\begin{aligned} (2) \triangle ABD \text{ 面積} : \triangle ACD \text{ 面積} \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DE} \right) : \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DF} \right) \\ &= \overline{AB} : \overline{AC} \quad (\because \overline{DE} = \overline{DF}) \end{aligned}$$

又 $\triangle ABD$ 面積 : $\triangle ACD$ 面積 = $\overline{BD} : \overline{DC}$ (同高)，

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}。$$



證明2 (1) 過 C 點作 $\overline{DA}$ 的平行線交 $\overline{BA}$ 於 E 點，

$$\therefore \overline{CE} \parallel \overline{DA}，$$

則 $\angle BAD = \angle AEC$ (同位角相等)，

$\angle DAC = \angle ACE$ (內錯角相等)，

又 $\angle BAD = \angle DAC$ ($\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線)，

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE，$$

故 $\overline{AE} = \overline{AC}$ 。

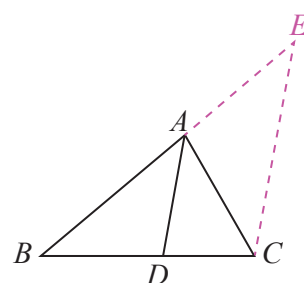
(2) 在 $\triangle BCE$ 中，

$$\because \overline{AD} \parallel \overline{CE}，$$

$$\therefore \overline{BA} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{DC} \quad (\text{平行線截比例線段性質})，$$

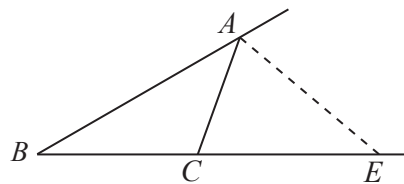
又 $\overline{AE} = \overline{AC}$ ，

$$\text{故 } \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}。$$



4. 三角形的外分比

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 的外角平分線交 $\overline{BC}$ 的延長線於 E 點，求證 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$ 。



證明 (1) 作 $\overline{CF} \parallel \overline{AE}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F 點，

則 $\angle 1 = \angle 3$ (同位角)，

$\angle 2 = \angle 4$ (內錯角)，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ($\overline{AE}$ 為 $\angle A$ 的外角平分線)，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

故 $\overline{AF} = \overline{AC}$ ，

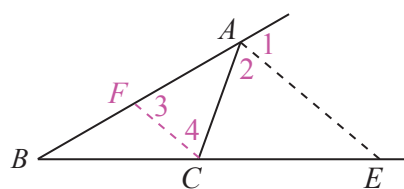
(2) 在 $\triangle ABE$ 中，

$\therefore \overline{CF} \parallel \overline{AE}$ ，

$\therefore \overline{AB} : \overline{AF} = \overline{EB} : \overline{EC}$ (平行線截比例線段性質)，

又 $\overline{AF} = \overline{AC}$ ，

故 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$ 。



5. 平行截比例線段逆性質的補充說明

$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，如果 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ}$ 會與 $\overline{BC}$ 平行。

說明

過 B 點作 $\overline{BC'} \parallel \overline{PQ}$ ，

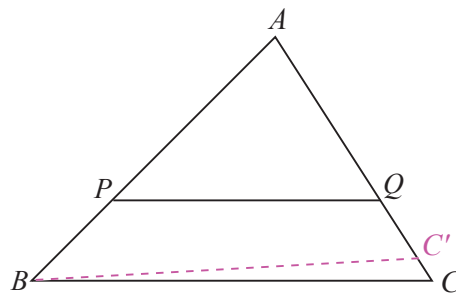
$\therefore \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC'}$ (平行線截比例線段性質)，

又 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ (已知)，

$\therefore \overline{AQ} : \overline{QC'} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，

得 $\overline{QC'} = \overline{QC}$ ，即 C' 點與 C 點重合，

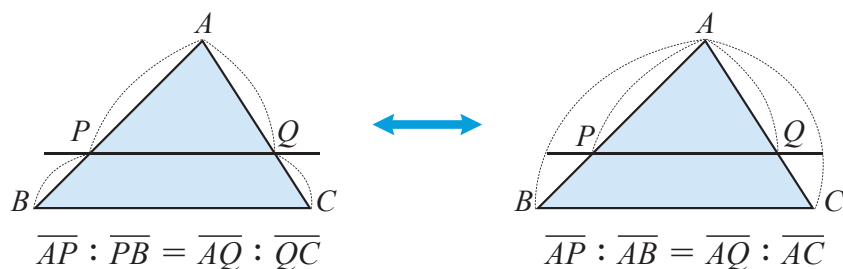
故 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BC'}$ 重合，也就是 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



仿照上面的說明，也可以得到「若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 」或「若 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 」。

6. 以比例的參數式，介紹線段比的性質

有關下圖線段比的性質($\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$)，可以比例的參數式解釋如下：



設 $\overline{AP} = a$ ， $\overline{PB} = b$ ， $\overline{AQ} = c$ ， $\overline{QC} = d$ ，所以 $\overline{AB} = a + b$ ， $\overline{AC} = c + d$ 。

因此要說明上面的雙向關係，同義於要說明下面的雙向關係：

$$a : b = c : d \longleftrightarrow a : (a + b) = c : (c + d) \text{ (或 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \text{)}$$

$$(1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

說明 設 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = r$ ，

所以 $a = br$ ， $c = dr$ ，

$$\frac{a}{a+b} = \frac{br}{br+b} = \frac{br}{b(r+1)} = \frac{r}{r+1} \dots\dots ①$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{dr}{dr+d} = \frac{dr}{d(r+1)} = \frac{r}{r+1} \dots\dots ②$$

由①、②式可知 $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ 。

$$(2) \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

說明 由 $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ，

可知 $a(c+d) = c(a+b)$ ，

所以 $ac + ad = ac + bc$

$$ad = bc$$

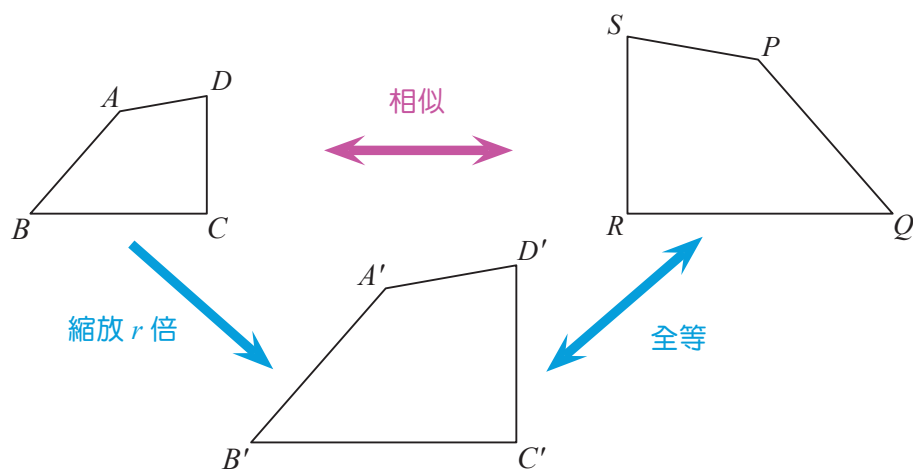
$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

故 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

7. 相似多邊形的另一種定義

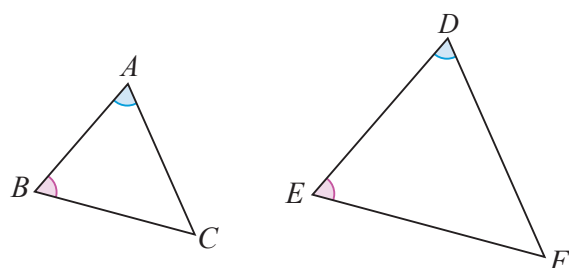
兩個多邊形，若其中一個多邊形經過縮放後，和另一個多邊形全等，則稱這兩個多邊形相似。以符號「 $\sim$ 」表示它們的相似關係，讀作「相似於」，此時，這兩個多邊形的對應角相等且對應邊成比例。

例如：如下圖，將四邊形 $ABCD$ 縮放 r 倍後，得到四邊形 $A'B'C'D'$ ，且四邊形 $A'B'C'D'$ 與四邊形 $PQRS$ 全等，因此四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ 。此時， $\angle A = \angle P$ 、 $\angle B = \angle Q$ 、 $\angle C = \angle R$ 、 $\angle D = \angle S$ （對應角相等），且 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{DA}} = r$ （對應邊成比例）。



8. AAA 相似性質

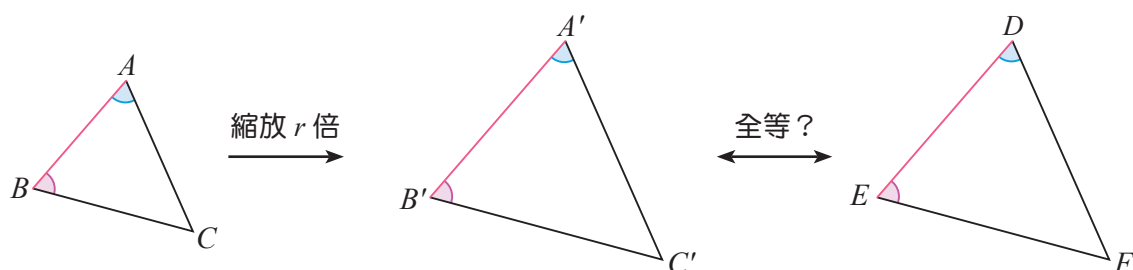
如下圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似呢？



如果它們相似，表示
 $\triangle ABC$ 經過縮放後會
與 $\triangle DEF$ 全等。



設 $\overline{DE} = r\overline{AB}$ ，將 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍後，得到 $\triangle A'B'C'$ ，如下圖。此時， $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ ， $\angle A' = \angle A$ ， $\angle B' = \angle B$ 。



因為

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} &= r\overline{AB} \\ \overline{DE} &= r\overline{AB}\end{aligned}$$



$$\overline{A'B'} = \overline{DE}$$

$$\begin{aligned}\angle A' &= \angle A \\ \angle D &= \angle A\end{aligned}$$



$$\angle A' = \angle D$$

$$\begin{aligned}\angle B' &= \angle B \\ \angle E &= \angle B\end{aligned}$$

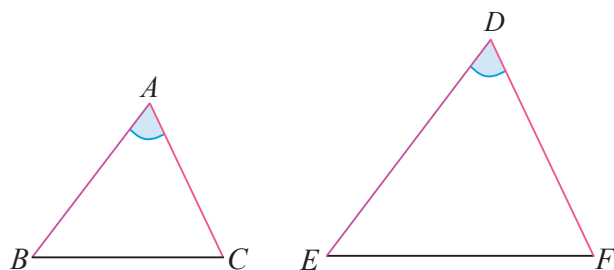


$$\angle B' = \angle E$$

所以 $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$ (ASA 全等性質)。這表示 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍後和 $\triangle DEF$ 全等，即 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

9. SAS 相似性質

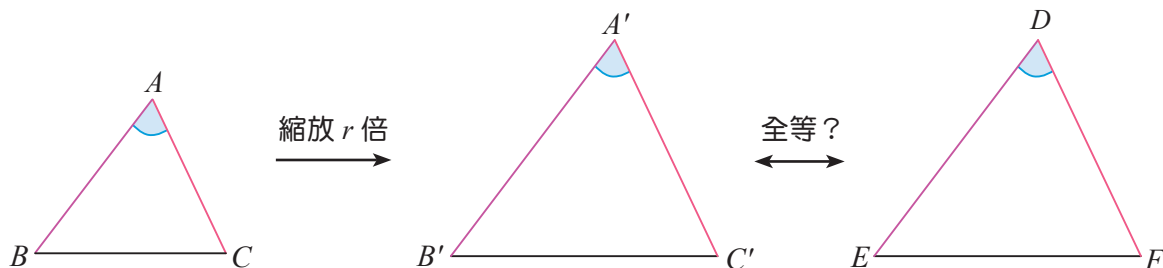
如下圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\angle A = \angle D$ ， $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = r$ ，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似呢？



如果它們相似，表示 $\triangle ABC$ 經過縮放後會與 $\triangle DEF$ 全等。



將 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍得到 $\triangle A'B'C'$ ，如下圖。此時， $\angle A' = \angle A$ ， $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ ， $\overline{A'C'} = r\overline{AC}$ 。



因為

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} &= r\overline{AB} \\ \overline{DE} &= r\overline{AB}\end{aligned}$$



$$\overline{A'B'} = \overline{DE}$$

$$\begin{aligned}\overline{A'C'} &= r\overline{AC} \\ \overline{DF} &= r\overline{AC}\end{aligned}$$



$$\overline{A'C'} = \overline{DF}$$

$$\begin{aligned}\angle A' &= \angle A \\ \angle D &= \angle A\end{aligned}$$

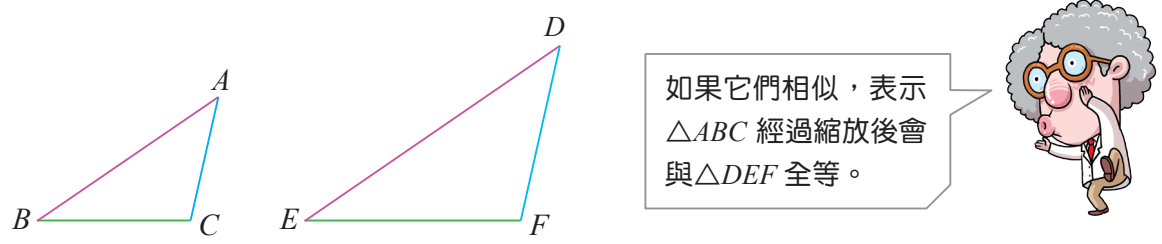


$$\angle A' = \angle D$$

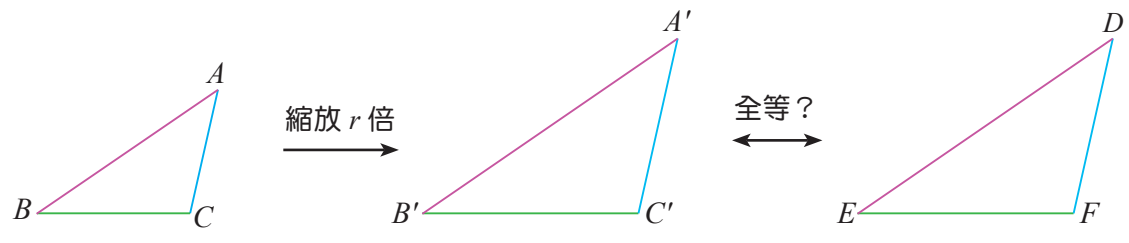
所以 $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$ (SAS 全等性質)。這表示 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍後和 $\triangle DEF$ 全等，即 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

10. SSS 相似性質

如下圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = r$ ，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似呢？



將 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍得到 $\triangle A'B'C'$ ，如下圖。此時， $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ ， $\overline{B'C'} = r\overline{BC}$ ， $\overline{A'C'} = r\overline{AC}$ 。



因為

$$\begin{array}{l} \overline{A'B'} = r\overline{AB} \\ \overline{DE} = r\overline{AB} \end{array}$$

$$\overline{A'B'} = \overline{DE}$$

$$\begin{array}{l} \overline{B'C'} = r\overline{BC} \\ \overline{EF} = r\overline{BC} \end{array}$$

$$\overline{B'C'} = \overline{EF}$$

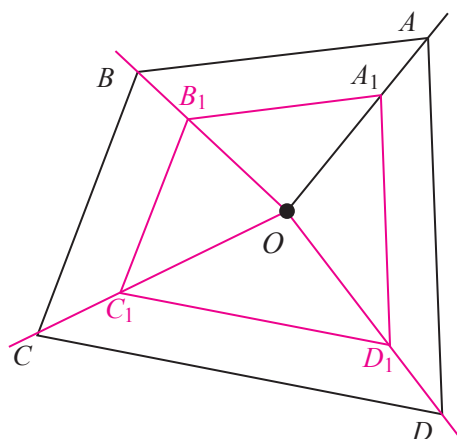
$$\begin{array}{l} \overline{A'C'} = r\overline{AC} \\ \overline{DF} = r\overline{AC} \end{array}$$

$$\overline{A'C'} = \overline{DF}$$

所以 $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$ （SSS 全等性質）。這表示 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍後和 $\triangle DEF$ 全等，即 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

11. 以相似中心畫相似多邊形

如圖，已知四邊形 $ABCD$ 中， A_1 在 $\overline{OA}$ 上，且 $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{2}{3}$ ，依下面作法完成圖形，並回答問題。



- 作法：(1)作 $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$ ，且交 $\overline{OB}$ 於 B_1 。
 (2)作 $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{BC}$ ，且交 $\overline{OC}$ 於 C_1 。
 (3)作 $\overline{C_1D_1} \parallel \overline{CD}$ ，且交 $\overline{OD}$ 於 D_1 。
 (4)連接 $\overline{A_1D_1}$ ，得四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 。

請問在完成圖中，

- (1) $\triangle \underline{OA_1B_1} \sim \triangle OAB$ （根據 AA 相似性質），所以 $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \underline{\frac{2}{3}}$ 。
 (2) $\triangle \underline{OB_1C_1} \sim \triangle OBC$ （根據 AA 相似性質），所以 $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}} = \underline{\frac{2}{3}}$ 。
 (3) $\triangle \underline{OC_1D_1} \sim \triangle OCD$ （根據 AA 相似性質），所以 $\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OD_1}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}} = \underline{\frac{2}{3}}$ 。
 (4) $\triangle \underline{OA_1D_1} \sim \triangle OAD$ （根據 AA 相似性質），所以 $\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD_1}}{\overline{OD}} = \underline{\frac{2}{3}}$ 。

- (5)由(1)~(4)的結果，可知四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 與四邊形 $ABCD$ 的對應邊有何關係？

對應邊成比例

- (6)四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 與四邊形 $ABCD$ 的內角是否對應相等？

是

- (7)由(5)、(6)的結果，可知四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ $\sim$ 四邊形 $ABCD$ 。

12 三角比的相關資源補充

(1) 銳角三角比的定義

在直角 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$ ，對 $\angle A$ 而言， $\overline{BC}$ 稱作 $\angle A$ 的對邊， $\overline{AC}$ 稱作 $\angle A$ 的鄰邊， $\overline{AB}$ 稱作斜邊。

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin A, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正弦。}$$

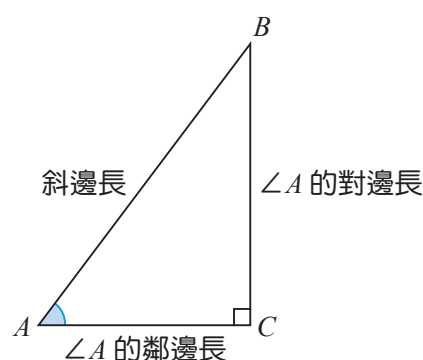
$$\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos A, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘弦。}$$

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan A, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正切。}$$

$$\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\angle A \text{ 的對邊長}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \cot A, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘切。}$$

$$\frac{\text{斜邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \sec A, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的正割。}$$

$$\frac{\text{斜邊長}}{\angle A \text{ 的對邊長}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \csc A, \text{ 稱作 } \angle A \text{ 的餘割。}$$



(2) 特殊角的三角比

三角比 θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

(3) 三角函數的基本關係

倒數關係	平方關係	商數關係
$\sin \theta \cdot \csc \theta = 1$ $\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$ $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

(4) 三角形面積公式

若 a 、 b 和 c 分別代表 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊長，

則 $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$ 。

(5) 正弦定理

若 a 、 b 和 c 分別表示 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊長，而 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為

R ，則 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。

(6) 餘弦定理

若 a 、 b 和 c 分別表示 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊長，則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(7) 海龍公式

$\triangle ABC$ 中，若三邊長為 a 、 b 和 c 且 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，

則 $\triangle ABC$ 的面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

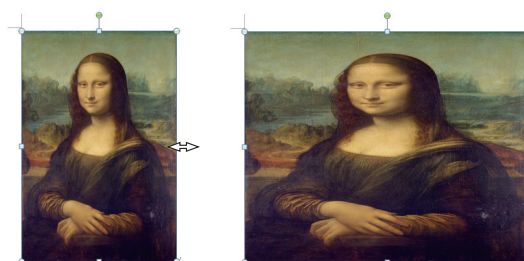
13. 文書處理圖形的縮放

在電腦的文書軟體（如 *WORD*）中，點選圖片後，此時外框有八個控點，當圖片的長寬比鎖定時，按住四個頂點的控點往外拖曳，所得到縮放後的圖片長寬比例會與原來的圖片相同（如圖一）。

但是，拖曳左右中間的控點時，僅會對橫向進行縮放，所得的圖形就不會與原來相似（如圖二）。



圖一



圖二

◎先備知識

7下 第3章	N-7-9	比與比例式 ：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應已有意義之比值為例。
8下 3-3 第4章	S-8-3	平行 ：平行的意義與符號；平行線截角性質；兩平行線間的距離處處相等。
	S-8-4	全等圖形 ：全等圖形的意義（兩圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等（反之亦然）。
	S-8-5	三角形的全等性質 ：三角形的全等判定（ SAS 、 SSS 、 ASA 、 AAS 、 RHS ）；全等符號（ $\cong$ ）。
	S-8-9	平行四邊形的基本性質 ：關於平行四邊形的內角、邊、對角線等的幾何性質。
	S-8-10	正方形、長方形、箏形的基本性質 ：長方形的對角線等長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。
	S-8-11	梯形的基本性質 ：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形；梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。

◎本章學習內容解析

1-1	N-9-1	連比 ：連比的記錄；連比推理；連比例式；及其基本運算與相關應用問題；涉及複雜數值時使用計算機協助計算。
1-2	S-9-3	平行線截比例線段 ：連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊（其長度等於第三邊的一半）；平行線截比例線段性質；利用截線段成比例判定兩直線平行；平行線截比例線段性質的應用。
1-3	S-9-1	相似形 ：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊成比例。
	S-9-2	三角形的相似性質 ：三角形的相似判定（ AA 、 SAS 、 SSS ）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（ $\sim$ ）。
1-4	S-9-2	三角形的相似性質 ：三角形的相似判定（ AA 、 SAS 、 SSS ）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（ $\sim$ ）。
	S-9-4	相似直角三角形邊長比值的不變性 ：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30° ， 60° ， 90° 其邊長比記錄為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」；三內角為 45° ， 45° ， 90° 其邊長比記錄為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。

1

相似形與三角比

• 7 下第 3 章
比例

→ 1-1 連比

1. 連比例
2. 連比例式的應用

• 高中 1 年級
三角比

• 8 下第 4 章
平行與四邊形

→ 1-2 比例線段

1. 等高三角形
2. 平行線截比例線段
3. 利用比例線段判別平行
4. 三角形兩邊中點連線段性質

• 8 下 3-3
三角形的全等性質
• 9 上 1-2
比例線段

→ 1-3 相似多邊形

1. 圖形的縮放
2. 相似多邊形
3. 三角形的相似性質

• 高中 2 年級
平面上的線性變換
平面幾何在生活情
境的應用

1-4 相似三角形的應用
與三角比

1. 相似三角形的比例關係
2. 簡易測量
3. 三角比

• 高中 1 年級
三角比
三角測量



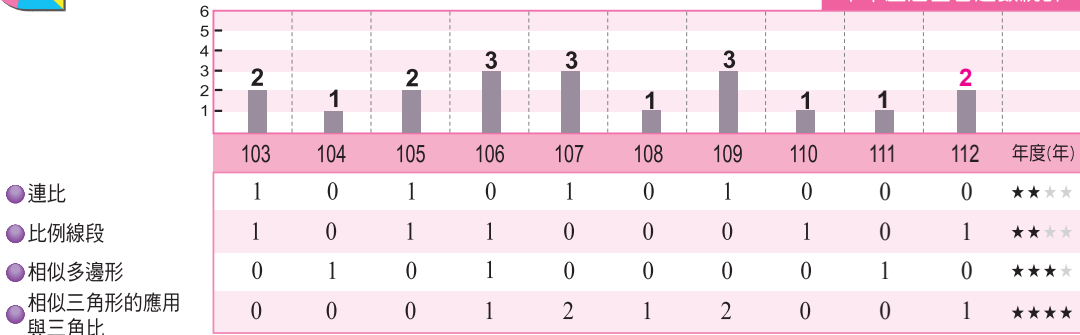
七下曾學過比例，八下曾學過兩平行線間的距離處處相等，本章將接著介紹連比例、平行線截比例線段性質，並利用這些性質來判斷兩直線是否平行。

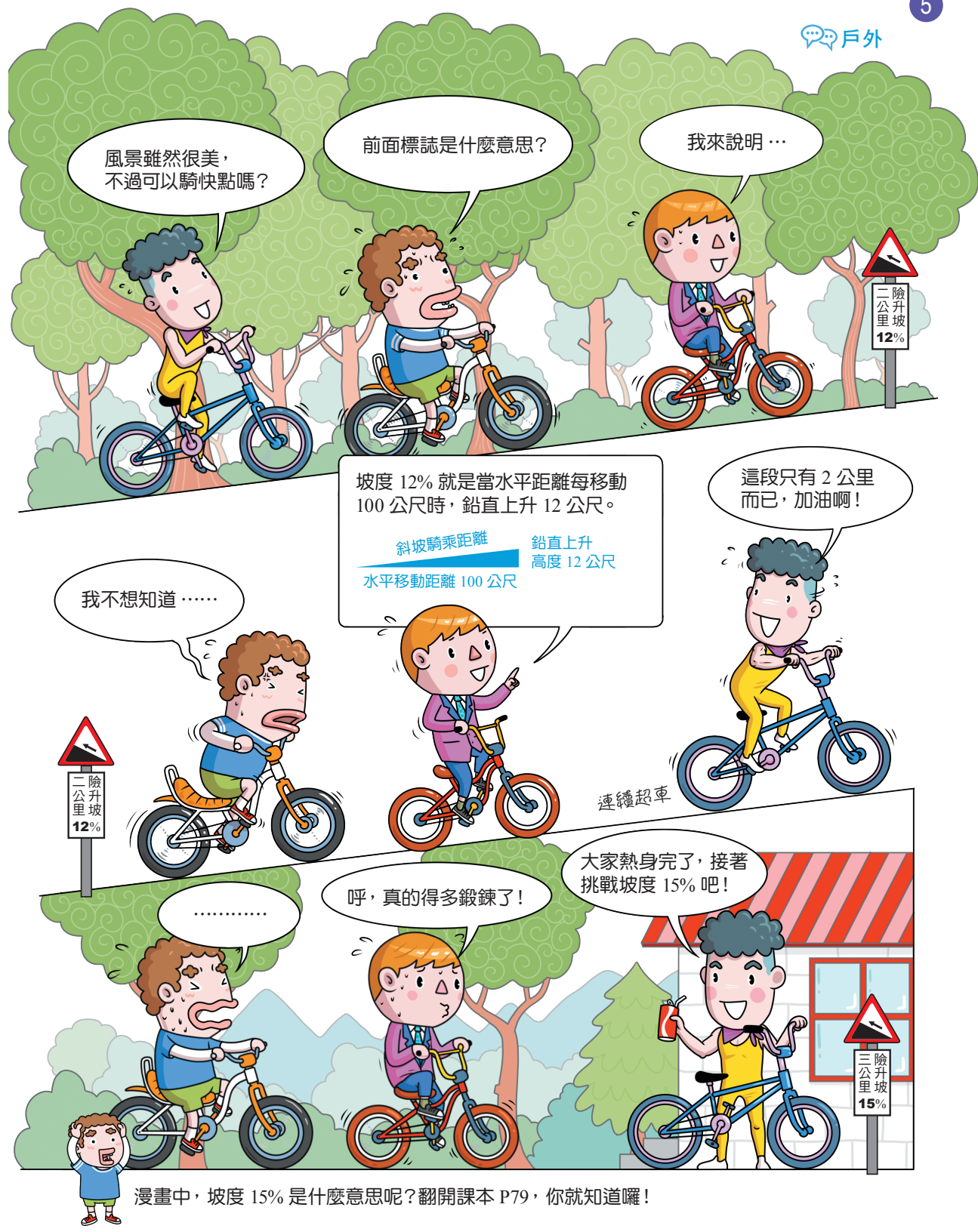
另外，本章將延續八下全等三角形的概念，來認識多邊形的相似及三角形的相似性質，進一步學習相似形的應用、特殊三角形的邊長比、坡度與直角三角形的三角比。



考觀測站－歷屆基會趨勢

本章歷屆基會題數統計







學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。



回顧 ① 比例式

7 下第 3 章

若 $a:b=7:2$ ，設 $a=7r$ ， $b=2r$ ， $r \neq 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{則 } (a+2b):b &= (7r+2 \times 2r):2r \\ &= 11r:2r \\ &= 11:2 \end{aligned}$$



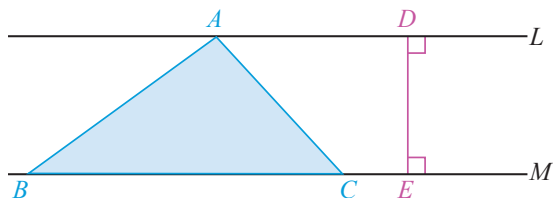
課前練習

若 $a:b=3:2$ ，則 $(2a+3b):(a-b) = \underline{12:1}$ 。

回顧 ② 平行線間距離的應用

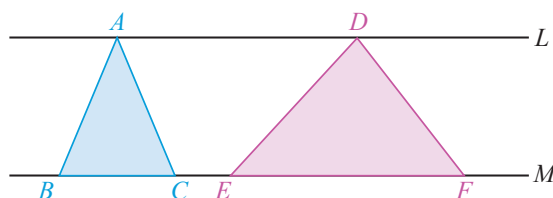
8 下第 4 章

如圖， $L \parallel M$ ， $\overline{DE}$ 垂直 L 和 M ，
若 $\overline{DE}=6$ ，則 $\triangle ABC$ 的高是 6。



課前練習

如圖， $L \parallel M$ ，且 $\overline{BC}=5$ ， $\overline{EF}=10$ ，
若 $\triangle ABC$ 的面積為 17，則
 $\triangle DEF$ 的面積為 34。



解答：11:12:1 234



溫故學習 搭配學習前哨站

1. 已知 $x:y=4:5$ ，且 $3x-2y=10$ ，則 $x = \underline{20}$ ， $y = \underline{25}$ 。

2. 若 $\frac{3x-y}{2x+3y} = \frac{3}{4}$ ，則 $\frac{2x+y}{4x-2y} = \underline{\frac{4}{5}}$ 。

1-1 連比

① 連比例

可搭配附件 2 進行更多連比練習

對應學習內容 N-9-1

洛基利用假期學習做好吃的蜜汁爌肉，從網路查到的食譜如下：

12年國教

- 12年國教課綱將連比移到九年級教學。



材料

- ① 五花肉 600 公克 (1 斤)
- ② 「完美配方」調味料：
冰糖 1 匙，醬油 2 匙，
米酒 3 匙
- ③ 水 600 c.c.
- ④ 薑、蒜、蔥白一些

作法

- ① 熱油鍋，倒入帶皮的五花肉 1 斤，煎、炒至肉塊表面微焦。
- ② 熱油鍋，爆炒薑、蒜及蔥白，炒至表面微焦。
- ③ 倒進調味料、水與五花肉慢慢熬煮，轉小火將肉燉煮 1~1.5 小時，就會有一鍋美味的蜜汁爌肉。

教學眉批

- 本節是利用食譜中，每份材料所需的份量來作為連比例的引入。
- 教師可以多舉實際生活連比例的例子，例如：綜合維生素、油漆的調色、盈餘的分配等。

在蜜汁爌肉的材料中，「完美配方」調味料為冰糖 1 匙，醬油 2 匙，米酒 3 匙，其比例為 1 : 2 : 3。像這樣三個數或至少三個以上的數連續的比，稱為**連比**。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文

1. 若 $x : y : z = 2 : 5 : 8$ ，則 $x : z =$ 1 : 4。(化為最簡整數比)
2. 洛基特製咖啡，其比例為水 5 匙，咖啡粉 2 匙，奶精 1 匙，則水與咖啡粉的比為 5 : 2。

如果洛基想做更多相同味道的蜜汁爌肉，就可以使用如下表中調味料的比例。

五花肉	冰糖	醬油	米酒	冰糖：醬油：米酒
600 公克	1 匙	2 匙	3 匙	1 : 2 : 3
1200 公克	2 匙	4 匙	6 匙	2 : 4 : 6
2400 公克	4 匙	8 匙	12 匙	4 : 8 : 12

在上表中可知，製作不同重量的爌肉，所需調味料的連比 1 : 2 : 3、2 : 4 : 6、4 : 8 : 12 都是一樣的，也就是說將連比乘以或除以相同的數，所得的連比還是相同的。

Q

教學眉批

連比例的運算性質中， m 是不為 0 的實數。在給學生練習時，題目數據盡量只給整數、分數或小數，請勿涉及無理數或根號。

📁

連比例的運算性質

若 $a、b、c$ 三數的比記為 $a:b:c$ ，且 $m \neq 0$ ，則

(1) $a:b:c = ma:mb:mc$

(2) $a:b:c = \frac{a}{m} : \frac{b}{m} : \frac{c}{m}$

若 $a、b、c$ 的最大公因數是 1，則 $a:b:c$ 稱為最簡整數比。

隨堂練習

將下列各小題化為最簡整數比。

- (1) 12 : 18 : 30。

2 : 3 : 5
- (2) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ 。

6 : 4 : 3

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配隨堂

- 將下列各小題化為最簡整數比。
- (1) 42 : 63 : 84。
- (2) 0.5 : 0.25 : 0.01。
- (3) $\frac{4}{3} : \frac{5}{4} : \frac{6}{5}$ 。
- (1) 2 : 3 : 4 (2) 50 : 25 : 1 (3) 80 : 75 : 72

在「完美配方」中，冰糖、醬油和米酒的比例為 $1:2:3$ ，我們可以得到：

- ① 冰糖、醬油的比例是 $1:2$ ，
- ② 醬油、米酒的比例是 $2:3$ 。

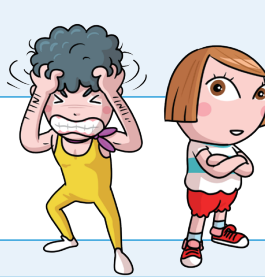
如果我們分別知道「冰糖、醬油的比例」與「醬油、米酒的比例」，也可以求得冰糖、醬油和米酒三者的比例，以下面的例子說明。



某天洛基和妙麗為了參加全國燻肉大賽，與師傅討論如何調整醬料的配方。

我最近試出一個更強的銷魂配方，現在傳授給你們！

然而，比賽當天……



糟糕！我只記得冰糖、醬油的比例是 $3:7$ 。

我只記得醬油、米酒的比例是 $7:5$ 。

教學眉批

- 初學連比時，先不要教學四個數的連比例，例如 $x:y:z:w$ 。也先不要出現含分數、小數的連比例。
- 進行連比例教學時，先設計 x 、 y 、 z 的比例中有一項的數值相同，讓學生了解連比例之合併。例如 $x:y=3:2$ ， $x:z=3:4$ ，其中 x 的數字都是 3。

洛基和妙麗兩人分別只記得其中兩個調味料的比例，想求得這三個調味料的連比，就要從相同的調味料著手。這兩個比中，相同的調味料醬油所對應的數都是 7。設冰糖要 x 匙，醬油要 y 匙，米酒要 z 匙，根據上述的內容可知

$$\begin{array}{l} x : y = 3 : 7 \\ y : z = 7 : 5 \end{array}$$

因此，可以直接求出 $x:y:z=3:7:5$ 。像這樣的式子，稱為**連比例式**。

也就是說，只知道 $x:y$ 、 $y:z$ 與 $x:z$ 這三個比中的其中任兩個比，要求這三個文字符號的連比時，就必須先從相同文字符號所對應的數開始，如果對應的數相同，就可以直接求這三個文字符號的連比。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文

1. 已知 $y:z=4:5$ ， $x:z=2:5$ ，則 $x:y:z=$ $2:4:5$ 。
2. 已知 $y:x=3:7$ ， $y:z=3:4$ ，則 $x:y:z=$ $7:3:4$ 。

隨堂練習



某便利商店想更換招牌，已知正面招牌的長與寬分別是 x 公分與 y 公分，且 $x : y = 11 : 4$ ，側面招牌的寬與長分別是 y 公分與 z 公分，且 $y : z = 4 : 9$ ，則 $x : y : z = ?$

因為 $x : y = 11 : 4$ ， $y : z = 4 : 9$

$$\begin{array}{lcl} \text{所以 } x : y & = & 11 : 4 \\ & & y : z = 4 : 9 \end{array}$$

因此 $x : y : z = 11 : 4 : 9$ 。

教學眉批

- 隨堂的目的是讓學生觀察這兩個比例式中有哪一個文字相同，及所對應的數是多少。

教學眉批

- 剛開始學習由兩組比求三數的連比，請勿用小數、分數或龐大的數字。

如果相同文字符號所對應的數不同時，例如 $x : y = 3 : 4$ ， $y : z = 6 : 5$ ，此時求 $x : y : z$ 的連比，可將 $x : y$ 與 $y : z$ 分別乘以適當的數，使得 y 所對應的數相同，再求這三個數的連比，我們以下面的例子來說明。

已知 $x : y = 3 : 4$ ， $y : z = 6 : 5$ ，

$$\begin{array}{lcl} \text{所以 } x : y & = & 3 : 4 \\ & & y : z = 6 : 5 \end{array}$$

在前面的說明中，相同的文字符號是 y ，為了使對應的 y 值相同，可以乘以對方的數，使得對應的 y 值相同。

$$\begin{array}{lclcl} \text{所以 } x : y & = & 3 : 4 & \xrightarrow{\text{同時乘以 } 6} & = (3 \times 6) : (4 \times 6) = 18 : 24 \\ y : z & = & 6 : 5 & \xrightarrow{\text{同時乘以 } 4} & = (6 \times 4) : (5 \times 4) = 24 : 20 \end{array}$$

↑
對應的 y 值相同

因此可以得到 $x : y : z = 18 : 24 : 20 = 9 : 12 : 10$ 。

通常會約分成最簡整數比。

會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

- 已知 $a : b = 5 : 7$ ， $b : c = 6 : 5$ ，則 $a : b : c = \underline{30 : 42 : 35}$ 。
- 已知 $x : y = 2 : 9$ ， $x : z = 3 : 4$ ，則 $x : y : z = \underline{6 : 27 : 8}$ 。

一般而言，相同文字符號所對應的數不同時，除了可以乘以對方的數，使得對應的 y 值相同，也可以選取兩數的最小公倍數，當作相同文字符號所對應的數，我們以下的例子來說明。

例1 連比例的運算

搭配習作 P4 基礎題 1(1)

已知 $x:y=3:4$ ， $y:z=6:7$ ，求 $x:y:z$ 。

解 因為 $[4, 6] = 12$ ，

$$\text{所以 } x:y = 3:4 = (3 \times 3):(4 \times 3) = 9:12$$

$$y:z = 6:7 = (6 \times 2):(7 \times 2) = 12:14$$

因此 $x:y:z = 9:12:14$ 。

我們也可用直式來求
三數的連比，如右：

x	:	y	:	z
3	:	4	:	
		6	:	7
(3×3)	:	(4×3)	:	
		(6×2)	:	(7×2)
9	:	12	:	14

教學眉批

■ 當兩個連比，其相同文字符號所對應的數不同時，教師可透過擴比的關係，讓學生了解，要讓這兩個數相同，可先求出這兩個數的最小公倍數或是兩數的乘積，再透過擴比的性質得出。

測 基會試題

◆ 97 基測 I 第 2 題

隨堂練習

自評 P21 第 1 題 (1)

1. 已知 $x:y=5:3$ ， $y:z=4:5$ ，
求 $x:y:z$ 。

x	:	y	:	z
5	:	3	:	
		4	:	5
20	:	12	:	15

因此 $x:y:z=20:12:15$ 。

2. 已知 $x:y=10:3$ ， $x:z=6:5$ ，
求 $x:y:z$ 。

x	:	y	:	z
10	:	3	:	
6	:		:	5
30	:	9	:	25

因此 $x:y:z=30:9:25$ 。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配例 1

1. 已知 $x:y=7:3$ ， $x:z=5:4$ ，則：

(1) $x:y=35:\underline{15}$ 。

(2) $x:z=35:\underline{28}$ 。

(3) $x:y:z=\underline{35:15:28}$ 。

2. 已知 $x:y=5:6$ ， $y:z=4:3$ ，則：

(1) $x:y=\underline{10}:12$ 。

(2) $y:z=12:\underline{9}$ 。

(3) $x:y:z=\underline{10:12:9}$ 。

在求連比的過程中，如果碰到分數或小數，可以先化為最簡整數比，再來求其連比。

教學眉批

- 利用兩個比例求三數的連比例中，請勿涉及無理數或根號，避免增加難度與學生學習的困擾。

例2 連比例的運算

搭配習作 P4 基礎題 1(2) 自評 P21 第 1 題(2)

1. 已知 $x:y=5:6$ ， $x:z=4:\frac{1}{3}$ ，求 $x:y:z$ 。

2. 已知 $x:y=0.2:0.3$ ， $y:z=12:5$ ，求 $x:y:z$ 。

解 1. $x:z=(4\times 3):(\frac{1}{3}\times 3)=12:1$

x	:	y	:	z
5	:	6	:	
12	:		:	1
(5×12)	:	(6×12)	:	
(12×5)	:		:	(1×5)
60	:	72	:	5

因此 $x:y:z=60:72:5$ 。

2. $x:y=(0.2\times 10):(0.3\times 10)=2:3$

x	:	y	:	z
2	:	3	:	
	:	12	:	5
(2×4)	:	(3×4)	:	
	:	12	:	5
8	:	12	:	5

因此 $x:y:z=8:12:5$ 。

隨堂練習

1. 已知 $x:y=3:2$ ， $y:z=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$ ，求 $x:y:z$ 。

$$y:z=(\frac{1}{4}\times 20):(\frac{1}{5}\times 20)=5:4$$

x	:	y	:	z
3	:	2	:	
	:	5	:	4
15	:	10	:	8

因此 $x:y:z=15:10:8$ 。

2. 已知 $x:z=1.4:1.6$ ， $y:z=5:2$ ，求 $x:y:z$ 。

$$x:z=(1.4\times 10):(1.6\times 10)=14:16=7:8$$

x	:	y	:	z
7	:		:	8
	:	5	:	2
7	:	20	:	8

因此 $x:y:z=7:20:8$ 。

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 2

1. 已知 $x:y=3:5$ ， $y:z=2:\frac{5}{3}$ ，則 $x:y:z=$ 18:30:25。

2. 已知 $a:c=0.9:1.6$ ， $b:c=2:1$ ，則 $a:b:c=$ 9:32:16。

例3 連比例的運算

自評 P21 第 2 題、P22 第 5 題(1)

教學眉批

已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $5x=4y$ ， $3x=5z$ ，求 $x:y:z$ 。

解 由 $5x=4y$ ，可得 $x:y=4:5$ ，

由 $3x=5z$ ，可得 $x:z=5:3$ ，

因此 $x:y:z=20:25:12$ 。

x	:	y	:	z
4	:	5		
5			:	3
(4×5)	:	(5×5)		
(5×4)			:	(3×4)
20	:	25	:	12

- 可搭配附件 2 的連比牌卡進行教學，或請學生利用附件自行練習。
- 例題 3：初學階段建議請先不要出現小數、難計算的數或根號。
- 國中階段建議不出現四個數連比的計算。

隨堂練習

搭配習作 P4 基礎題 2

1. 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $x-2y=0$ ， $4y=3z$ ，求 $x:y:z$ 。

由 $x-2y=0$ ，得 $x=2y$ ， $x:y=2:1$ ，

由 $4y=3z$ ，得 $y:z=3:4$ ，

因此 $x:y:z=6:3:4$ 。

x	:	y	:	z
2	:	1		
		3	:	4
6	:	3	:	4

2. 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}$ ， $4x=3z$ ，求 $x:y:z$ 。

由 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}$ ，得 $x:y=4:5$ ，

由 $4x=3z$ ，得 $x:z=3:4$ ，

因此 $x:y:z=12:15:16$ 。

x	:	y	:	z
4	:	5		
3			:	4
12	:	15	:	16

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 3

1. 已知 $x:y:z$ 皆不等於 0，且 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$ ， $4y-3z=0$ ，則 $x:y:z=$ 9:6:8。

2. 已知 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $2x=3y$ ， $5y-2z=3y+4z$ ，則 $x:y:z=$ 9:6:2。

測 基會試題

◆ 95 基測 II 第 24 題

② 連比例式的應用

洛基班上在園遊會共賺了 7000 元，該班決定將這些錢按 2:3:5 的比例分別捐給家扶基金會、流浪動物之家及學校急難救助基金，則這些捐款分別為多少元？

我們可以運用連比來計算，方法如下：

設家扶基金會、流浪動物之家及學校急難救助基金所得的捐款分別為 x 元、 y 元、 z 元，得 $x:y:z=2:3:5$ ，

$$\left. \begin{array}{l} \text{由 } x:y=2:3, \text{ 可得 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \\ \text{由 } y:z=3:5, \text{ 可得 } \frac{y}{3}=\frac{z}{5} \end{array} \right\} \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$$

$$\text{令 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=r, r \neq 0, \text{ 可得 } x=2r, y=3r, z=5r。$$

$$2r+3r+5r=7000, 10r=7000, r=700。$$

因此，家扶基金會所得的捐款為 $2 \times 700 = 1400$ (元)、

流浪動物之家所得的捐款為 $3 \times 700 = 2100$ (元)、

學校急難救助基金所得的捐款為 $5 \times 700 = 3500$ (元)。

Q 教學眉批

■ 比例的應用問題，教師可多出題目讓學生練習，因為學生對於應用問題的思考比較陌生。

連比例式的應用

已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，則下列三者有相同的意義。

$$(1) x:y:z=a:b:c \quad (2) \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \quad (3) x=ar, y=br, z=cr (r \neq 0)$$

隨堂練習

自評 P21 第 3 題

若九年乙班在園遊會共賺了 6000 元，該班決定將這些錢按 4:3:3 的比例分別捐給家扶基金會、流浪動物之家及學校急難救助基金，則家扶基金會所得的捐款為多少元？

設家扶基金會、流浪動物之家及學校急難救助基金所得的捐款分別為 $4r$ 、 $3r$ 、 $3r$ 元， $r \neq 0$ 。

$$4r+3r+3r=6000, 10r=6000, r=600,$$

所以家扶基金會所得的捐款為 $4 \times 600 = 2400$ (元)。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配隨堂

■ 已知三角形三邊長的比例為 3:4:5，若此三角形的周長為 60 公分，則此三角形的三邊長分別為多少公分？

15 公分，20 公分，25 公分

例4 連比例式的運算

搭配習作 P5 基礎題 3

如果 $x:y:z=2:3:4$ ，且 $x+y+2z=39$ ，求 x 、 y 、 z 的值。

教學眉批

■ 連比例的計算類型非常多，教師儘可能各種類型都介紹，或以回家作業的方式，讓學生多加練習。

測 基會試題

◆ 100 聯測第 13 題

解 由 $x:y:z=2:3:4$ ，設 $x=2r$ ， $y=3r$ ， $z=4r$ ， $r \neq 0$ 。

$$\therefore x+y+2z=39$$

$$\therefore 2r+3r+2 \times 4r=39$$

$$13r=39, r=3$$

$$\text{因此 } x=2 \times 3=6,$$

$$y=3 \times 3=9,$$

$$z=4 \times 3=12。$$

隨堂練習

如果 $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}$ ，求 $\frac{x+2y}{3y+2z}$ 的值。

設 $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}=r$ ， $r \neq 0$ ，則 $x=4r$ ， $y=3r$ ， $z=8r$ 。

$$\frac{x+2y}{3y+2z}=\frac{4r+2 \times 3r}{3 \times 3r+2 \times 8r}=\frac{10r}{25r}=\frac{2}{5}。$$

自評 P22 第 4 題

教學眉批

■ $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}$ 的式子表示的是 $\frac{x}{4}$ 、 $\frac{y}{3}$ 與 $\frac{z}{8}$ 三個數兩兩相等。

Thinking

若 $x:y:z=2:3:4$ ，則 $3y=2z$ 是否成立？

設 $x=2r$ ， $y=3r$ ， $z=4r$ ， $r \neq 0$ 。

則 $3y=3 \times 3r=9r$ ， $2z=2 \times 4r=8r$ ，

所以 $9r \neq 8r$ ，故 $3y=2z$ 不成立。

考 會考觀測站 精熟演練題 搭配例 4

1. 若 $2x=3y=4z$ ，且 $5x+4y+3z=220$ ，則 $x=$ 24。

2. 若 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ ，且 $x+y-z=6$ ，則 $y=$ 12。

測 基會試題

- ◆ 98 基測 I 第 10 題
- ◆ 109 會考第 16 題

例 5 生活中的連比例式

搭配習作 P5 基礎題 4 自評 P22 第 5 題(2)

製作桂圓麵包的材料中，老麵糰、新麵糰與桂圓的重量比是 $6:17:2$ 。如果將老麵糰、新麵糰與桂圓揉在一起後，想要做成總重量為 750 公克的桂圓麵包，則所含的桂圓重量是多少公克？



解一 設老麵糰有 $6r$ 公克，

新麵糰有 $17r$ 公克，

桂圓有 $2r$ 公克， $r \neq 0$ 。

依題意可列出 $6r + 17r + 2r = 750$

$$25r = 750$$

$$r = 30$$

所以桂圓重量是 $2 \times 30 = 60$ (公克)。

解二 因為老麵糰、新麵糰與桂圓的重量比是 $6:17:2$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以桂圓重量} &= 750 \times \frac{2}{6+17+2} \\ &= 60 \text{ (公克)。} \end{aligned}$$

隨堂練習

所謂的「732 存錢法」指的是將收入分成 12 份，其中 7 份用於日常的必要花費，3 份用於投資理財基金，其餘 2 份用於長期儲蓄資本。已知妙麗的爸爸某月收入為 72000 元，若爸爸依照「732 存錢法」，則該月會將多少錢作為投資理財基金？

設爸爸該月的日常必要花費、投資理財基金及長期儲蓄資本分別為

$7r$ 元、 $3r$ 元、 $2r$ 元， $r \neq 0$ ，

依題意可列出 $7r + 3r + 2r = 72000$

$$12r = 72000$$

$$r = 6000$$

所以爸爸該月的投資理財基金為 $3 \times 6000 = 18000$ (元)。

考

109 會考第 16 題 搭配例 5

- (C) 中秋節時阿柚製作的廣式月餅、蛋黃酥、鳳梨酥的數量比為 $2:1:3$ ，其中只有製作廣式月餅和蛋黃酥時使用鹹蛋黃。若阿柚製作每個廣式月餅時使用 2 顆鹹蛋黃，製作每個蛋黃酥時使用 1 顆鹹蛋黃，且總共使用 120 顆鹹蛋黃，則他製作了幾個鳳梨酥？
- (A) 45 (B) 60 (C) 72 (D) 120

例6 生活中的連比例式

有甲、乙、丙三臺機器，甲、乙兩臺機器每天的產量比是 $5:4$ ，乙、丙兩臺機器每天的產量比是 $6:5$ ，回答下列問題：

- (1) 甲、乙、丙三臺機器每天的產量比是多少？
- (2) 已知 A 工廠有甲、乙兩臺機器， B 工廠有乙、丙兩臺機器， C 工廠有甲、丙兩臺機器，在機器皆正常運作的情形下，這三間工廠每天的產量比是多少？

解 (1) 設甲、乙、丙三臺機器每天的產量分別是 x 、 y 、 z ，

因此，這三臺機器每天的產量比是 $15:12:10$ 。

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 5 & : & 4 & & \\ & & 6 & : & 5 \\ \hline 15 & : & 12 & : & 10 \end{array}$$

(2) $\because$ 甲、乙、丙三臺機器每天的產量比是 $15:12:10$ ，

$\therefore$ 設 $x=15r$ ， $y=12r$ ， $z=10r$ ， $r \neq 0$ 。

依題意可列出 $(x+y):(y+z):(x+z) = (15r+12r):(12r+10r):(15r+10r)$

$$= 27r:22r:25r$$

$$= 27:22:25$$

即 A 、 B 、 C 這三間工廠每天的產量比是 $27:22:25$ 。

教學眉批

- 利用連比例式的運算性質來處理生活情境問題，教師可以引導學生從問題中假設 x 、 y 、 z ，接著求出 $x:y:z$ 的比，進而處理實際問題的比。
- 這類生活情境問題比較少見，在設計問題時，要以能容易理解的生活情境讓學生練習。

隨堂練習

已知金典糕餅店每塊太陽餅與鳳梨酥的售價比是 $7:8$ ，每塊鳳梨酥與蛋黃酥的售價比是 $4:5$ 。若店裡將製作 A 、 B 兩種禮盒，其中 A 禮盒內有太陽餅與鳳梨酥各 3 塊， B 禮盒內有太陽餅、鳳梨酥與蛋黃酥各 2 塊。若不計包裝盒的價錢，則 A 、 B 兩種禮盒的售價比是多少？

設太陽餅、鳳梨酥與蛋黃酥的售價分別是 x 元、 y 元、 z 元，

因此，太陽餅、鳳梨酥與蛋黃酥的售價比為 $7:8:10$ ，

故可設 $x=7r$ ， $y=8r$ ， $z=10r$ ， $r \neq 0$ ，

依題意可列出 $(3x+3y):(2x+2y+2z)$

$$= (21r+24r):(14r+16r+20r)$$

$$= 45r:50r = 9:10$$

即 A 、 B 這兩種禮盒的售價比是 $9:10$ 。

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 7 & : & 8 & & \\ & & 4 & : & 5 \\ \hline 7 & : & 8 & : & 10 \end{array}$$

考 會考觀測站 加強演練題 搭配例 6

- 有 A 、 B 、 C 三種機器人，已知 A 、 B 兩種機器人每天工作量的比是 $5:9$ ； B 、 C 兩種機器人每天工作量的比是 $6:7$ 。若甲工廠三種機器人各買一個，乙工廠只買 A 、 B 兩種機器人各一個，在操作完全正常的情形下，甲、乙兩工廠每天工作量的比是多少？

$$7:4$$

教學眉批

- 例題 7 為生活上的應用題型。
- 提供下列水果所含醣量參考：水果每天建議攝取兩份，每份含醣量 15 公克。
一份水果量
= 1 個柑橘
= 1 顆柳丁
= 1 顆奇異果
= $1\frac{1}{2}$ 片愛文芒果
= 2 個綠棗子
= $\frac{1}{2}$ 根香蕉
= 9 個櫻桃
= 9 個荔枝
= 16 粒小草莓
= 13 顆葡萄

例 7 連比例的應用

搭配習作 P6 基礎題 5

自評 P23 第 6 題

已知 2 個蓮霧、9 顆荔枝及 13 顆葡萄三者的含醣量相等，則 1 個蓮霧、1 顆荔枝和 1 顆葡萄所含醣量的比是多少？



解 設 1 個蓮霧、1 顆荔枝和 1 顆葡萄所含醣量

分別是 x 單位、 y 單位、 z 單位。

依題意可以列式得 $2x = 9y = 13z$ ，

由 $2x = 9y$ ，得 $x : y = 9 : 2$ ；

由 $9y = 13z$ ，得 $y : z = 13 : 9$ 。

因此 $x : y : z = 117 : 26 : 18$ ，

所以 1 個蓮霧、1 顆荔枝和 1 顆葡萄所含醣量的比是 $117 : 26 : 18$ 。

$$\begin{array}{rcl} x & : & y : z \\ 9 & : & 2 \\ \hline & & 13 : 9 \\ 117 & : & 26 : 18 \end{array}$$

隨堂練習

博士買了一些相同大小輕質的混凝土磚，並將它們堆成一個如右圖的實心大正立方體。已知一個混凝土磚的長、寬、高分別是 x 公分、 y 公分與 z 公分，求 $x : y : z$ 。

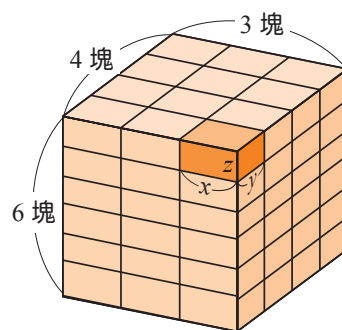
觀察右圖可以列式得 $3x = 4y = 6z$ ，

由 $3x = 4y$ ，得 $x : y = 4 : 3$ ；

由 $4y = 6z$ ，得 $y : z = 6 : 4 = 3 : 2$

因此 $x : y : z = 4 : 3 : 2$ 。

$$\begin{array}{rcl} x & : & y : z \\ 4 & : & 3 \\ \hline & & 3 : 2 \\ 4 & : & 3 : 2 \end{array}$$



考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 7

- 設 a 、 b 、 c 均為正數，且 $3a = 6b = 2c$ ，則 $a : b : c =$ $2 : 1 : 3$ 。

對於型如 $ax=by=cz$ 的式子，求 $x:y:z$ 的連比時也可以用下面的方法來處理。

教學眉批

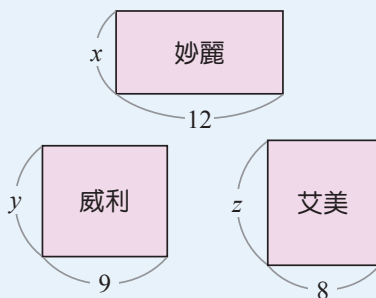
■ 教師可視學生程度，引導學生發現：

- (1) 面積相等的長方形，長與寬的乘積為定值，則寬的比等於對應長的倒數比。
- (2) 面積相等的三角形，邊與對應高的乘積為定值，則高的比等於對應邊的倒數比。
- (3) 面積相等的平行四邊形，高的比等於底邊的倒數比。

例8 連比例的幾何問題

搭配習作 P6 基礎題 6

如圖，如果妙麗、威利、艾美打算畫出面積相等的長方形，已知三人分別以 12 公分、9 公分與 8 公分作為長方形的長，則妙麗、威利、艾美三人所畫的長方形中，寬的連比為何？



解 因為所畫的三個長方形面積相等，

所以可設三人所畫的長方形面積皆為 A 平方公分，

則 $12x=9y=8z=A$ ，

可得 $12x=A$ ， $9y=A$ ， $8z=A$ ，因此 $x=\frac{A}{12}$ ， $y=\frac{A}{9}$ ， $z=\frac{A}{8}$ ，

$$\begin{aligned} x:y:z &= \frac{A}{12} : \frac{A}{9} : \frac{A}{8} \\ &= \frac{1}{12} : \frac{1}{9} : \frac{1}{8} \quad \left[A \neq 0, \text{同除以 } A \right] \\ &= 6:8:9 \quad \left[(12, 9, 8)=72, \text{同乘以 } 72 \right] \end{aligned}$$

隨堂練習

自評 P23 第 7 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{AC}=6$ ，

如果此三角形三邊的對應高依序分別為 x 、 y 、 z ，

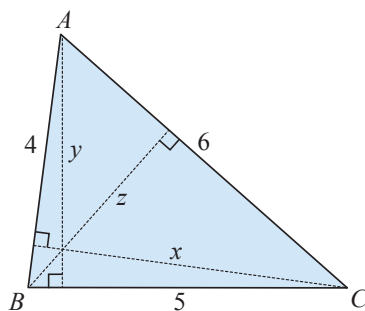
求 $x:y:z$ 。

設三角形的面積為 A ，則 $\frac{4x}{2}=\frac{5y}{2}=\frac{6z}{2}=A$ ，

可得 $\frac{4x}{2}=A$ ， $\frac{5y}{2}=A$ ， $\frac{6z}{2}=A$ ，

因此 $x=\frac{2A}{4}$ ， $y=\frac{2A}{5}$ ， $z=\frac{2A}{6}$

$x:y:z=\frac{2A}{4}:\frac{2A}{5}:\frac{2A}{6}=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}=15:12:10$



會考觀測站 基礎演練題 搭配例 8

1. 有甲、乙、丙三個三角形，面積都是 60 平方公分，且其對應底邊比為 $2:3:4$ ，則此三個三角形的對應高的比為 $6:4:3$ 。
2. 甲、乙、丙三個面積相等的平行四邊形，若其底邊的比是 $3:4:6$ ，則甲、乙、丙三個平行四邊形對應高的比為 $4:3:2$ 。



重點回顧



數問速答

- 配合小節重點回顧，教師可提供QRCode給學生，進行線上同步測驗與複習。



- 上述題目可參考本頁下方數問速答。

1 連比

a 比 b 比 c 記作 $a:b:c$ ，稱為 a 、 b 、 c 的連比。

2 連比例的運算性質

若 a 、 b 、 c 三數的比記為 $a:b:c$ ，且 $m \neq 0$ ，則

$$(1) a:b:c = ma:mb:mc$$

$$(2) a:b:c = \frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}$$

3 求連比

由 $x:y$ 、 $y:z$ 、 $x:z$ 中的任意兩個比，可求出 $x:y:z$ 。

例 (1) 若相同文字符號所對應的數相同。(2) 若相同文字符號所對應的數不同。

$$x:y=2:3, y:z=3:5,$$

$$x:z=3:4, y:z=7:6,$$

$$\begin{array}{ccc} x & : & y & : & z \\ 2 & : & 3 & & \\ & & 3 & : & 5 \\ \hline 2 & : & 3 & : & 5 \end{array}$$

可求出連比例式

$$x:y:z=2:3:5。$$

$$\begin{array}{ccc} x & : & y & : & z \\ 3 & : & & & 4 \\ & & 7 & : & 6 \\ \hline 9 & : & 14 & : & 12 \end{array} \leftarrow (4, 6)=12$$

可求出連比例式

$$x:y:z=9:14:12。$$

4 連比例式的應用

已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，則下列三者有相同的意義。

$$(1) x:y:z=a:b:c$$

$$(2) \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

$$(3) x=ar, y=br, z=cr (r \neq 0)$$

例 如果 $x:y:z=2:3:5$ ，

$$\text{則 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5},$$

$$\text{或 } x=2r, y=3r, z=5r (r \neq 0)。$$



數問速答

- 判別下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。

(×) (1) $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$ 的最簡整數比為 $3:4:5$ 。

(○) (2) 若 $x:y=3:4$ ， $y:z=4:5$ ，則 $x:y:z=3:4:5$ 。

(×) (3) 已知 $2a=3b=4c$ ，則 $a:b:c=2:3:4$ 。



1 求下列各題的連比：

(1) $x:y=2:3$, $y:z=4:5$, 則 $x:y:z=$ $8:12:15$ 。

$$\begin{array}{rcl}
 x & : & y & : & z \\
 2 & : & 3 & & \\
 & & 4 & : & 5 \\
 \hline
 8 & : & 12 & : & 15
 \end{array}$$

(2) $y:z=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$, $x:z=\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$, 則 $x:y:z=$ $18:10:15$ 。

$$y:z=2:3, x:z=6:5$$

$$\begin{array}{rcl}
 x & : & y & : & z \\
 & & 2 & : & 3 \\
 6 & & & : & 5 \\
 \hline
 18 & : & 10 & : & 15
 \end{array}$$

課 P11 隨堂

測 基會試題

- ◆ 100 基測 II 第 22 題
- ◆ 103 會考第 19 題
- ◆ 105 會考第 24 題
- ◆ 107 會考第 23 題

課 P12 例 2 (1)

2 已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，且 $2a=3b$, $4b=5c$ ，求 $a:b:c$ 。

課 P13 例 3

由 $2a=3b$ ，得 $a:b=3:2$ ，由 $4b=5c$ ，得 $b:c=5:4$ ，因此 $a:b:c=15:10:8$ 。

$$\begin{array}{rcl}
 a & : & b & : & c \\
 3 & : & 2 & & \\
 & & 5 & : & 4 \\
 \hline
 15 & : & 10 & : & 8
 \end{array}$$

答：15:10:8。

3 有一塊由金、銀、銅組成的合金，其中所含金、銀的重量比為 3:2，金、銅的重量比為 1:2。如果此合金所含的銅與銀重量相差 36 公克，則此塊合金的重量是多少公克？

課 P14 隨堂

設此合金含有金 x 公克，銀 y 公克，銅 z 公克，即 $x:y=3:2$, $x:z=1:2$ ，因此 $x:y:z=3:2:6$ 。設 $x=3r$, $y=2r$, $z=6r$, $r \neq 0$ 。依題意可知 $6r-2r=36$, $r=9$ 即此合金的重量為 $3r+2r+6r=11r=99$ (公克)。

$$\begin{array}{rcl}
 x & : & y & : & z \\
 3 & : & 2 & & \\
 1 & & & : & 2 \\
 \hline
 3 & : & 2 & : & 6
 \end{array}$$

答：99 公克。



考 會考觀測站

基礎演練題

搭配自評第 1、2 題

1. 求下列各題的連比：

(1) $x:y=3:4$, $x:z=1:2$ ，求 $x:y:z$ 。 $3:4:6$ (2) $x:y=\frac{1}{6}:\frac{1}{5}$, $y:z=\frac{1}{3}:\frac{1}{8}$ ，求 $x:y:z$ 。 $20:24:9$ 2. 已知 a 、 b 、 c 皆不等於 0，且 $3a=5b$, $4a=6c$ ，則 $a:b:c=$ $15:9:10$ 。

- 4 如果 $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3}$ ，且 $x + 3y - 4z = 33$ ，求 z 的值。

課 P15 隨堂

由 $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3}$ ，得 $x : y : z = 5 : 6 : 3$ 。

設 $x = 5r$ ， $y = 6r$ ， $z = 3r$ ， $r \neq 0$ 。

$$x + 3y - 4z = 33$$

$$5r + 18r - 12r = 33, 11r = 33, r = 3$$

$$\text{則 } z = 3r = 3 \times 3 = 9。$$

答：9。

教學眉批

第 5 題：

$$x : 2y = 9 : 10,$$

$$x : y = 9 : 5,$$

這個概念有少數程度較差的學生無法理解，教師宜多舉例讓學生練習。

- 5 已知 $\triangle ABC$ 三個內角分別為 $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ，且 $x : 2y = 9 : 10$ ， $4y : 5z = 1 : 1$ ，回答下列問題：

課 P13 例 3

- (1) 求 $x : y : z$ 。

由 $x : 2y = 9 : 10$ ，得 $x : y = 9 : 5$ 。

由 $4y : 5z = 1 : 1$ ，得 $y : z = 5 : 4$ 。

所以 $x : y : z = 9 : 5 : 4$ 。

- (2) 求 $\angle A$ 的度數。

課 P16 例 5

設 $x = 9r$ ， $y = 5r$ ， $z = 4r$ ， $r \neq 0$ 。

$$9r + 5r + 4r = 180, 18r = 180, r = 10,$$

$$\text{所以 } x = 9r = 9 \times 10 = 90,$$

$$\text{因此 } \angle A = 90^\circ。$$

答：(1) $9 : 5 : 4$ (2) 90° 。



會考觀測站 精熟演練題 搭配自評第 5 題

- 已知 $a : b : c = 4 : 5 : 6$ ，回答下列問題：

(1) 求 $4a : 3b : 2c$ 。(化為最簡整數比) $16 : 15 : 12$

(2) 求 $ab : bc : ca$ 。(化為最簡整數比) $10 : 15 : 12$

(3) 若 $a + 5b - 4c = 20$ ，求 b 的值。 20

- 6 已知米飯 50 公克、餃子皮 30 公克及蘿蔔糕 70 公克三者所含的熱量相等，
則 1 公克米飯、1 公克餃子皮和 1 公克蘿蔔糕所含熱量的比是多少？ 課 P18 例 7

設 1 公克米飯、1 公克餃子皮和 1 公克蘿蔔糕所含的熱量

分別是 x 單位、 y 單位、 z 單位。

依題意可以列式得 $50x = 30y = 70z$ ，

由 $50x = 30y$ ，得 $x : y = 3 : 5$ ；

由 $30y = 70z$ ，得 $y : z = 7 : 3$ 。

因此 $x : y : z = 21 : 35 : 15$ ，

所以 1 公克米飯、1 公克餃子皮和 1 公克蘿蔔糕所含熱量的比是 $21 : 35 : 15$ 。

答：21 : 35 : 15。

$$\begin{array}{rcl} x & : & y & : & z \\ 3 & : & 5 & & \\ & & 7 & : & 3 \\ \hline 21 & : & 35 & : & 15 \end{array}$$

- 7 威利從中正紀念堂到臺灣大學，若在相同路線下，發現坐公車、騎自行車、步行的時間分別是 10 分鐘、15 分鐘和 40 分鐘，則這三種交通工具平均速率的比是多少？

課 P19 隨堂

∵ 在相同路線下，

可設中正紀念堂到臺灣大學的距離為 x ，

則坐公車、騎自行車、步行的速率比為

$$\frac{x}{10} : \frac{x}{15} : \frac{x}{40} = \frac{1}{10} : \frac{1}{15} : \frac{1}{40} = 12 : 8 : 3。$$

答：12 : 8 : 3。



教學眉批

- 教師可依學生程度，適當說明距離相等時，三個等速率之交通工具所須的時間比等於速率的倒數比。

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配自評第 7 題

- 若小夏在相同路線下從家裡出發到運動場，發現搭計程車、搭公車及騎自行車的時分分別是 18 分鐘、24 分鐘及 30 分鐘，則這三種交通工具平均速率的比是多少？

20 : 15 : 12

1-2 比例線段



教學眉批

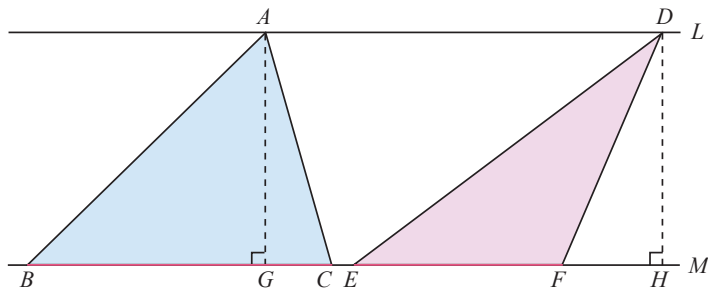
- 在八下利用「平行線間的距離相等」解題時，已有等高的概念。
- 此時可視情況複習三角形高的畫法，尤其是鈍角三角形高的位置。
- 等高三角形包含同高三角形。

基會試題

- ◆ 91 基測 II 第 11 題
- ◆ 91 基測 II 第 29 題
- ◆ 94 基測 II 第 8 題
- ◆ 101 基測第 29 題
- ◆ 102 基測第 19 題
- ◆ 106 會考第 11 題

① 等高三角形

如右圖，已知 $L \parallel M$ ，且有兩個三角形 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ ，其中 $\overline{AG}$ 、 $\overline{DH}$ 分別是 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 的高。



對應學習內容 S-9-3

因為「兩平行線間的距離相等」，所以 $\overline{AG} = \overline{DH} = h$ ，故

$$\begin{aligned}\triangle ABC \text{ 面積} : \triangle DEF \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AG} : \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h : \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times h \\ &= \overline{BC} : \overline{EF}\end{aligned}$$

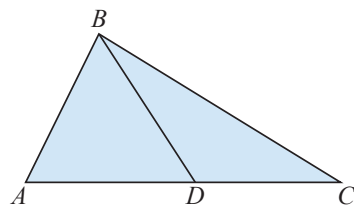
等高或同高三角形的面積比

等(同)高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。

隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{AD} : \overline{CD} = 4 : 3$ ，求 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 的面積比。

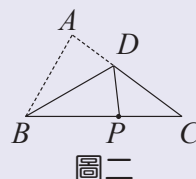
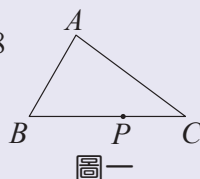
$$\begin{aligned}\triangle ABD \text{ 面積} : \triangle CBD \text{ 面積} &= \overline{AD} : \overline{CD} \\ &= 4 : 3.\end{aligned}$$



考 102 基測 第 19 題 搭配例 1

- (A) 圖一為一張三角形 ABC 紙片， P 點在 $\overline{BC}$ 上，今將 A 摺至 P 時，出現摺線 $\overline{BD}$ ，其中 D 點在 $\overline{AC}$ 上，如圖二所示。若 $\triangle ABC$ 的面積為 80， $\triangle DBC$ 的面積為 50，則 $\overline{BP}$ 與 $\overline{PC}$ 的長度比為何？

(A) 3 : 2 (B) 5 : 3 (C) 8 : 5 (D) 13 : 8



例1 等(同)高三角形的面積

搭配習作 P9 基礎題 1 自評 P41 第 1 題

12年國教

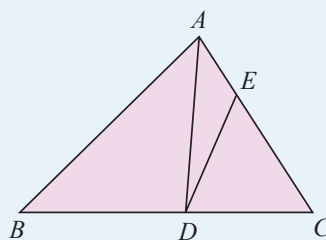
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上，

若 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ ， $\overline{CE} : \overline{EA} = 5 : 2$ ，

且 $\triangle ABD$ 的面積是 28，求：

(1) $\triangle ADC$ 的面積。

(2) $\triangle DAE$ 的面積。



課綱 P18：
已從九年一貫 97 年課程綱要刪除者，以及未列入現有內容且較難者，不可在教科書中呈現。

解 (1) $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 同高，

$$\therefore \triangle ABD \text{ 面積} : \triangle ADC \text{ 面積} = \overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$$

$$28 : \triangle ADC \text{ 面積} = 4 : 3$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 面積} = 21。$$

(2) $\because \triangle DCE$ 和 $\triangle DAE$ 同高，

$$\therefore \triangle DCE \text{ 面積} : \triangle DAE \text{ 面積} = \overline{CE} : \overline{EA} = 5 : 2$$

$$\text{設 } \triangle DCE \text{ 面積} = 5r, \triangle DAE \text{ 面積} = 2r,$$

$$\text{又 } \triangle ADC \text{ 面積} = \triangle DCE \text{ 面積} + \triangle DAE \text{ 面積}$$

$$21 = 5r + 2r, \text{ 故 } r = 3,$$

$$\therefore \triangle DAE \text{ 的面積} = 2 \times 3 = 6。$$

教學眉批

根據課綱，此處不呈現內分比性質。
有關內分比與外分比的證明，教師可參考備課用書 P46~47，並視班級情況補充。

隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

延長 $\overline{DE}$ 、 $\overline{BC}$ ，且分別在延長線上取 G 、 F 兩點，使得四邊形 $CFGE$ 是一個平行四邊形。若 $\overline{AD} = 10$ ， $\overline{DB} = 7$ ， $\overline{DE} = 5$ ，

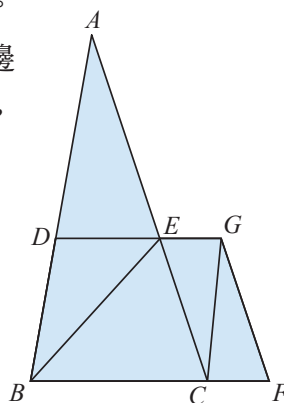
$\overline{EG} = 3$ ，回答下列問題：

(1) $\triangle ADE$ 面積 : $\triangle BDE$ 面積 = 10 : 7。

(2) $\triangle BDE$ 面積 : $\triangle CEG$ 面積 = 5 : 3。

(3) $\triangle ADE$ 面積 : $\triangle BDE$ 面積 : $\triangle CFG$ 面積

= 50 : 35 : 21。



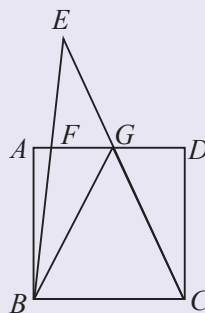
基會試題

◆ 112 會考第 22 題

考 112 會考第 22 題 搭配隨堂

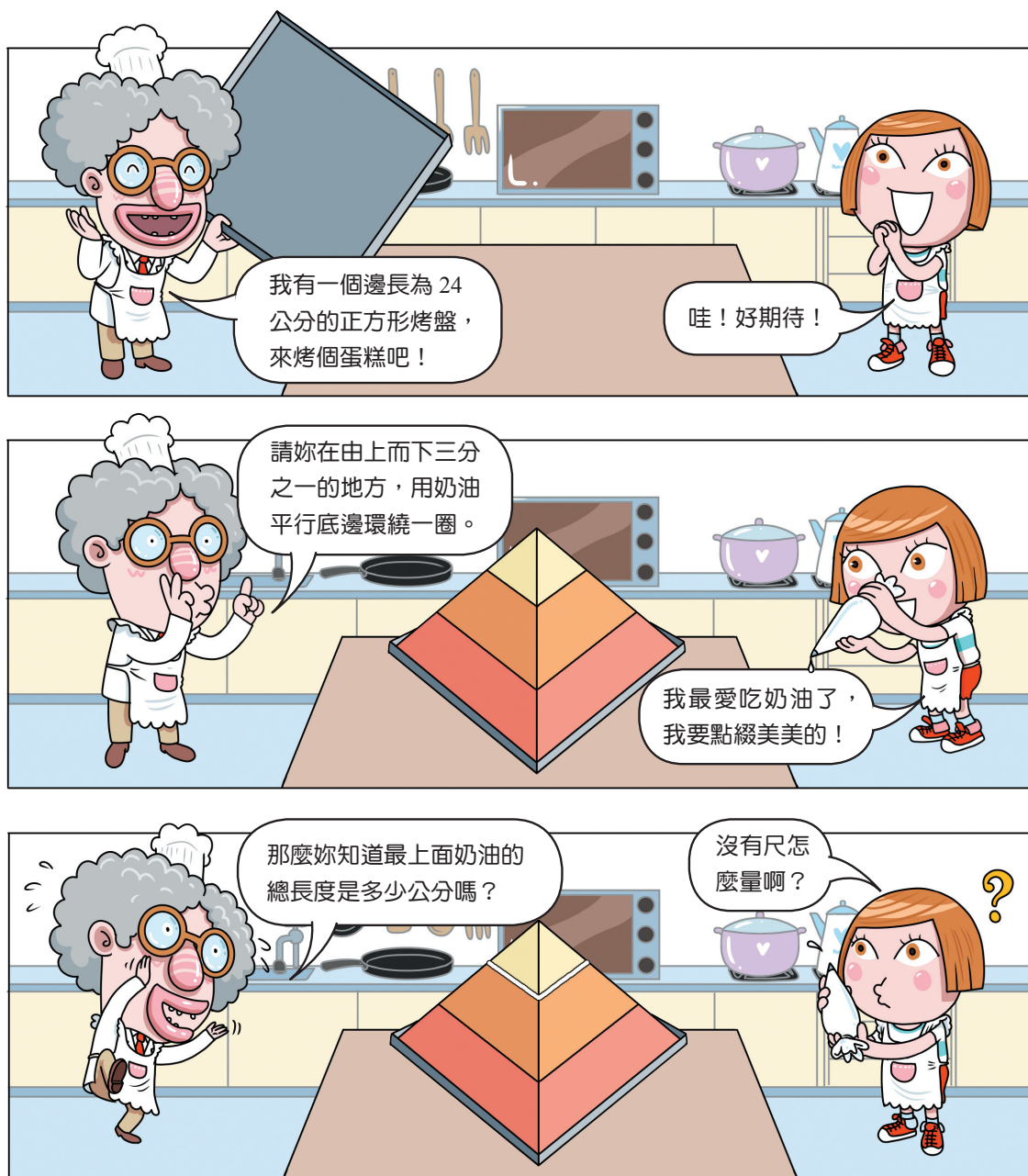
■ (C) 如圖，正方形 $ABCD$ 與 $\triangle EBC$ 中， $\overline{AD}$ 分別與 $\overline{EB}$ 、 $\overline{EC}$ 相交於 F 點、 G 點。若 $\triangle EBG$ 的面積為 6，正方形 $ABCD$ 的面積為 16，則 $\overline{FG}$ 與 $\overline{BC}$ 的長度比為何？

(A) 3 : 5 (B) 3 : 6 (C) 3 : 7 (D) 3 : 8



2 平行線截比例線段

對應學習內容 S-9-3

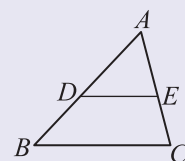


要解決漫畫中的問題，我們先利用等高三角形的面積比等於其對應底邊長的比，發展平行線截比例線段的性質，再利用這個性質來解決問題。

考 會考觀測站 加強演練題

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = a + b$ ， $\overline{DB} = a$ ， $\overline{AE} = 4$ ， $\overline{EC} = 3$ ，求 $a : b$ 。

3 : 1

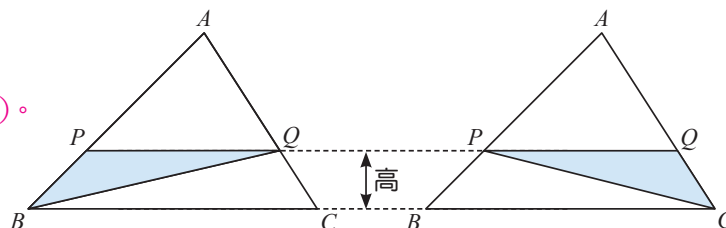


探索活動 平行線截比例線段

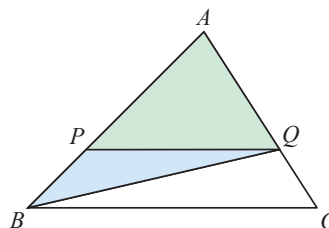
右圖 $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上， $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，
連接 $\overline{PC}$ 、 $\overline{BQ}$ ，回答下列問題：

(1) $\triangle BPQ$ 面積與 $\triangle CPQ$ 面積是否相等？為什麼？

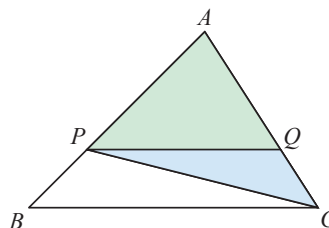
∵ 平行線間的距離相等，
故 $\triangle BPQ$ 面積
= $\triangle CPQ$ 面積（同底等高）。



(2) 為什麼 $\triangle APQ$ 面積： $\triangle BPQ$ 面積 = $\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$ ？
同高。



(3) 為什麼 $\triangle APQ$ 面積： $\triangle CPQ$ 面積 = $\overline{AQ}$ ： $\overline{QC}$ ？
同高。



(4) 由(1)、(2)、(3)推得 $\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$ 與 $\overline{AQ}$ ： $\overline{QC}$ 是否相等？

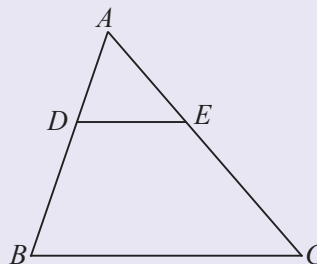
∵ $\triangle APQ$ 面積： $\triangle BPQ$ 面積
= $\triangle APQ$ 面積： $\triangle CPQ$ 面積（ $\triangle BPQ$ 面積 = $\triangle CPQ$ 面積），
∴ $\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$ = $\overline{AQ}$ ： $\overline{QC}$ 。

教學眉批

- 探索活動的教學，教師可用提問的方法進行，以強化學生對複合圖形的分析能力。
- 探索(1)：教師可利用彩色粉筆讓學生聚焦在觀察 $\triangle BPQ$ 和 $\triangle CPQ$ 。
- 探索(2)：教師應讓學生聚焦於 $\triangle ABQ$ 的觀察。
- 探索(3)：教師應讓學生聚焦於 $\triangle ACP$ 的觀察。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配探索

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD}=4$ ， $\overline{DB}=6$ ， $\overline{AE}=5$ ，
則 $\overline{EC} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$ 。



教學眉批

■ 另可利用合分比的性質說明其他截比例線段性質。

■ 合分比性質：

設 a 、 b 、 c 、 d 皆不等於 0，若 $a :$

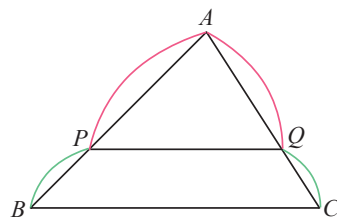
$b = c : d$ ，則

$$(1) (a+b) : b = (c+d) : d$$

$$(2) (a-b) : b = (c-d) : d$$

由  探索活動 可知，若一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成等比例的線段，我們稱為**平行線截比例線段性質**。

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。

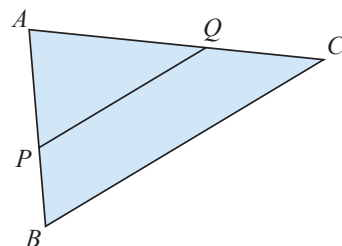


隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AP} = 6$ ， $\overline{PB} = 4$ ， $\overline{AQ} = 9$ ，求 $\overline{QC}$ 。

在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\therefore \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$
 $6 : 4 = 9 : \overline{QC}$
 $\overline{QC} = 6$ 。

自評 P41 第 2 題

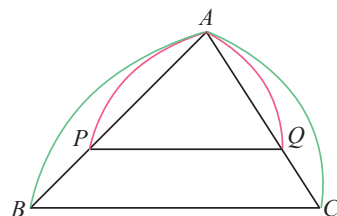


除了上面的性質之外，可進一步得到其它性質。

設 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC} = a : b$ 。

若 $\overline{AP} = ar$ ， $\overline{PB} = br$ ， $r \neq 0$ ，則

$$\begin{aligned} \overline{AP} : \overline{AB} &= \overline{AP} : (\overline{AP} + \overline{PB}) \\ &= ar : (ar + br) \\ &= a : (a + b) \end{aligned}$$

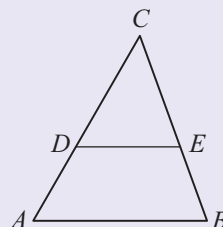


同理， $\overline{AQ} : \overline{AC} = a : (a + b)$ ，因此可以得到 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。仿照這樣的過程，也可得到 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。

會考觀測站 精熟演練題 搭配課文

■ 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{CD} = 4x - 4$ ， $\overline{AD} = 2x + 2$ ， $\angle C = 50^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle CDE = 60^\circ$ ，若 $\overline{CE} : \overline{CB} = (6x + 6) : (9x + 17)$ ，求 x 的值。

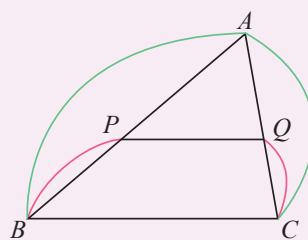
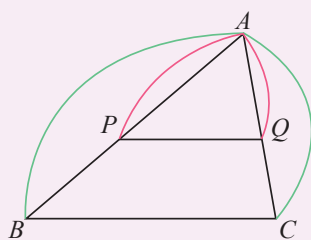
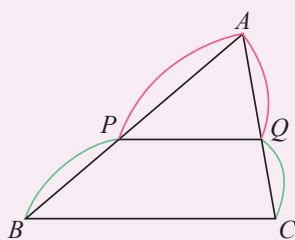
7



平行線截比例線段性質(一)

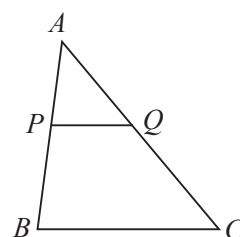
$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

$$(1) \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC} \quad (2) \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC} \quad (3) \overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$$



教學眉批

■ 教師可利用比例分配延伸命題。
例如：如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AP} : \overline{PB} = 7 : 9$ ， $\overline{AQ} = 21$ ，求 $\overline{CQ}$ 。



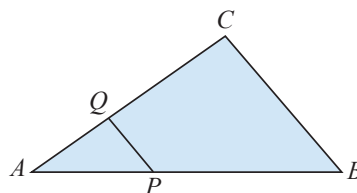
$$\overline{CQ} = 27$$

隨堂練習

搭配習作 P9 基礎題 2 自評 P41 第 2 題

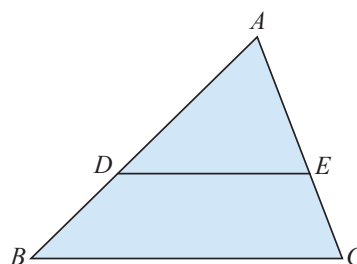
1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AP} = 16$ ， $\overline{AB} = 40$ ， $\overline{AQ} = 12$ ，求 $\overline{AC}$ 。

$$\begin{aligned} &\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，} \because \overline{PQ} \parallel \overline{BC}, \\ &\therefore \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC} \\ &16 : 40 = 12 : \overline{AC} \\ &\overline{AC} = 30. \end{aligned}$$



2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{BD} : \overline{AB} = 3 : 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ，求 $\overline{CE}$ 。

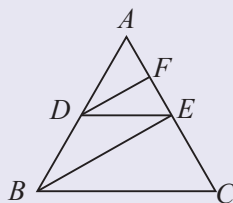
$$\begin{aligned} &\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，} \because \overline{DE} \parallel \overline{BC}, \\ &\therefore \overline{BD} : \overline{AB} = \overline{CE} : \overline{AC} \\ &3 : 8 = \overline{CE} : 6 \\ &\overline{CE} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$



會考觀測站 精熟演練題 搭配隨堂

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{DF} \parallel \overline{BE}$ ，若 $\overline{AF} = 4$ ， $\overline{AC} = 16$ ，求 $\overline{EF}$ 。

4

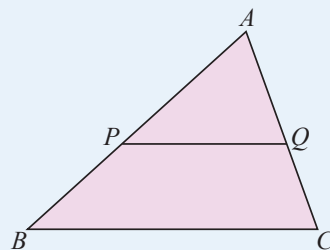


教學眉批

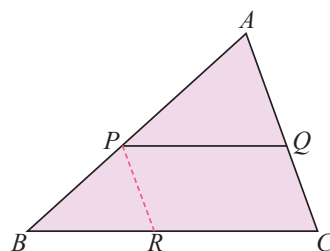
- 平行線截比例線段為本節的重點性質，學生需要多花時間來練習與統整。
- 教完例題 2 後，教師可以幫學生整理全部的平行線截比例線段的性質，並多出一些題目來練習。

例 2 平行線截比例線段性質

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，說明 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ 。



說明 (1) 過 P 點作 $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$ ，交 $\overline{BC}$ 於 R 點，又 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\therefore$ 四邊形 $PRCQ$ 為平行四邊形，故 $\overline{PQ} = \overline{RC}$ 。
 (2) 在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{PR} \parallel \overline{AC}$ ，
 $\therefore \overline{RC} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ (平行線截比例線段性質)，
 又 $\overline{RC} = \overline{PQ}$ ，故 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ 。



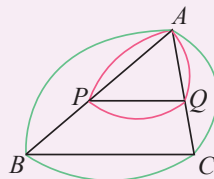
測 基會試題

- ◆ 93 基測 I 第 21 題
- ◆ 93 基測 II 第 21 題

由前面的學習可知：當 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 時， $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，結合例 2 的結論，可得 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。

平行線截比例線段性質(二)

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。

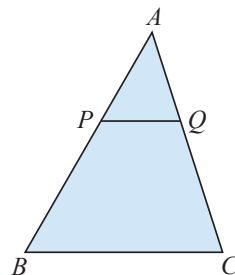


隨堂練習

搭配習作 P9 基礎題 3 自評 P41 第 3 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則

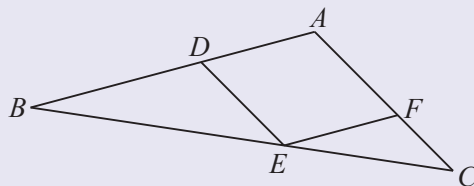
- (1) $\overline{AP} : \overline{AB} = \underline{2} : \underline{5}$ 。
- (2) $\overline{PQ} : \overline{BC} = \underline{2} : \underline{5}$ 。



考 會考觀測站 精熟演練題 搭配例 2

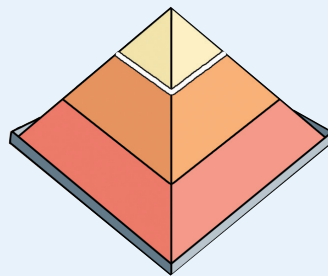
- 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且四邊形 $ADEF$ 為菱形，已知 $\overline{AF} : \overline{FC} = 3 : 2$ ， $\overline{FC} = 8$ ，求 $\overline{BD}$ 。

18



例3 平行線截比例線段性質的應用

右圖是一個金字塔蛋糕，已知底層是每邊 24 公分的正方形，如果在由上而下三分之一處用奶油環繞一圈平行底邊，則這一圈奶油的長度為多少公分？



教學眉批

- 利用實際生活的例子計算平行線截比例線段的長度，雖然是立體圖形，但因需思考的部分為平面，不受立體的影響。

解 蛋糕其中一面的圖形如右圖，

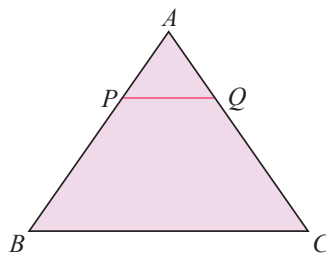
設其中奶油的部分是 $\overline{PQ}$ ，同一邊的底層是 $\overline{BC}$ 。

$$\therefore \overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = 1 : 3$$

$$\therefore \overline{PQ} : 24 = 1 : 3$$

$$\overline{PQ} = 8$$

故一圈奶油的長度是 $8 \times 4 = 32$ (公分)。



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 20$ ， $\overline{BD} = 12$ ， $\overline{BC} = 16$ ， $\overline{EC} = 9$ ，求 $\triangle ADE$ 的周長。

在 $\triangle ABC$ 中，

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

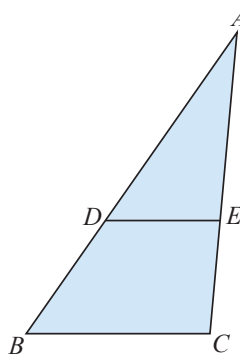
$$\therefore \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$$

$$20 : (20 + 12) = \overline{AE} : (\overline{AE} + 9) = \overline{DE} : 16$$

$$5 : 8 = \overline{AE} : (\overline{AE} + 9) = \overline{DE} : 16$$

可得 $\overline{AE} = 15$ ， $\overline{DE} = 10$

故 $\triangle ADE$ 的周長 $= 20 + 10 + 15 = 45$ 。



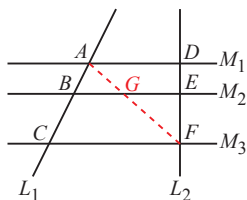
考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 3

- 在例 3 中，若由上而下三分之二處奶油環繞一圈平行底邊，則這一圈奶油的長度為多少公分？

64 公分

教學眉批

- 例題 4 的思路分析中，「平行移動」不當專有名詞。
- 教師可補充另一種證法：

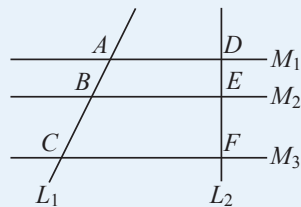


連接 $\overline{AF}$ ，交 $\overline{BE}$ 於 G 點，

$$\begin{aligned} &\because M_2 \parallel M_3, \\ &\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AG} : \overline{GF}, \\ &\text{又 } M_1 \parallel M_2, \\ &\therefore \overline{DE} : \overline{EF} = \overline{AG} : \overline{GF}, \\ &\text{故 } \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}. \end{aligned}$$

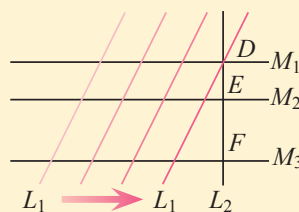
例4 平行線截比例線段性質的應用

如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$ ，且分別與截線 L_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與截線 L_2 交於 D 、 E 、 F 三點，說明 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。

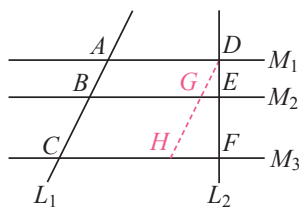


思路分析

如圖，將 L_1 向右平行移動，使 L_1 與 L_2 交於 D 點，就可利用平行線截比例線段性質來說明。



- 說明**
- (1) 過 D 點作 $\overline{DH} \parallel L_1$ ，分別交 M_2 、 M_3 於 G 、 H 兩點。
 - (2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$ ，且 $\overline{DH} \parallel L_1$ ，
 $\therefore$ 四邊形 $ABGD$ 與四邊形 $BCHG$ 皆為平行四邊形，
 故 $\overline{AB} = \overline{DG}$ ， $\overline{BC} = \overline{GH}$ 。
 - (3) 在 $\triangle DHF$ 中，
 $\because \overline{GE} \parallel \overline{HF}$ ， $\therefore \overline{DG} : \overline{GH} = \overline{DE} : \overline{EF}$ ，
 故 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。

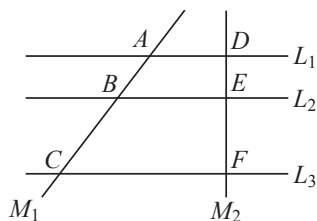


隨堂練習

如圖，直線 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，直線 M_1 與 M_2 為截線，已知 $\overline{AB} = 25$ ， $\overline{BC} = 45$ ， $\overline{DE} = x + 5$ ， $\overline{EF} = 2x + 6$ ，求 x 的值。

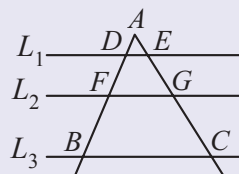
$$\begin{aligned} &\because L_1 \parallel L_2 \parallel L_3, \\ &\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF} \\ &25 : 45 = (x + 5) : (2x + 6) \\ &9x + 45 = 10x + 30 \\ &x = 15 \end{aligned}$$

搭配習作 P10 基礎題 4



考 會考觀測站 加強演練題 搭配例 4

- 如圖，直線 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，若 $\overline{AD} : \overline{DF} : \overline{FB} = 1 : 2 : 3$ ，則下列敘述哪些是正確的？
 (A) $\overline{AE} : \overline{AG} : \overline{AC} = 1 : 2 : 3$
 (B) $\overline{AE} : \overline{AG} : \overline{AC} = 1 : 3 : 6$
 (C) $\overline{DE} : \overline{FG} : \overline{BC} = 1 : 2 : 3$
 (D) $\overline{DE} : \overline{FG} : \overline{BC} = 1 : 3 : 6$
 (B)(D)



如何在一線段上找出適當的一點，將線段分成兩個線段，使得這兩個線段長的比為給定的比，我們利用下面的例題說明作圖方法。

例5 利用平行線截比例線段性質分割線段



搭配習作 P10 基礎題 5

自評 P42 第 4 題

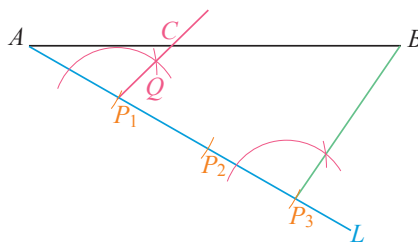


教學眉批

已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上找出一點 C ，使得 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 。

A ————— B

- 作法**
- (1) 過 A 點作一條異於 $\overline{AB}$ 的直線 L 。
 - (2) 在 L 上依序取 P_1 、 P_2 、 P_3 三點，使得 $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$ 。
 - (3) 連接 $\overline{P_3B}$ 。
 - (4) 過 P_1 作 $\overline{P_1Q} \parallel \overline{P_3B}$ ，使 $\overline{P_1Q}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 C 點，則 C 點即為所求。



- 掃描 QRcode，可利用此影片進行分割線段的作圖的教學。
- 進行作圖時，教師可提醒學生 $\overline{AC} : \overline{CB}$ 與 $\overline{AC} : \overline{AB}$ 不同，應看清題目及了解題意。



關鍵提問

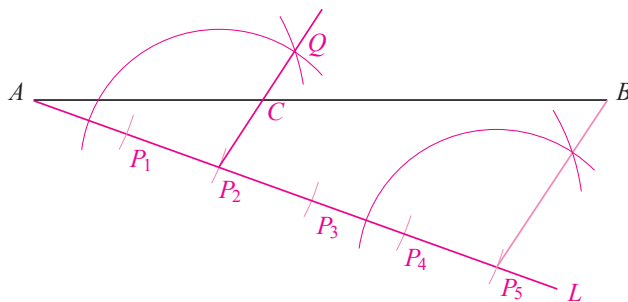
- 例題 5：若改成 $\overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 3$ 或 $\overline{CB} : \overline{AB} = 2 : 3$ ，則所作出的圖是否與 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 相同呢？
是。

在例5所作出的圖形 $\triangle ABP_3$ 中，因為 $\overline{P_1C} \parallel \overline{P_3B}$ ，由平行線截比例線段性質可知 $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AP_1} : \overline{P_1P_3} = 1 : 2$ 。



隨堂練習

已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖，在 $\overline{AB}$ 上找出一點 C ，使得 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 3$ 。（不必寫出作法）



C 點即為所求。

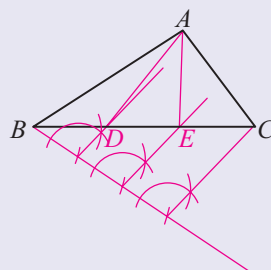


會考觀測站

基礎演練題

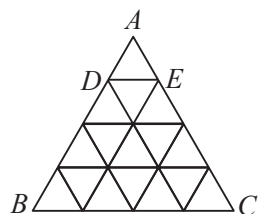
搭配例 5

- 如圖，已知 $\triangle ABC$ ，利用尺規作圖，在 $\overline{BC}$ 上找出兩點，與 A 點連接，將 $\triangle ABC$ 三等分。



教學眉批

- 利用實例引導學生學習利用比例線段判別平行。
- 教師上課時，也可利用生活例子引導，例如：



用 16 個相同大小的正三角形卡紙，拼成上圖，則：

(1) $\overline{DE}$ 和 $\overline{BC}$ 是否會平行？

是。

(2) $\overline{DE} : \overline{BC}$ 的比值為何？

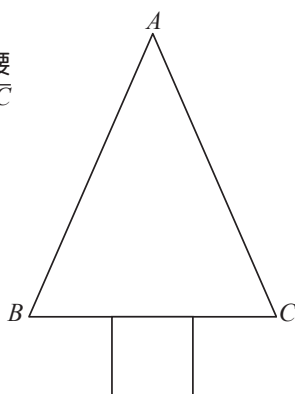
$\frac{1}{4}$

③ 利用比例線段判別平行

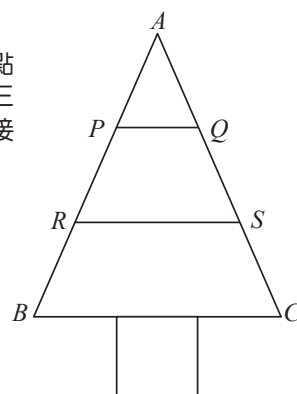
對應學習內容 S-9-3

聖誕節快到了，艾美想在教室的窗戶玻璃貼上聖誕樹的圖案，她的設計如下。

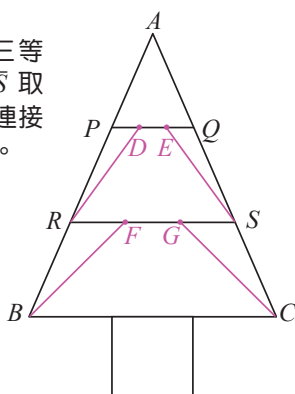
- ① 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $\overline{AB} = \overline{AC} = 15$ ， $\overline{BC} = 12$ 。



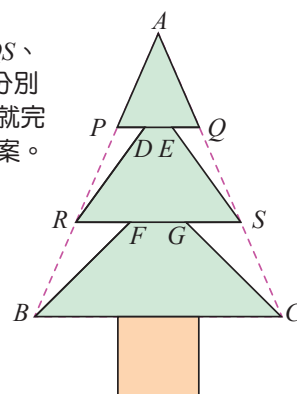
- ② 在 $\overline{AB}$ 取三等分點 P 、 R ，在 $\overline{AC}$ 取三等分點 Q 、 S ，連接 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 。



- ③ 接著在 $\overline{PQ}$ 上取三等分點 D 、 E ，在 $\overline{RS}$ 取三等分點 F 、 G ，連接 $\overline{DR}$ 、 $\overline{ES}$ 、 $\overline{FB}$ 、 $\overline{GC}$ 。



- ④ 剪去 $\triangle PDR$ 、 $\triangle EQS$ 、 $\triangle RFB$ 、 $\triangle GSC$ ，分別塗上鮮豔的顏色，就完成漂亮的聖誕樹圖案。



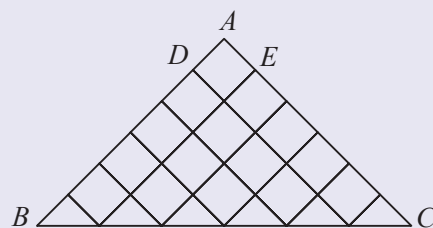
在上圖中， $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 、 $\overline{BC}$ 看似平行，但實際上是否平行呢？

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

- 艾美用 15 個邊長為 4 的正方形和 6 個腰長為 4 的等腰直角三角形設計成如右圖，回答下列問題：

(1) $\overline{DE}$ 和 $\overline{BC}$ 是否會平行？ 是。

(2) $\overline{DE} : \overline{BC}$ 的比值為何？ $\frac{1}{6}$



我們先利用兩個等高三角形面積比的概念來說明：

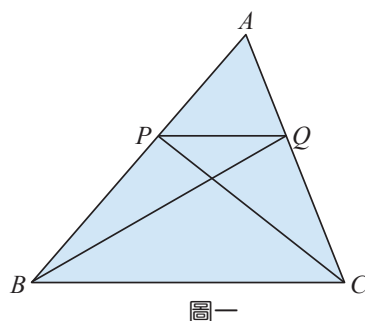
在 $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$ 。

如圖一， $\triangle APQ$ 面積： $\triangle BPQ$ 面積 $=\overline{AP}:\overline{PB}$ （同高），

$\triangle APQ$ 面積： $\triangle CPQ$ 面積 $=\overline{AQ}:\overline{QC}$ （同高），

因為 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$ ，

所以 $\triangle BPQ$ 面積 $=\triangle CPQ$ 面積。



圖一

如圖二，分別自 B 、 C 向 $\overline{PQ}$ 作高，

垂足分別是 M 、 N ，則 $\overline{BM}\parallel\overline{CN}$ 。

因為 $\triangle BPQ$ 面積 $=\triangle CPQ$ 面積

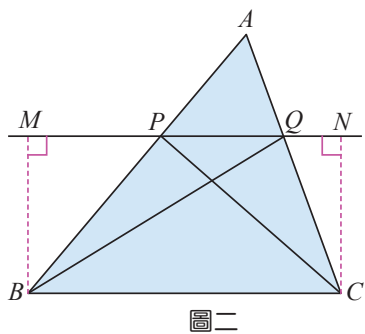
$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{BM} = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CN}$$

所以 $\overline{BM}=\overline{CN}$ 。

又 $\overline{BM}\parallel\overline{CN}$ ，

所以四邊形 $BMNC$ 是平行四邊形（一組對邊平行且等長），

故 $\overline{MN}\parallel\overline{BC}$ ，即 $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$ 。



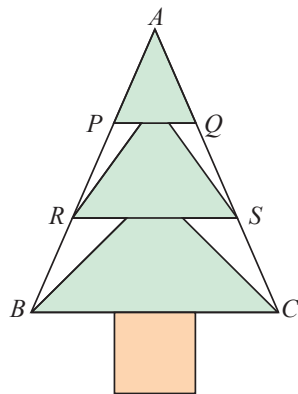
圖二

由於「 $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$ 」及「 $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$ 」，皆可推得「 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$ 」，因此「若 $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$ 」及「若 $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$ 」。

由上述可知，製作聖誕樹的過程中，

因為 $\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AC}=1:3$ ，所以 $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$ 。

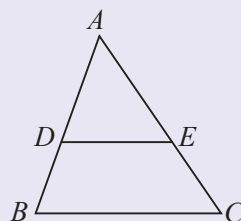
同理， $\overline{RS}\parallel\overline{BC}$ ，故 $\overline{PQ}\parallel\overline{RS}\parallel\overline{BC}$ 。



考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文

- (B) 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的點，則下列哪個條件無法推得 $\overline{DE}\parallel\overline{BC}$ ？

- (A) $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$
 (B) $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$
 (C) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$
 (D) $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$



教學眉批

- 如何證明平行線截比例線段逆性質的想法是第一次出現，因此教師在教學時宜特別說明。
- 有關平行線截比例線段逆性質的說明，教師可參考備課用書 P47，並視班級情況補充。

教學眉批

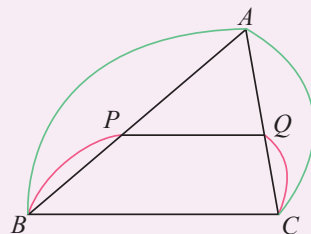
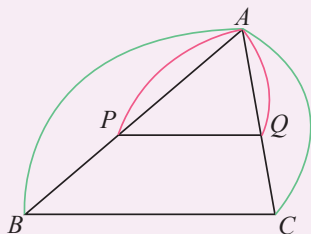
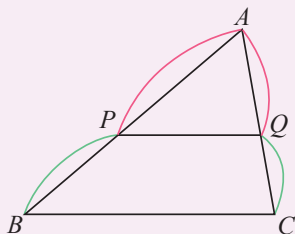
判別是否平行，教師可參考以下方式讓學生練習：

- (1) 複習第四冊平行的判別，兩直線被一截線所截，若其內錯角相等或同位角相等或同側內角互補，則此兩直線平行。
- (2) 重點摘要中三個判別平行的方法，可以分別代入數字的題目讓學生練習。

截線段與平行的判別

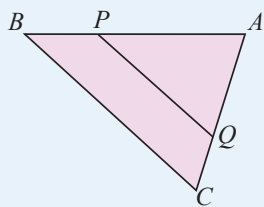
$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若

- (1) $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (2) $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (3) $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



例6 由比例線段判別是否平行

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AP}=8$ ， $\overline{PB}=4$ ， $\overline{AQ}=6$ ， $\overline{QC}=3$ ，則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？為什麼？



解 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\left. \begin{array}{l} \because \overline{AP} : \overline{PB} = 8 : 4 = 2 : 1 \\ \overline{AQ} : \overline{QC} = 6 : 3 = 2 : 1 \end{array} \right\} \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$$

故 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。

隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AP} : \overline{AB} = 9 : 20$ ，若 $\overline{AQ}=18$ ， $\overline{AC}=40$ ，則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？為什麼？

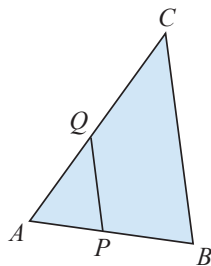
在 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \overline{AP} : \overline{AB} = 9 : 20, \overline{AQ} : \overline{AC} = 18 : 40 = 9 : 20,$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC},$$

故 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。

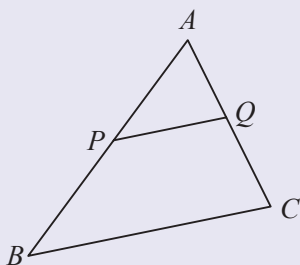
自評 P41 第 3 題



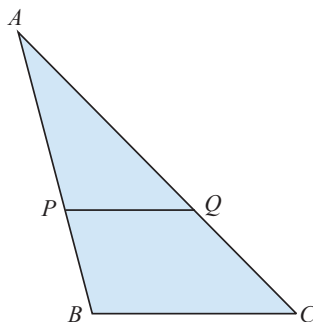
考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 6

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AP}=6$ ， $\overline{PB}=8$ ， $\overline{AQ}=4.5$ ， $\overline{QC}=6$ ，則 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{BC}$ 是否平行？

是



如圖，我們在前面曾學過， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{PQ} : \overline{BC}$ 。



反過來說， $\triangle ABC$ 中， P 、 R 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{PR} : \overline{BC}$ ，則 $\overline{PR}$ 與 $\overline{BC}$ 是否一定會平行呢？我們以下面的  探索活動 來說明。

探索活動 由比例線段是否可判別平行

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，是否可在 $\overline{AC}$ 上找到 R 點（異於 Q 點），使得 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ ？如果可以，請在右圖上標示。

可以。

2. 承第 1 題， $\overline{PR} : \overline{BC}$ 是否等於 $\overline{AP} : \overline{AB}$ ？

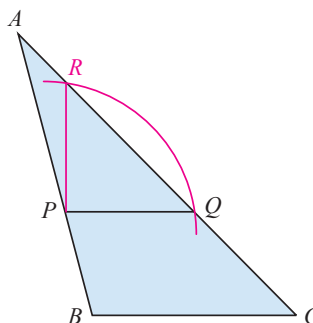
是。

$$\because \overline{PQ} \parallel \overline{BC}, \therefore \overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$$

$$\text{又 } \overline{PQ} = \overline{PR}, \text{ 故 } \overline{PR} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}。$$

3. $\overline{PR}$ 與 $\overline{BC}$ 是否一定會平行？

否。



教學眉批

■ $\triangle ABC$ 中， R 在 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{PR} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ ，則 $\overline{PR}$ 和 $\overline{BC}$ 不一定會平行，這個觀念可加以說明清楚。

由  探索活動 可知，若 $\overline{PR} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ ，則 $\overline{PR}$ 和 $\overline{BC}$ 不一定會平行。



會考觀測站

基礎演練題

搭配探索

- (C) $\triangle ABC$ 中，一直線 L 交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 P 、 Q 兩點，若 $\overline{AB} = 20$ ， $\overline{AQ} = 18$ ， $\overline{AP} = 12$ ，則下列哪一個條件可使得直線 L 平行 $\overline{BC}$ ？
(A) $\overline{QC} = 16$ (B) $\overline{PQ} = 12$ (C) $\overline{AC} = 30$ (D) $\overline{BC} = 32$

④ 三角形兩邊中點連線段性質

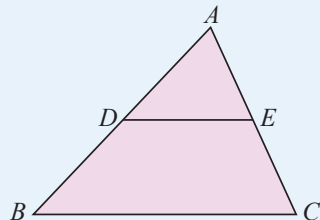
對應學習內容 S-9-3

教學眉批

- 例題 7：教師亦可用 1-3 節相似形的 SAS 相似性質來證明。

例 7 三角形兩邊中點連線段性質

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
說明 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 。



說明 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because D$ 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

$$\left. \begin{array}{l} \therefore \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2 \\ \overline{AE} : \overline{AC} = 1 : 2 \end{array} \right\} \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

故 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

(2) $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

$$\therefore \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2，$$

$$\text{故 } \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}。$$

三角形兩邊中點連線段性質

三角形的兩邊中點連線段必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。

關鍵提問

1. 四邊形 $ADEF$ 、
四邊形 $DECF$ 是否為平行四邊形？

都是平行四邊形。

2. $\triangle ADF$ 、 $\triangle DBE$ 、
 $\triangle DEF$ 、 $\triangle FEC$ 有什麼關係呢？

$\triangle ADF \cong \triangle DBE$
 $\cong \triangle DEF \cong \triangle FEC$ 。

3. 四個小三角形或
其中任意兩個三角形是否全等？

是。

隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
已知 $\overline{AB} = 10$ 公分， $\overline{BC} = 8$ 公分， $\overline{AC} = 7$ 公分，求：

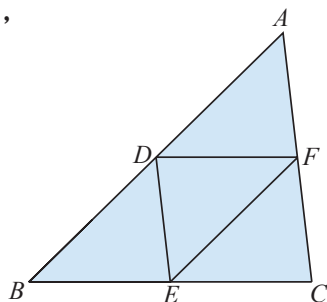
(1) $\triangle DEF$ 的周長。

(2) 四邊形 $DBEF$ 是否為平行四邊形？為什麼？

$$\begin{aligned} (1) \triangle DEF \text{ 的周長} &= \overline{DE} + \overline{DF} + \overline{EF} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2} (7 + 8 + 10) = \frac{25}{2} \text{ (公分)} \end{aligned}$$

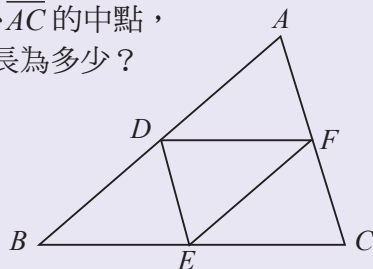
(2) $\because \overline{DF} \parallel \overline{BE}$ ， $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$ ， $\therefore$ 四邊形 $DBEF$ 為平行四邊形。

自評 P42 第 5 題



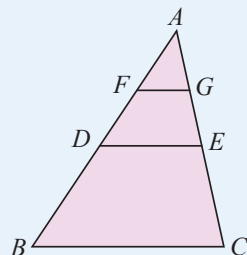
會考觀測站 加強演練題 搭配隨堂

- (D) 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
已知 $\overline{DE} = 3$ 、 $\overline{DF} = \overline{EF} = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長為多少？
(A) 11 (B) 14 (C) 18 (D) 22



例8 三角形兩邊中點連線性質的應用

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
 F 、 G 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{FG}=3$ ，
 求 $\overline{DE}+\overline{BC}$ 。



教學眉批

■ 此處命題時，若要出現計算面積的題型，應於 1-4 「相似三角形面積比等於對應邊長的平方比」教完再命題。

測 基會試題

- ◆ 92 基測 I 第 20 題
- ◆ 98 基測 II 第 17 題

關鍵提問

■ $\overline{AF} : \overline{AD} : \overline{AB} = ?$
 $1 : 2 : 4$ 。

解 在 $\triangle ADE$ 中， F 、 G 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，

$$\therefore \overline{FG} = \frac{1}{2} \overline{DE}, \overline{DE} = 2 \overline{FG} = 6,$$

同理， $\overline{BC} = 2 \overline{DE} = 12$ ，

$$\text{故 } \overline{DE} + \overline{BC} = 6 + 12 = 18。$$

隨堂練習

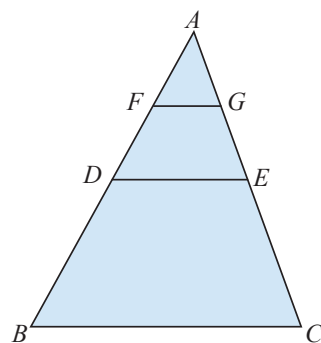
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
 F 、 G 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，若 $\overline{DE}=20$ ，
 求 $\overline{FG}+\overline{BC}$ 。

在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

$$\therefore \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}, \overline{BC} = 2 \overline{DE} = 2 \times 20 = 40,$$

$$\text{同理，} \therefore \overline{FG} = \frac{1}{2} \overline{DE} = \frac{1}{2} \times 20 = 10,$$

$$\text{故 } \overline{FG} + \overline{BC} = 10 + 40 = 50。$$



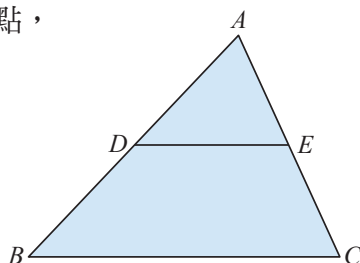
Thinking

如圖， $\triangle ABC$ 中，若 D 為 $\overline{AB}$ 的中點， E 為 $\overline{AC}$ 上的一點，
 且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 E 是否為 $\overline{AC}$ 的中點？為什麼？

$$\because D \text{ 為 } \overline{AB} \text{ 的中點，} \therefore \overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1,$$

在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

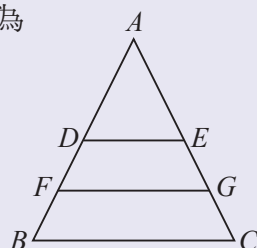
$$\therefore \overline{AE} : \overline{EC} = \overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1, \text{ 故 } E \text{ 為 } \overline{AC} \text{ 的中點。}$$



考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 8

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點， F 、 G 分別為 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 的中點，若 $\overline{DE} + \overline{FG} = 50$ ，求 $\overline{BC}$ 。

40





數問速答

- 配合小節重點回顧，教師可提供QRCode給學生，進行線上同步測驗與複習。



- 上述題目可參考本頁下方數問速答。

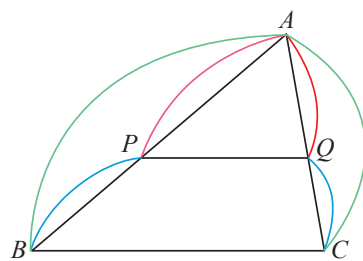
1 等高或同高三角形的面積比

等(同)高三角形的面積比等於其對應底邊長的比。

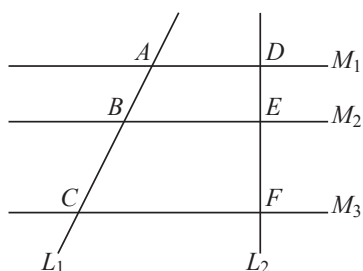
2 平行線截比例線段性質與應用

(1)如圖， $\triangle ABC$ 中， P 、 Q 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的一點，若 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- ① $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ 。
- ② $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。
- ③ $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ 。
- ④ $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ 。



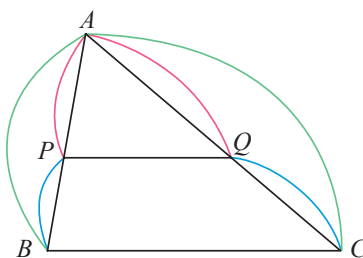
(2)如圖，直線 $M_1 \parallel M_2 \parallel M_3$ ，且分別與截線 L_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與截線 L_2 交於 D 、 E 、 F 三點，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



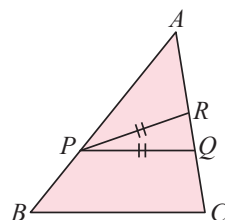
3 截線段與平行的判別

$\triangle ABC$ 中， P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，

- (1)若 $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (2)若 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。
- (3)若 $\overline{PB} : \overline{AB} = \overline{QC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 。



註：如圖， R 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{PR} : \overline{BC}$ ，則 $\overline{PR}$ 和 $\overline{BC}$ 不一定平行。



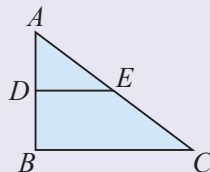
4 三角形兩邊中點連線段性質

三角形的兩邊中點連線段必平行於第三邊，且長度為第三邊長的一半。

數問速答

- 判別下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。

- (×) (1) 若兩個等高三角形的面積比為 $4 : 1$ ，則這兩個三角形對應邊長的比為 $2 : 1$ 。
- (○) (2) $\triangle ABC$ 中，如果 P 、 Q 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$ 。
- (×) (3) $\triangle ABC$ 中，已知 D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，若 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ ，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。
- (×) (4) 如圖， $\triangle ABC$ 中，已知 D 、 E 兩點分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 10$ ，則 $\triangle ADE$ 的周長為 16 。



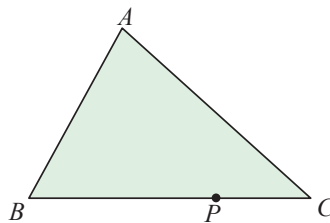


測 基會試題

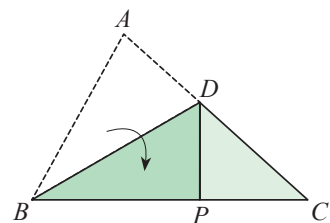
- ◆ 95 基測 II 第 27 題
- ◆ 100 基測 II 第 34 題
- ◆ 103 會考第 12 題
- ◆ 105 會考第 16 題
- ◆ 110 會考第 23 題

- ① 如圖一，有一張三角形 ABC 的紙片， P 在 $\overline{BC}$ 上。
將 A 點摺至 P 點時， $\overline{BD}$ 為摺痕，其中 D 點在 $\overline{AC}$ 上，
如圖二。若 $\triangle ABC$ 的面積為 100， $\triangle DBC$ 的面積為 60，
求 $\overline{BP} : \overline{PC}$ 。

課 P25 例 1



圖一

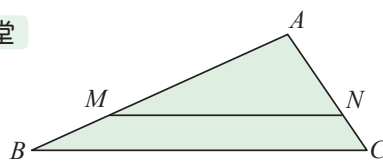


圖二

$$\begin{aligned} &\because \triangle DBC \text{ 面積為 } 60 \\ &\therefore \triangle ADB \text{ 面積} = \triangle ABC \text{ 面積} - \triangle DBC \text{ 面積} \\ &\quad = 100 - 60 = 40 \\ &\because \triangle BDP \text{ 面積} = \triangle ADB \text{ 面積} = 40 \\ &\therefore \triangle DPC \text{ 面積} = \triangle DBC \text{ 面積} - \triangle DBP \text{ 面積} \\ &\quad = 60 - 40 = 20 \\ &\text{故 } \overline{BP} : \overline{PC} = \triangle BDP \text{ 面積} : \triangle DPC \text{ 面積} \\ &\quad = 40 : 20 = 2 : 1 \text{ (同高)} \end{aligned}$$

答：2 : 1。

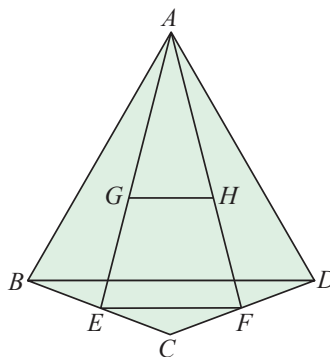
- ② 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AM} = 2x + 4$ ，
 $\overline{MB} = x + 1$ ， $\overline{AN} = 7$ ， $\overline{NC} = 3$ ，求 x 的值。 課 P28~29 隨堂



$$\begin{aligned} &\text{在 } \triangle ABC \text{ 中，} \\ &\because \overline{MN} \parallel \overline{BC}， \\ &\therefore \overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AN} : \overline{NC} \\ &\quad (2x+4) : (x+1) = 7 : 3 \\ &\quad 7x+7 = 6x+12 \\ &\quad x = 5 \end{aligned}$$

答：5。

- ③ 如圖， E 、 F 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，連接 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 。
若 G 、 H 分別在 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 上，且 $\overline{AG} : \overline{GE} = 3 : 2$ ，
 $\overline{AH} : \overline{HF} = 3 : 2$ ，回答下列問題： 課 P30、36 隨堂

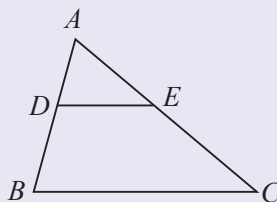


- (1) $\overline{GH}$ 和 $\overline{EF}$ 是否平行？答：是。
(2) $\overline{GH} : \overline{EF} = 3 : 5$ 。
(3) $\overline{GH} : \overline{BD} = 3 : 10$ 。

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配自評第 2 題

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = x + 2$ ， $\overline{DB} = 2x$ ， $\overline{AE} = 2x + 1$ ， $\overline{EC} = 3x$ ，
求 x 的值。

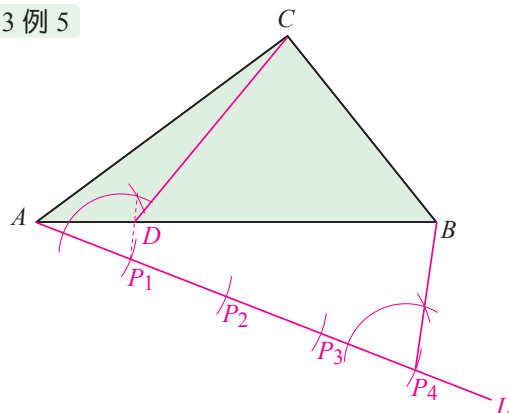
4



4 如圖，已知 $\triangle ABC$ ，回答下列問題： 課 P33 例 5

(1) 依下面的步驟利用尺規完成作圖：

- ① 過 A 點作一條異於 $\overline{AB}$ 的直線 L 。
- ② 在 L 上依序取 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 四點，使得 $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$ 。
- ③ 連接 $\overline{P_4B}$ 。
- ④ 過 P_1 作 $\overline{P_1D} \parallel \overline{P_4B}$ ，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。



(2) 在(1)的完成圖中，

- ① $\overline{AP_1} : \overline{P_1P_4} = \underline{1} : \underline{3}$ 。
- ② 為什麼 $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AP_1} : \overline{P_1P_4}$? $\because \overline{P_1D} \parallel \overline{P_4B}, \therefore \overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AP_1} : \overline{P_1P_4}$ 。
- ③ 連接 $\overline{CD}$ ，求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 的面積比。

$$\triangle ABC \text{ 面積} : \triangle ADC \text{ 面積} = \overline{AB} : \overline{AD} = 4 : 1$$

答：4 : 1。

教學眉批

- 第 5 題是三角形兩邊中點連線的應用題型。

關鍵提問

- 第 5 題：平行四邊形的判別方法有哪些？
 - (1) 兩組對邊分別平行。
 - (2) 兩組對邊分別等長。
 - (3) 兩組對角分別相等。
 - (4) 兩條對角線互相平分。
 - (5) 一組對邊平行且等長。

5 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 中點， G 、 H 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 中點，若 $\overline{BD} = 8$ ，回答下列問題：

(1) $\overline{EF} + \overline{GH}$ 。

(2) 連接 $\overline{EG}$ 、 $\overline{FH}$ ，則四邊形 $EFHG$ 是否為平行四邊形？為什麼？

課 P38 隨堂

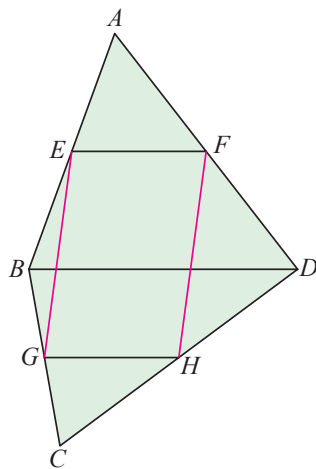
(1) 在 $\triangle ABD$ 中， $\because E$ 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 的中點，

$$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{BD}, \text{ 且 } \overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\text{同理, } \overline{GH} \parallel \overline{BD}, \text{ 且 } \overline{GH} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \\ \text{故 } \overline{EF} + \overline{GH} = 4 + 4 = 8.$$

(2) $\because \overline{EF} \parallel \overline{BD}, \overline{GH} \parallel \overline{BD}, \therefore \overline{EF} \parallel \overline{GH}$,

又 $\overline{EF} = \overline{GH}$ ，故四邊形 $EFHG$ 為平行四邊形。



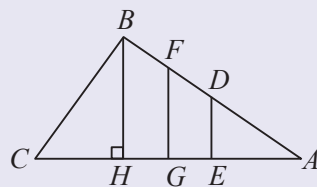
答：(1) 8 (2) 是。



會考觀測站 精熟演練題 搭配自評第 5 題

- 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ，並交於 H 點， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AH}$ 的中點， F 、 G 分別為 $\overline{DB}$ 、 $\overline{EH}$ 的中點，若 $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{CH} = 6$ ，則 $\overline{DE} + \overline{FG} = ?$

10



1-3 相似多邊形

① 圖形的縮放

可搭配附件 1 操作

對應學習內容 S-9-1

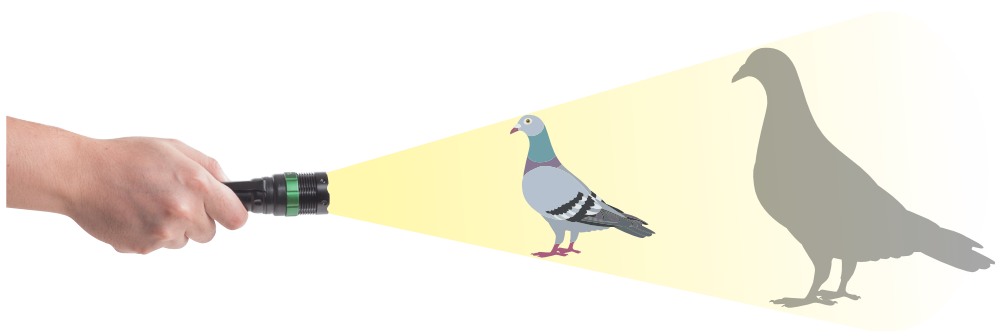
教學眉批

■ 本節中，「圖形縮放」的架構如下：

- (1) 縮放中心對點的（距離）縮放。
- (2) 縮放中心對線段的縮放：
 - ① 縮放中心不在線段上。
 - ② 縮放中心在線段上。
- (3) 縮放中心對角的縮放。
- (4) 縮放中心對三角形的縮放。
- (5) 縮放中心對多邊形的縮放。

每個物件經放大或縮小後，雖然大小和實物不同，但其形狀是相同的。用手電筒（光源）照射動物圖案，會在牆上看到它的影子，兩者的形狀相同，但大小不同。

因此，我們可以將手電筒光源視為縮放中心，經過光源直線照射動物圖案的影子，就是此動物圖案的縮放圖形。

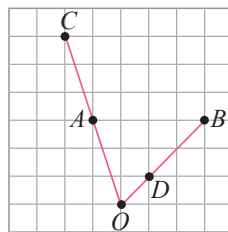


為了說明這個原理，我們先來了解以某固定點為縮放中心，任一點到此固定點距離的縮放關係。

▶ 線段的縮放

如圖，在平面上找一點 O ，視為光源固定不動，接著任取兩點 A 、 B ，

- (1) 在 $\overrightarrow{OA}$ 上取一點 C ，使得 $\overline{OC} : \overline{OA} = 2 : 1$ ，此時就稱 C 點是以 O 點為縮放中心，將 A 點與 O 點的距離縮放 2 倍所得到的對應點。
- (2) 在 $\overrightarrow{OB}$ 上取一點 D ，使得 $\overline{OD} : \overline{OB} = \frac{1}{3} : 1$ ，此時就稱 D 點是以 O 點為縮放中心，將 B 點與 O 點的距離縮放 $\frac{1}{3}$ 倍所得到的對應點。



考

會考觀測站

加強演練題

搭配課文

- 邊長為 5 公分的正方形，經影印機縮放成 120% 後，其縮放圖的邊長是多少公分？
6 公分

教學眉批

- 縮放中心在原線段或其延長線上，只需分別考慮縮放中心對原線段兩端點的縮放即可。
- 當縮放中心不在原線段或其延長線上，則縮放後的線段與原線段平行。
- 當縮放中心在原線段或其延長線上，則縮放後的線段會原線段上或在原線段的延長線上。

如圖， $\overline{AB}$ 為一已知線段， A' 、 B' 兩點是以 O 點為縮放中心，將 A 、 B 兩點與 O 點的距離分別縮放 3 倍所得到的對應點，並連接 $\overline{A'B'}$ ，那麼 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{AB}$ 有什麼關係？

我們先說明 $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍。

說明

$\because \overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'} = 1 : 3, \therefore \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ (截線段與平行的判別)。

故 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{OA} : \overline{OA'} = 1 : 3$ (平行線截比例線段性質)，因此 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍。

接下來在 **探索活動** 中，我們將探討 $\overline{AB}$ 中每一點與 O 點的距離，縮放 3 倍的圖形與 $\overline{A'B'}$ 的關係。

探索活動 線段的縮放

1. 如圖，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的任一點，且 $\overline{OP}$ 與 $\overline{A'B'}$ 交於 P' 點，回答下列問題：

(1) $\overline{OP'}$ 的長度是否為 $\overline{OP}$ 的 3 倍？

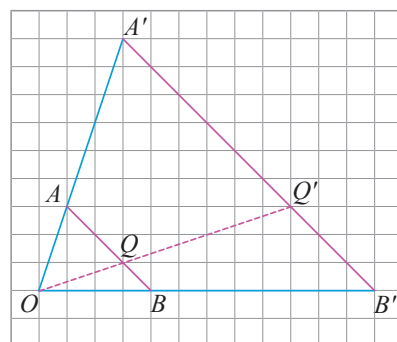
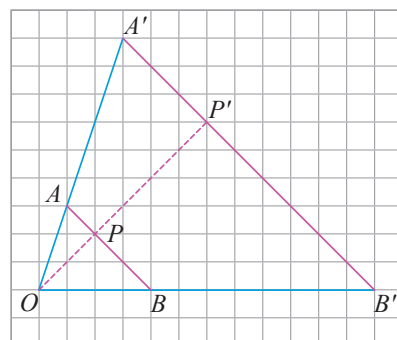
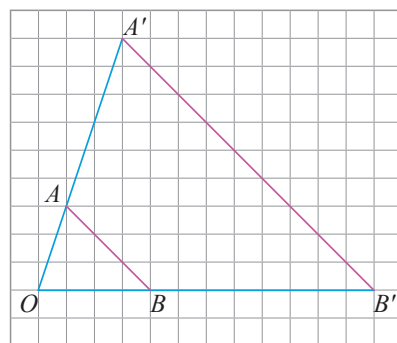
是。

(2) 以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的每一點與 O 點的距離縮放 3 倍後得到的點會在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？

會。

2. 如圖，若 Q' 為 $\overline{A'B'}$ 上的任一點，連接 $\overline{OQ'}$ 與 $\overline{AB}$ 交於一點 Q ，若以 O 點為縮放中心，將 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點是 Q' 嗎？

是。



考會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

- 如圖， $\overline{A'B'}$ 是以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形，若 $\overline{AA'} = 4$ 公分， $\overline{BB'} = 6$ 公分，則 $\overline{AB}$ 是多少公分？



5 公分

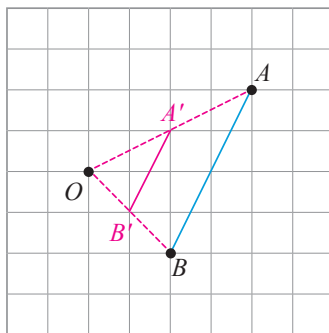
由前頁的  探索活動 可知，

- (1) 以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的點與 O 點的距離縮放 3 倍的點都會在 $\overline{A'B'}$ 上。
- (2) 在 $\overline{A'B'}$ 上的任一點 Q' ，都可以在 $\overline{AB}$ 上找到一點 Q ，使得 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍的點是 Q' 。

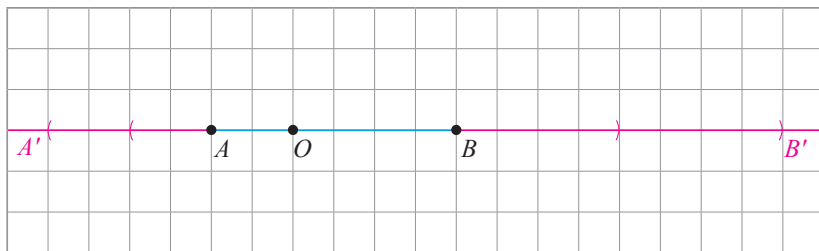
所以， $\overline{AB}$ 縮放 3 倍的圖形就是 $\overline{A'B'}$ ，其中 $\overline{A'B'} = 3 \overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ ，我們稱 $\overline{A'B'}$ 為 $\overline{AB}$ 的 3 倍縮放圖形。

隨堂練習

1. 如圖， O 點不在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的圖形。
 $\overline{A'B'}$ 即為所求。



2. 如圖， O 點在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形。



$\overline{A'B'}$ 即為所求。

關鍵提問

- 隨堂第 1 題，
 $\overline{OA} : \overline{AA'} = ?$
 $\overline{OB} : \overline{BB'} = ?$
都是 2 : 1。
- 隨堂第 2 題，
 $\overline{OA} : \overline{AA'} = ?$
 $\overline{OB} : \overline{BB'} = ?$
都是 1 : 2。

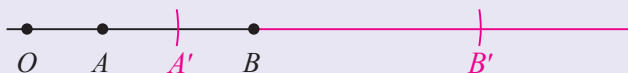
縮放的性質

1. 一線段經過縮放後仍是線段，且縮放後的線段與原線段平行，或在同一直線上。
2. 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

同理，一射線經過縮放後的圖形仍是射線，且縮放後的射線與原射線平行或在同一直線上；一直線經過縮放後的圖形仍是直線，且縮放後的直線與原直線平行或兩直線重合。

會考觀測站 加強演練題 搭配隨堂

- 如圖， O 點在 $\overline{AB}$ 外，畫出以 O 點為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後的圖形。



$\overline{A'B'}$ 即為所求。

▶ 多邊形的縮放

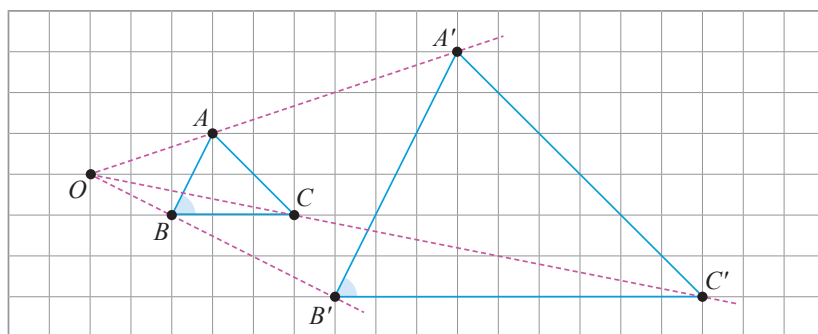
一個多邊形的各邊以同一個縮放中心經過相同倍率的縮放後，所得到新的圖形，我們稱此圖形是原多邊形的縮放圖形，其內角的度數會有什麼變化呢？先以三角形為例進行探索。

教學眉批

- 本探索活動主要是讓學生配合方格觀察其結果，重點不在推理的過程。
- 本探索活動主要探討：
 - (1) 三角形縮放後，對應的角度不變。
 - (2) 三角形縮放 r 倍後，對應的邊長為原邊長的 r 倍，在前面已討論，故不是本探索活動的重點。
- 小學時曾學過對應頂點、對應角與對應邊等數學名詞，但「對應邊成比例」這詞是第一次出現。

探索活動 三角形的縮放

如圖，已知 $\triangle ABC$ 及外部一點 O ，以 O 點為縮放中心，分別將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 縮放3倍後，得到 $\triangle A'B'C'$ ，則稱 $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的3倍縮放圖形。



(1) $\angle OBA$ 與 $\angle OB'A'$
是否相等？為什麼？

∵ 縮放後的線段與原線段平行，
即 $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ，
∴ $\angle OBA = \angle OB'A'$
(同位角相等)。

(2) $\angle OBC$ 與 $\angle OB'C'$
是否相等？為什麼？

∵ 縮放後的線段與原線段平行，
即 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，
∴ $\angle OBC = \angle OB'C'$
(同位角相等)。

(3) $\angle ABC$ 與 $\angle A'B'C'$
是否相等？為什麼？

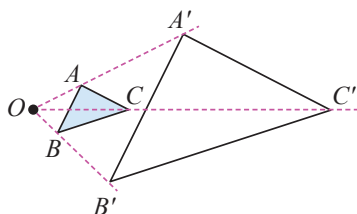
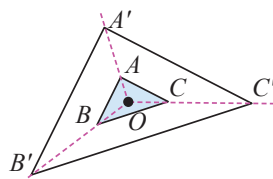
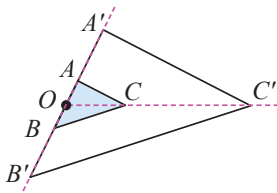
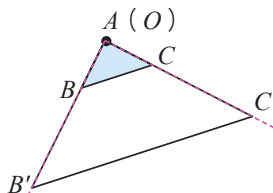
$\angle ABC = \angle OBC - \angle OBA$
 $= \angle OB'C' - \angle OB'A'$
 $= \angle A'B'C'$ 。

由 **探索活動** 可知，將 $\triangle ABC$ 的圖形縮放3倍後得到 $\triangle A'B'C'$ ，其角度皆不變，即 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ 、 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ 、 $\angle ACB = \angle A'C'B'$ 。也就是說，縮放後的三角形與原來的三角形**對應邊成比例且對應角相等**。

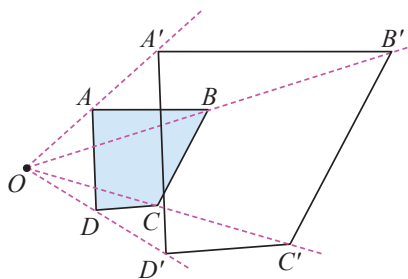
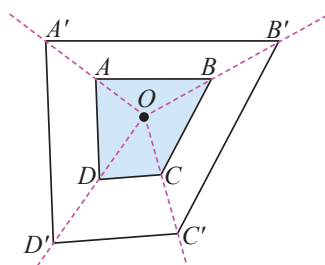
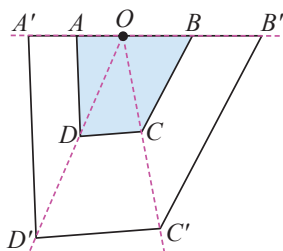
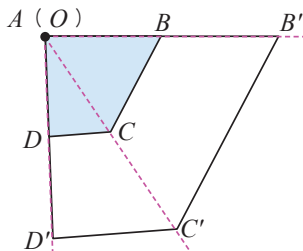
考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文

- 將 $\triangle ABC$ 縮放5倍得到 $\triangle DEF$ ，其中 A 、 B 、 C 的對應點分別為 D 、 E 、 F ，若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 5$ ，則：
 - (1) $\angle F =$ 110 度。
 - (2) $\overline{EF} =$ 25。

下面四個圖形是縮放中心 O 點分別在 $\triangle ABC$ 的外部、內部、邊上及頂點，縮放 3 倍後所得的圖形。附件 3 是圖一中的 $\triangle A'B'C'$ ，將其疊合在圖二～圖四檢驗，可以發現這些縮放後的三角形都全等。

圖一 O 點在三角形外部圖二 O 點在三角形內部圖三 O 點在三角形邊上圖四 O 點在三角形頂點

同樣的，縮放中心 O 點分別在不同的位置，將同一個四邊形縮放 2 倍後，所得的新四邊形也都會全等，且與原四邊形的對應邊成比例、對應角皆相等。

圖五 O 點在四邊形外部圖六 O 點在四邊形內部圖七 O 點在四邊形邊上圖八 O 點在四邊形頂點

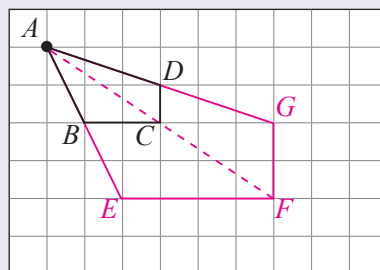
教學眉批

- 新圖形與原圖形對應邊長的比值，就是縮放的倍數。
- 教師可補充說明，將一個圖形做 r 倍縮放，當 $r > 1$ 時，縮放後的圖形為原圖形的放大圖；當 $0 < r < 1$ 時，縮放後的圖形為原圖形的縮小圖。

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

- 如圖，以 A 點為縮放中心，畫出四邊形 $ABCD$ 縮放 2 倍後的圖形。

四邊形 $AEFG$ 即為所求。



教學眉批

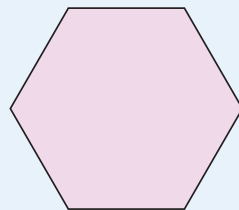
- 藉由「三角形、四邊形在不同的縮放中心，所得的圖形都全等。」說明多邊形在不同的縮放中心，所得的新多邊形都會全等，且
 - (1) 對應角相等。
 - (2) 對應邊成比例。
- 例題 1 和隨堂練習是藉由正多邊形來說明縮放的性質。

事實上，縮放中心所在位置不同，對同一個多邊形做 r 倍縮放，所得的圖形都會全等，則此縮放後的新圖形，稱為原多邊形的 r 倍縮放圖，它們會與原多邊形的對應邊成比例、對應角相等。

例 1 多邊形的縮放

搭配習作 P13 基礎題 1

右圖是邊長為 2 公分的正六邊形，將它縮放 3 倍後所得的縮放圖形，其邊長與每一個內角度數分別是多少？



解 ∵ 縮放後的多邊形，會與原多邊形的對應邊成比例、對應角相等，

∴ 邊長變成原來的 3 倍，即 $2 \times 3 = 6$ (公分)。

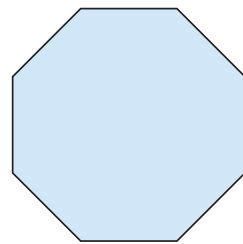
而正六邊形的每一個內角是 120° ，

∴ 每一個內角度數保持不變，仍是 120° 。

正 n 邊形的每一個內角是 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ 。

隨堂練習

右圖是邊長為 1.5 公分的正八邊形，將它縮放 2 倍後所得的縮放圖形，其邊長與每一個內角度數分別是多少？



∵ 縮放後的多邊形，會與原多邊形的對應邊成比例、對應角相等，

∴ 邊長變成原來的 2 倍，也就是 $2 \times 1.5 = 3$ (公分)。

而正八邊形的每一個內角是 135° ，

∴ 每一個內角度數保持不變，仍是 135° 。



考 會考觀測站 加強演練題 搭配例 1

- 有一邊長為 4 公分的正三角形，將它縮放 0.5 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？
內角度數為 60° ，邊長為 2 公分。

② 相似多邊形

對應學習內容 S-9-2

教學眉批

- 本教材以對應角相等、對應邊成比例定義相似形。
- 本書中規定以對應形式寫出相似關係，宜讓同學充分了解符號所表示的意義。

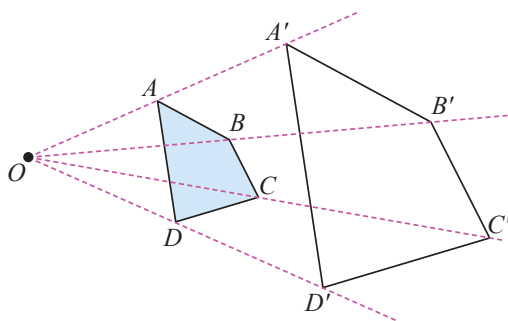


上圖是艾美設計的一組俄羅斯套娃平面圖，它們看起來相似。

兩個邊數一樣的多邊形，若其對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。通常以符號「 $\sim$ 」表示它們的相似關係，讀作「相似於」。

如圖，四邊形 $A'B'C'D'$ 是四邊形 $ABCD$ 的縮放圖形，所以對應角相等、對應邊成比例，因此四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 。

也就是說，兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。



例如：四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，

所以 $\angle A = \angle A'$ 、 $\angle B = \angle B'$ 、 $\angle C = \angle C'$ 、 $\angle D = \angle D'$ （對應角相等），

且 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$ （對應邊成比例）。

相似多邊形

1. 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。
2. 如果兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。

一般而言，「四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 」只表示此兩圖形相似，不一定表示各頂點依序對應。在本教材中各頂點皆依序對應，例如：「四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 」表示 A 對應到 A' ， B 對應到 B' ， C 對應到 C' ， D 對應到 D' 。

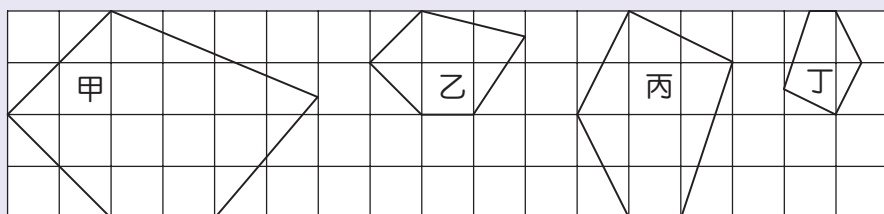


會考觀測站

加強演練題

搭配課文

- 下列圖形中，哪兩個是相似多邊形？丙、丁



我們可利用「對應角相等」與「對應邊成比例」判別兩個多邊形是否相似。

測 基會試題

- ◆ 90 基測 I 第 26 題
- ◆ 93 基測 II 第 1 題
- ◆ 96 基測 II 第 32 題

Q 教學眉批

- 例題 2 中的邊長為 $2\sqrt{3}$ 、 $4\sqrt{3}$ ，乃是配合角度。

Q 教學眉批

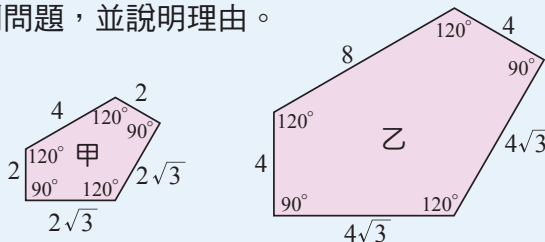
- 任意兩個同邊數的正 n 邊形一定相似。
- 教師可讓學生理解如何判別多邊形相似。例如：兩個邊數相同的多邊形，如果只有對應角相等或對應邊成比例，將其中一個多邊形縮放後，就無法與另一個多邊形全等。

例 2 相似多邊形的判別

自評 P61 第 2 題

如圖，甲、乙都是五邊形，回答下列問題，並說明理由。

- (1) 甲與乙的對應角是否相等？
- (2) 甲與乙的對應邊是否成比例？
- (3) 甲與乙是否相似？



解 (1) 是。

∵ 對應角分別相等。

(2) 是。

∵ 對應邊長比是 1 : 2。

(3) 是。

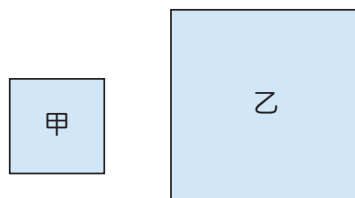
∵ 對應角相等、對應邊成比例，

∴ 甲與乙相似。

隨堂練習

如圖，甲是邊長為 1 的正方形，乙是邊長為 2 的正方形，回答下列問題：

- (1) 甲與乙的對應角是否相等？
- (2) 甲與乙的對應邊是否成比例？
- (3) 甲與乙是否相似？



(1) 是。

∵ 對應角分別相等。

(2) 是。

∵ 對應邊長比是 1 : 2。

(3) 是。

∵ 對應角相等、對應邊成比例，

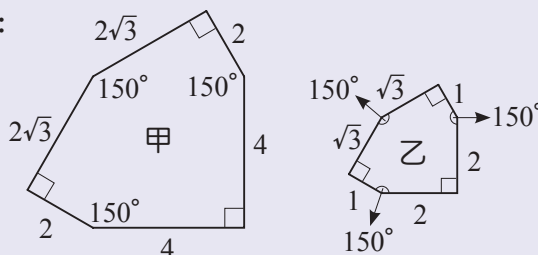
∴ 甲與乙相似。

兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」如果只有一個條件成立，則這兩個多邊形是否一定相似？

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 2

■ 如圖，甲、乙都是六邊形，回答下列問題：

- (1) 甲與乙的對應角是否相等？ 是
- (2) 甲與乙的對應邊是否成比例？ 是
- (3) 甲與乙是否相似？ 是



例 3 相似多邊形的判別

自評 P61 第 2 題

 教學眉批

回答下列問題，並說明理由。

(1)兩個任意的長方形是否相似？ (2)兩個任意的菱形是否相似？

說明 (1)兩個長方形不一定相似。

∵長方形的四組對應角雖然相等（皆為 90° ），

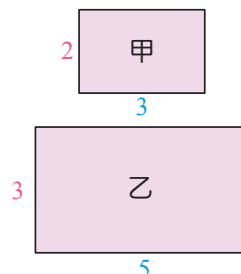
但對應邊長不一定成比例。

例如：右圖中，甲、乙兩個長方形對應邊長的

比分別為 $3:5$ 與 $2:3$ ，

∵ $3:5 \neq 2:3$ ，← 要比較 $3:5$ （較長邊之比）和 $2:3$ （較短邊之比）是否相等。

∴甲、乙兩個長方形不相似。

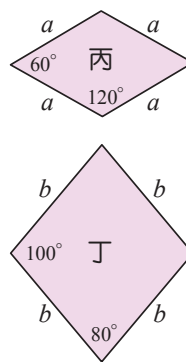


(2)兩個菱形不一定相似。

∵兩個菱形的對應邊雖然成比例，但對應角不一定相等。

例如：右圖中， 60° 和 120° 皆無法找到對應相等的角，

∴此兩個菱形不相似。



■ 是相似形的情形應說明理由，不相似的情形則只須舉反例說明即可，這是在數學上常用的方法。

■ 例題 3 沒有提到 $3:3 \neq 2:5$ ，是因為一圖形的較長邊不可能對應到另一圖形的較短邊，學生若有此概念，即可省略 $3:3 \neq 2:5$ 的判別程序。

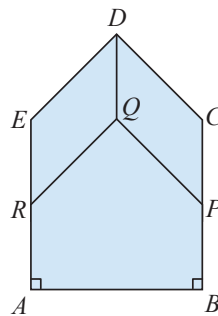
測 基會試題

- ◆ 91 基測 II 第 25 題
- ◆ 92 基測 II 第 19 題
- ◆ 93 基測 I 第 9 題
- ◆ 94 基測 I 第 22 題
- ◆ 94 基測 II 第 16 題
- ◆ 98 基測 I 第 29 題
- ◆ 99 基測 II 第 18 題

隨堂練習

如圖， $ABCDE$ 為五邊形， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AE}$ ，四邊形 $DERQ$ 與四邊形 $DCPQ$ 皆為平行四邊形， P 、 R 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AE}$ 的中點，回答下列問題：

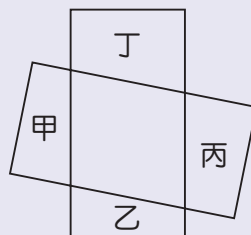
- (1)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應角是否相等？是。
- (2)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應邊是否成比例？否。
- (3)五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 是否相似？否。



從前面的例題與 **隨堂練習** 可知，當兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」條件缺一時，則這兩個多邊形不一定相似。

考 94 基測 I 第 22 題 搭配隨堂

- (D) 右圖是兩全等長方形玻璃板放置的情形，其中分成甲、乙、丙、丁四塊梯形及一塊平行四邊形。若甲、乙、丙、丁的面積比為 $4:3:5:6$ ，則此四個梯形的關係，下列何者正確？
- (A) 甲乙相似 (B) 甲丙相似
(C) 乙丁相似 (D) 甲乙丙丁均不相似



測 基會試題

- ◆ 91 基測 I 第 9 題
- ◆ 91 基測 II 第 9 題
- ◆ 95 基測 II 第 12 題
- ◆ 100 基測 II 第 33 題

例 4 相似多邊形的對應關係

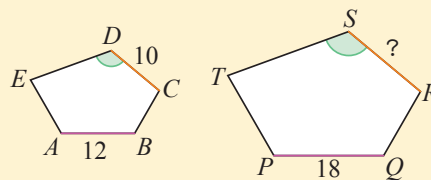
搭配習作 P13 基礎題 2 自評 P62 第 3 題

已知五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $PQRST$ ， A 、 B 、 C 、 D 、 E 的對應頂點依序為 P 、 Q 、 R 、 S 、 T ，回答下列問題：

- (1) 若 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{CD} = 10$ ， $\overline{PQ} = 18$ ，求 $\overline{RS}$ 的長。
- (2) 若 $\angle P + \angle Q = 240^\circ$ ， $\angle R : \angle S : \angle T = 5 : 6 : 4$ ，求 $\angle D$ 。

思路分析

五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $PQRST$ ， $\overline{AB}$ 的對應邊是 $\overline{PQ}$ ； $\overline{CD}$ 的對應邊是 $\overline{RS}$ ，利用相似多邊形對應邊成比例、對應角相等的性質來做此題。



- 解**
- (1) $\because$ 相似形的對應邊成比例，

$$\therefore \overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{CD} : \overline{RS}$$

$$12 : 18 = 10 : \overline{RS}$$

$$\overline{RS} = 15。$$
 - (2) 設 $\angle R = 5r^\circ$ ， $\angle S = 6r^\circ$ ， $\angle T = 4r^\circ$ ， $r \neq 0$ ，

$$\therefore \angle P + \angle Q + \angle R + \angle S + \angle T = 540^\circ$$

$$\therefore 240 + 5r + 6r + 4r = 540, r = 20$$
 又相似形的對應角相等，
 故 $\angle D = \angle S = 6 \times 20^\circ = 120^\circ。$

關鍵提問

- 四邊形 $ABCD$ 是四邊形 $PQRS$ 的幾倍縮放圖？
1.5 倍。

隨堂練習

已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ， A 、 B 、 C 、 D 的對應頂點依序為 P 、 Q 、 R 、 S ，若 $\angle Q = 76^\circ$ ， $\angle R = 64^\circ$ ， $\angle S = 100^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{PQ} = 8$ ，求 $\angle A$ 及 $\overline{QR}$ 。

- (1) $\because$ 相似形的對應角相等

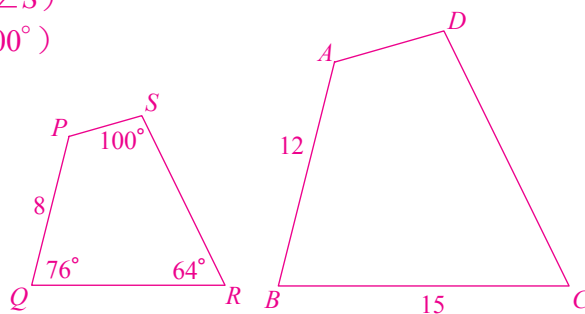
$$\therefore \angle A = \angle P = 360^\circ - (\angle Q + \angle R + \angle S)$$

$$= 360^\circ - (76^\circ + 64^\circ + 100^\circ)$$

$$= 120^\circ$$

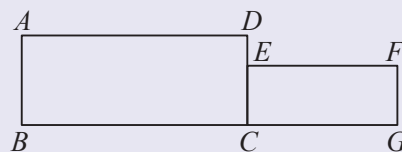
- (2) $\because$ 相似形的對應邊成比例

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}, \text{ 即 } \frac{12}{8} = \frac{15}{\overline{QR}},$$
 故 $\overline{QR} = 10。$



考 95 基測 II 第 12 題 搭配例 4

- (D) 右圖兩長方形 $ABCD$ 、 $ECGF$ 為相似形，且 $\overline{AD}$ 的對應邊為 $\overline{EF}$ 。若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{FG} = 4$ ， $\overline{BG} = 25$ ，則兩長方形的面積和為何？
 (A) 115 (B) 120 (C) 125 (D) 130



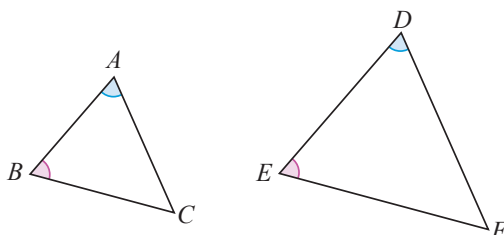
③ 三角形的相似性質

對應學習內容 S-9-2

兩個多邊形必須對應邊成比例與對應角相等，這兩個多邊形才會相似。至於兩個三角形的相似，是否這些條件也必須都符合才相似呢？我們曾經學過三角形的全等性質有 SSS 、 SAS 、 ASA 、 AAS 、 RHS 等，那麼要判別兩個三角形是否相似，也會有類似的性質嗎？接下來，我們來探討三角形的相似性質。

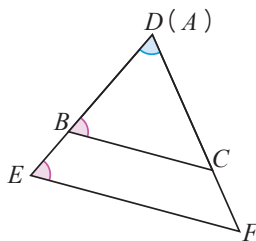
▶ AA 相似性質

如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
若 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ，
則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



由於 $\angle A = \angle D$ ，
可將 $\triangle ABC$ 疊合在 $\triangle DEF$ 上，
使得 A 點落在 D 點上，
則 B 、 C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。

又 $\angle B = \angle E$ ，所以 $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，
可得 $\angle C = \angle F$ ，
且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ 。



由上可知， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

Q 教學眉批

- 此處的教學重點不在證明的書寫，而是性質的認知與使用。
- 有關 AA 相似性質的另一種說明，教師可參考備課用書 P50，並視班級情況補充。

AA 相似性質

若兩個三角形的兩組對應角相等，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **AA 相似性質**。



會考觀測站 加強演練題 搭配課文

- 下列關於相似三角形的敘述，哪幾項是正確的？
(A) 任意兩個正三角形相似
(B) 任意兩個等腰三角形相似
(C) 任意兩個直角三角形相似
(D) 任意兩個等腰直角三角形相似
(A)(D)

若兩個三角形中，有兩組角對應相等，則這兩個三角形的第三組角也會對應相等，所以 AA 相似性質也可以稱為 **AAA 相似性質**。

教學眉批

■ 教師可將此題與 1-2 節平行線截比例線段性質連結；也可以與圖形縮放連結（將 A 點視為縮放中心）。

測 基會試題

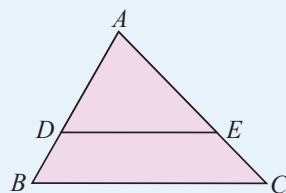
- ◆ 94 基測 II 第 14 題
- ◆ 96 基測 I 第 29 題

例 5 平行線與相似三角形

搭配習作 P14 基礎題 3

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD}=6$ ， $\overline{BD}=3$ ， $\overline{DE}=8$ 。

- (1) 說明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。
- (2) 求 $\overline{BC}$ 。



解 (1) 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\therefore \angle ADE = \angle B$ （同位角相等），

又 $\angle A = \angle A$ （公用角），

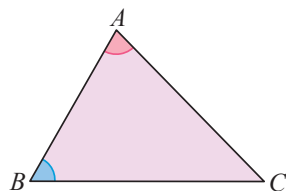
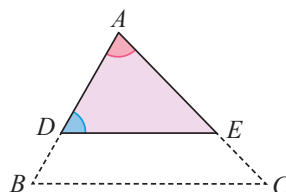
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ （ AA 相似性質）。

(2) $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$

$8 : \overline{BC} = 6 : (6+3)$

$\overline{BC} = 12$



隨堂練習

如圖， $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點， $\overline{EF}=18$ ， $\overline{BC}=27$ ， $\overline{AE}=8$ ，求 $\overline{AC}$ 。

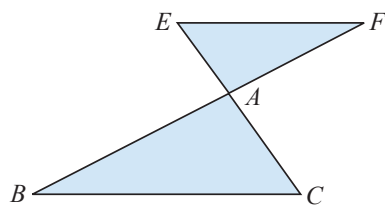
$\because \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$ （ AA 相似性質）

故 $\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{BC}$

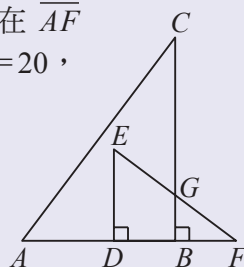
$8 : \overline{AC} = 18 : 27$

$\overline{AC} = 12$



考 94 基測 II 第 14 題 搭配例 5

- (B) 如圖， $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 皆為直角三角形， D 、 B 兩點在 $\overline{AF}$ 上， $\overline{BC}$ 與 $\overline{EF}$ 相交於 G 點。若 $\overline{AC}=25$ ， $\overline{EF}=15$ ， $\overline{BC}=20$ ， $\overline{DE}=9$ ，且 $\overline{DB} = \frac{2}{5} \overline{AB}$ ，則 $\overline{CG} = ?$
- (A) 14.5 (B) 15.5 (C) 16.5 (D) 17.5



例6 AA 相似性質

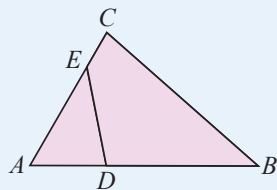
可搭配附件 5 操作

自評 P62 第 4 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
已知 $\angle AED = \angle B$ ， $\overline{AD} = 10$ ， $\overline{BD} = 20$ ， $\overline{AE} = 15$ 。

(1) 說明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ 。

(2) 求 $\overline{EC}$ 。



教學眉批

■ 例題 6 可請學生先猜測哪兩個三角形相似，再進行驗證其猜測是否正確。

基會試題

- ◆ 94 基測 I 第 19 題
- ◆ 95 基測 I 第 6 題
- ◆ 98 基測 II 第 11 題
- ◆ 99 基測 I 第 4 題
- ◆ 100 基測 II 第 7 題
- ◆ 104 會考第 23 題
- ◆ 106 會考第 26 題
- ◆ 111 會考第 20 題

解 (1) 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ACB$ 中，

$\because \angle AED = \angle B$ (已知)，

$\angle A = \angle A$ (公用角)，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (AA 相似性質)。

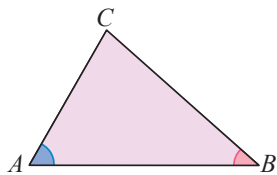
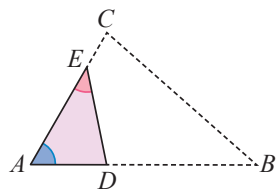
(2) $\because \triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，

$\therefore \overline{AD} : \overline{AC} = \overline{AE} : \overline{AB}$

$10 : \overline{AC} = 15 : (10 + 20)$

$\overline{AC} = 20$

故 $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 20 - 15 = 5$ 。



隨堂練習

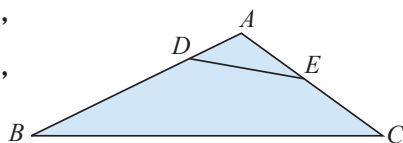
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，
已知 $\angle ADE = \angle C$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ，
 $\overline{BC} = 12$ ，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 。

由 AA 相似性質可知 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，

$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$

$6 : 2 = 8 : \overline{AE} = 12 : \overline{DE}$

$\overline{AE} = \frac{8}{3}$ ， $\overline{DE} = 4$ 。

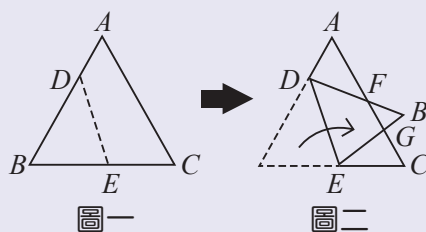


自評 P63 第 5 題

考

111 會考 第 20 題 搭配例 6

- (C) 圖一為一張正三角形紙片 ABC ，其中 D 點在 $\overline{AB}$ 上， E 點在 $\overline{BC}$ 上。今以 $\overline{DE}$ 為摺線將 B 點往右摺後， $\overline{BD}$ 、 $\overline{BE}$ 分別與 $\overline{AC}$ 相交於 F 點、 G 點，如圖二所示。若 $\overline{AD} = 10$ ， $\overline{AF} = 16$ ， $\overline{DF} = 14$ ， $\overline{BF} = 8$ ，則 $\overline{CG}$ 的長度為多少？
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

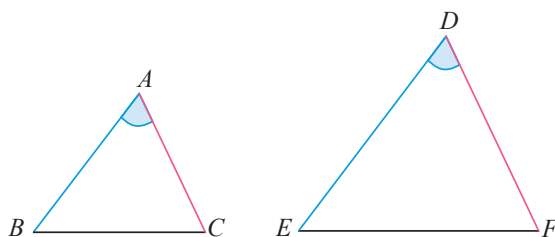


教學眉批

- 有關 SAS 相似性質的另一種說明，教師可參考備課用書 P51，並視班級情況補充。

▶ SAS 相似性質

如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
若 $\angle A = \angle D$ ， $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，
則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似呢？



由於 $\angle A = \angle D$ ，
可將 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 疊合，
使得 A 點落在 D 點上，
則 B 、 C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。

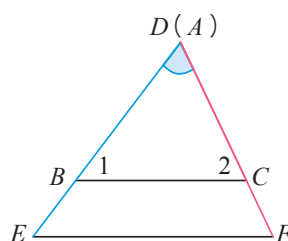


又 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ，即 $\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DF}}$ ，

所以 $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

因此 $\angle 1 = \angle E$ 、 $\angle 2 = \angle F$ (同位角相等)，

且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ 。



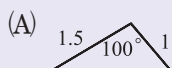
由上可知， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

📁 SAS 相似性質

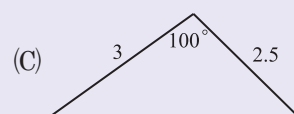
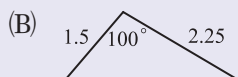
若兩個三角形有一組對應角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **SAS 相似性質**。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文

- 下列三個三角形中，哪兩個三角形相似？



(A)(B)



例 7 SAS 相似性質

可搭配附件 6 操作

搭配習作 P14 基礎題 4

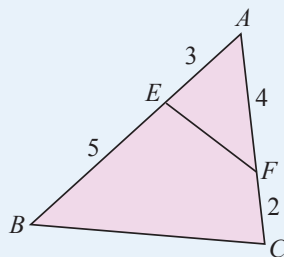
自評 P62 第 4 題

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AE}=3$ ， $\overline{EB}=5$ ， $\overline{AF}=4$ ， $\overline{FC}=2$ ，

回答下列問題：

(1) $\triangle AEF$ 與 $\triangle ACB$ 是否相似？為什麼？

(2) 若 $\overline{EF}=3.3$ ，求 $\overline{BC}$ 。



教學眉批

- $\triangle ABC$ 與 $\triangle AFE$ 有一個共同頂點（公用角），由對應角找對應邊通常較為容易。
- SAS 相似性質在運用上可先找到對應角，再找到此兩角的夾邊對應成比例。

基會試題

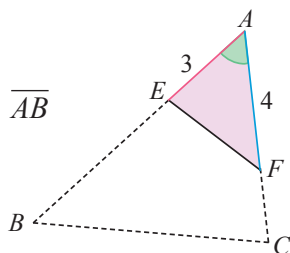
- ◆ 90 基測 II 第 9 題
- ◆ 92 基測 II 第 6 題
- ◆ 96 基測 I 第 31 題
- ◆ 100 聯測第 26 題
- ◆ 106 會考非選 2

解 (1) 在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle ACB$ 中，

$$\left. \begin{aligned} \therefore \overline{AE} : \overline{AC} &= 3 : (4+2) = 3 : 6 = 1 : 2 \\ \overline{AF} : \overline{AB} &= 4 : (3+5) = 4 : 8 = 1 : 2 \end{aligned} \right\} \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AF} : \overline{AB}$$

又 $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$ (SAS 相似性質)。

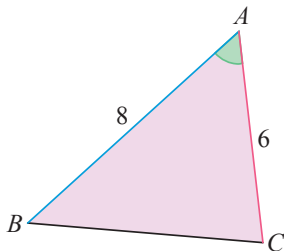


(2) $\because \triangle AEF \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \overline{EF} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

$$3.3 : \overline{BC} = 3 : 6$$

$$\overline{BC} = 6.6。$$



隨堂練習

自評 P63 第 6 題

關鍵提問

如圖， $\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=\overline{AE}=20$ ，

$\overline{AF}=40$ ， $\overline{EF}=25.6$ ，求 $\overline{BC}$ 。

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AEF$ 中，

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AE} = 10 : 20 = 1 : 2，$$

$$\overline{AC} : \overline{AF} = 20 : 40 = 1 : 2，$$

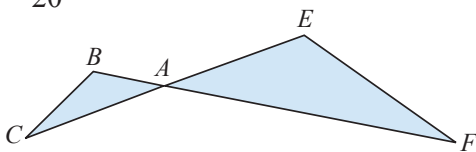
又 $\angle BAC = \angle EAF$ ，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AEF$ (SAS 相似性質)。

故 $\overline{BC} : \overline{EF} = \overline{AB} : \overline{AE}$

$$\overline{BC} : 25.6 = 10 : 20$$

$$\overline{BC} = 12.8。$$



- 隨堂： $\angle B$ 、 $\angle C$ 分別與 $\triangle AEF$ 的哪個角相等？

$$\begin{aligned} \angle B &= \angle E、 \\ \angle C &= \angle F。 \end{aligned}$$

考 100 聯測第 26 題 搭配例 7

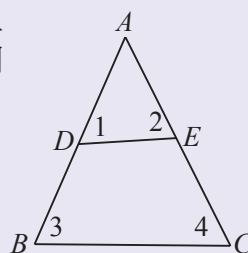
- (D) 右圖為 $\triangle ABC$ ，其中 D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}=31$ ， $\overline{DB}=29$ ， $\overline{AE}=30$ ， $\overline{EC}=32$ 。若 $\angle A=50^\circ$ ，則圖中 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 的大小關係，下列何者正確？

(A) $\angle 1 > \angle 3$

(B) $\angle 2 = \angle 4$

(C) $\angle 1 > \angle 4$

(D) $\angle 2 = \angle 3$



教學眉批

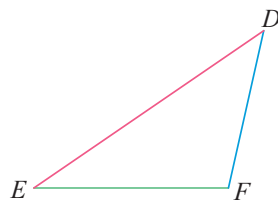
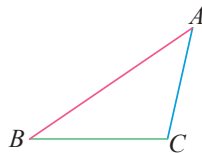
- 有關 SSS 相似性質的另一種說明，教師可參考備課用書 P52，並視班級情況補充。

SSS 相似性質

如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，

$$\text{若 } \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = r,$$

則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



將 $\triangle ABC$ 縮放 r 倍得到 $\triangle A'B'C'$ ，

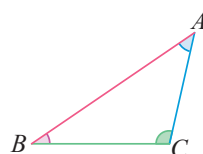
可得 $\angle A = \angle A'$ 、 $\angle B = \angle B'$ 、 $\angle C = \angle C'$ 。…… ①

$$\text{且 } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r$$

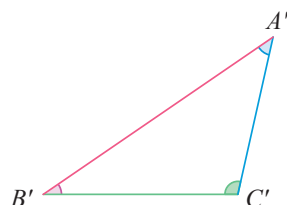
$$\text{所以 } \overline{A'B'} = r \overline{AB} = \overline{DE},$$

$$\overline{A'C'} = r \overline{AC} = \overline{DF},$$

$$\overline{B'C'} = r \overline{BC} = \overline{EF},$$



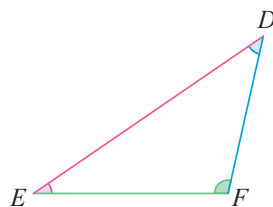
縮放
r 倍



因此， $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$ (SSS 全等性質)。

故 $\angle A' = \angle D$ 、 $\angle B' = \angle E$ 、 $\angle C' = \angle F$ 。…… ②

由①、②可知， $\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 。



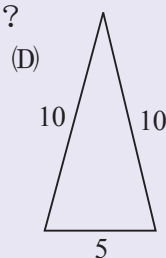
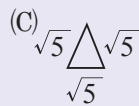
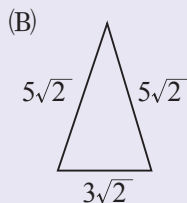
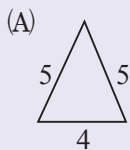
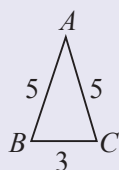
因此， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

SSS 相似性質

若兩個三角形的三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **SSS 相似性質**。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文

- (B) 如圖，已知 $\triangle ABC$ ，則下列哪一個圖形與 $\triangle ABC$ 相似？



例8 SSS 相似性質

可搭配附件 7 操作

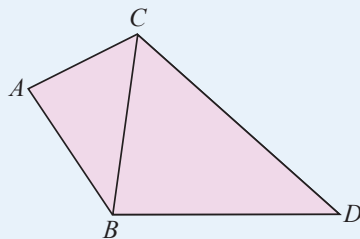
搭配習作 P14 基礎題 5 自評 P62 第 4 題

教學眉批

■ 教師宜提醒學生，對應邊的找法應秉持「大對大，小對小」的原則。

如圖， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=8$ ， $\overline{BC}=12$ ， $\overline{BD}=15$ ， $\overline{CD}=18$ ，回答下列問題：

- (1) 為什麼 $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ？
- (2) $\angle D$ 與 $\triangle ABC$ 的哪個角相等？



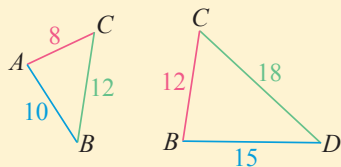
思路分析

可以分別從兩個三角形邊長的大小關係找到對應邊。

將 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BDC$ 的三邊長分別由小到大排列，

$\triangle ABC$ 的邊長分別為 $\overline{AC}=8$ ， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{BC}=12$ ，

$\triangle BDC$ 的邊長分別為 $\overline{BC}=12$ ， $\overline{BD}=15$ ， $\overline{CD}=18$ 。



解 (1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BDC$ 中，

$$\left. \begin{aligned} \overline{AC} : \overline{BC} &= 8 : 12 = 2 : 3 \\ \overline{AB} : \overline{BD} &= 10 : 15 = 2 : 3 \\ \overline{BC} : \overline{CD} &= 12 : 18 = 2 : 3 \end{aligned} \right\} \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BDC$ (SSS 相似性質)。

(2) $\therefore \triangle BDC \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore \angle D = \angle ABC$ 。

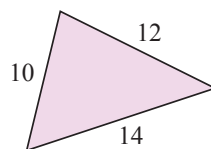
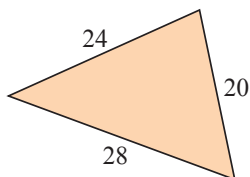
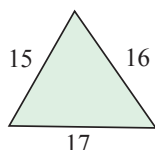
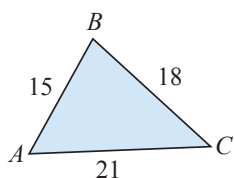
隨堂練習

下列哪些三角形與 $\triangle ABC$ 相似，在 $\square$ 中打「✓」。

(1) $\square$

(2) ☒

(3) ☒



考 會考觀測站

加強演練題

搭配例 8

■ 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 $\overline{AB}$ 上，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=9$ ， $\overline{CD}=\overline{CB}=6$ ， $\overline{AD}=5$ ，回答下列問題：

(1) 為什麼 $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ ？

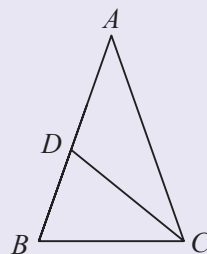
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDB$ 中，

$$\therefore \overline{AB} : \overline{CD} = \overline{AC} : \overline{CB} = \overline{BC} : \overline{DB} = 3 : 2$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CDB$ (SSS 相似性質)

(2) $\angle A$ 和 $\triangle CDB$ 的哪個角相等？

$\angle DCB$ 。





數問速答

- 配合小節重點回顧，教師可提供 QRCode 給學生，進行線上同步測驗與複習。



- 上述題目可參考本頁下方數問速答。

1 縮放的性質

- (1) 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。
- (2) 任意一個多邊形經過縮放 r 倍後的新多邊形，其對應角的角度不變，對應的邊長變成原來的 r 倍。

2 相似多邊形

- (1) 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。

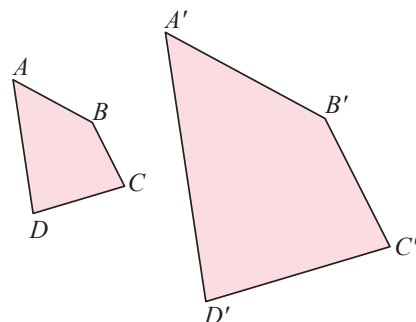
例 如圖，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $A'B'C'D'$ ，

$$\angle A' = \angle A, \angle B' = \angle B,$$

$$\angle C' = \angle C, \angle D' = \angle D \text{ (對應角相等),}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} \text{ (對應邊成比例),}$$

就稱四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 。



- (2) 若兩個多邊形相似，則其對應角相等，對應邊成比例。

3 三角形的相似性質

AA 相似性質	SAS 相似性質	SSS 相似性質
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$	$\angle A = \angle D, \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

數問速答

- 判別下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。
- (○) (1) 將一個邊長為 10 公分的正十邊形，縮放 2 倍後，則每個內角度數必定不變。
- (×) (2) 任意兩個等腰梯形必定相似。
- (×) (3) 任意兩個直角三角形必定相似。
- (○) (4) 只要兩個三角形的兩組對應角相等，則這兩個三角形必定相似。



1-3 自我評量

- ① 如圖，在 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 上分別取 A' 、 B' 、 C' 三點，
使 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ ，且 $A'B' = 2AB$ 。(只要作圖，不必寫出作法)

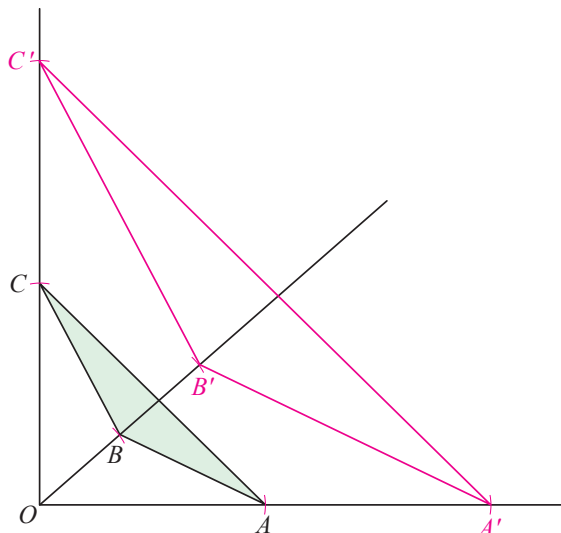
課 P47 課文

測 基會試題

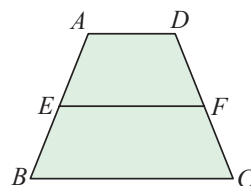
- ◆ 90 基測 II 第 26 題
- ◆ 96 基測 II 第 24 題

關鍵提問

- 三角形 $A'B'C'$ 是三角形 ABC 的幾倍縮放圖？
2 倍。



- ② 如圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$ 的中點，已知 $\overline{AD} = 3$ ，
 $\overline{BC} = 7$ ，回答下列問題： 課 P50、51 例 2、3



關鍵提問

- $\overline{EF}$ 的長度是多少？
5。

(1) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $EBCF$ ：

- ① 對應角是否相等？ ☒ 是 ☐ 否
② 對應邊是否成比例 ☐ 是 ☒ 否
③ 兩圖形是否相似？ ☐ 是 ☒ 否

(2) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $ABCD$ ：

- ① 對應角是否相等？ ☒ 是 ☐ 否
② 對應邊是否成比例？ ☐ 是 ☒ 否
③ 兩圖形是否相似？ ☐ 是 ☒ 否



會考觀測站

基礎演練題

搭配自評第 3 題

- 已知五邊形的邊長分別為 9、12、6、5、8，將此五邊形縮放後，原圖形邊長為 6 對應的新圖形邊長為 15，則縮放後的新五邊形周長為何？

100

3 已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 中， A 、 B 、 C 、 D 對應頂點為 A' 、 B' 、 C' 、 D' ，

(1) 若 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA} = 1 : 3 : 4 : 2$ ，四邊形 $A'B'C'D'$ 周長為 50，求 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{C'D'}$ 。

(2) 若 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 5 : 3$ ， $\angle D = 100^\circ$ ，求 $\angle A'$ 及 $\angle B'$ 。

課 P52 例 4

(1) $\because$ 四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} : \overline{D'A'} = 1 : 3 : 4 : 2,$$

$$\text{故 } \overline{A'B'} = 50 \times \frac{1}{1+3+4+2} = 5, \overline{C'D'} = 50 \times \frac{4}{1+3+4+2} = 20.$$

(2) 設 $\angle A = 2r^\circ$ ， $\angle B = 5r^\circ$ ， $\angle C = 3r^\circ$ ， $r \neq 0$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\therefore 2r + 5r + 3r + 100 = 360, r = 26$$

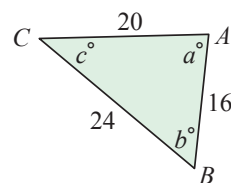
又相似形的對應角相等，

$$\text{故 } \angle A' = 2 \times 26^\circ = 52^\circ, \angle B' = 5 \times 26^\circ = 130^\circ.$$

答：(1) $\overline{A'B'} = 5$ ， $\overline{C'D'} = 20$ (2) $\angle A' = 52^\circ$ ， $\angle B' = 130^\circ$ 。

4 下列哪些三角形與 $\triangle ABC$ 相似，在 $\square$ 中打「 $\checkmark$ 」，

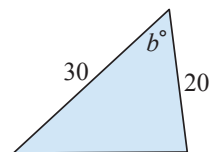
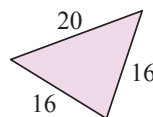
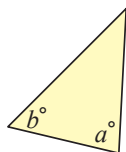
並寫出所用的相似性質： 課 P55、57、59 例 6~8



(1) ☒ AA 相似性質

(2) ☐ _____ 相似性質

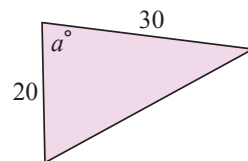
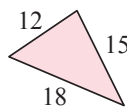
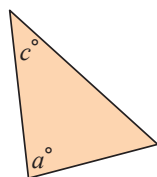
(3) ☒ SAS 相似性質



(4) ☒ AA 相似性質

(5) ☒ SSS 相似性質

(6) ☐ _____ 相似性質



考

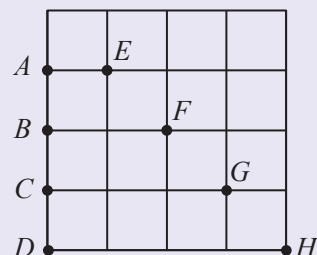
會考觀測站

基礎演練題

搭配自評第 4 題

■ (C) 如圖，方格紙上有 $A \sim H$ 八個點，下列敘述何者正確？

- (A) 梯形 $ABFE \sim$ 梯形 $ACGE$
- (B) 梯形 $ABFE \sim$ 梯形 $BCGF$
- (C) 梯形 $ABFE \sim$ 梯形 $BDHF$
- (D) 梯形 $ACGE \sim$ 梯形 $BDHF$



- 5 如圖，四邊形 $ABCD$ 是邊長為 8 的正方形， E 、 F 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 上， $\overline{AE}=2$ ，且 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，自 F 點作直線垂直 $\overline{EC}$ 且分別交 $\overline{EC}$ 、 $\overline{BC}$ 於 H 、 G ，回答下列問題：

課 P55 隨堂

(1) $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 是否相似？為什麼？

(2) 求 $\overline{BG}$ 。

(1) 在 $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 中，

∵ 四邊形 $ABCD$ 為正方形，

∴ $\angle B = \angle GCF = 90^\circ$ ， $\angle ECB + \angle BEC = \angle ECB + \angle FGC$

∴ $\angle BEC = \angle FGC$

故 $\triangle EBC \sim \triangle GCF$ (AA 相似性質)。

(2) ∵ $\triangle EBC \sim \triangle GCF$

∴ $\frac{\overline{EB}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$ ， $\frac{6}{\overline{GC}} = \frac{8}{4}$ ， $\overline{GC} = 3$ ，

∴ $\overline{BG} = 8 - 3 = 5$ 。

答：(1) 是 (2) 5。

- 6 如圖， L_1 、 L_2 、 L_3 皆為直線， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，直線 M 、 N 交於 A 點， $\overline{GE}=2$ ， $\overline{EA}=3$ ， $\overline{AC}=4$ ， $\overline{HA}=4$ ，求：

課 P57 隨堂

(1) $\overline{FA}$ 。

(2) 若 $\overline{EF}=2.1$ ，求 $\overline{BC}$ 。

(1) ∵ $L_1 \parallel L_2$

∴ $\overline{EA} : \overline{GA} = \overline{FA} : \overline{HA}$

$3 : (3+2) = \overline{FA} : 4$

$\overline{FA} = 2.4$ 。

(2) ∵ $L_2 \parallel L_3$

∴ $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ (AA 相似性質)

故 $\overline{EA} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{BC}$

$3 : 4 = 2.1 : \overline{BC}$

$\overline{BC} = 2.8$ 。

答：(1) 2.4 (2) 2.8。

教學眉批

第 5(1)題：教師可針對基礎較差的學生，透過引導方式作答。

$$\textcircled{1} \angle B = \angle GCF = 90^\circ$$

$$\textcircled{2} \angle ECB + \angle BEC = \angle ECB + \angle FGC$$

$$\textcircled{3} \angle BEC = \angle FGC$$

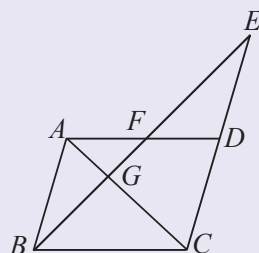
教學眉批

第 6 題：亦可過 A 點作一直線 $L_4 \parallel L_1$ ，此時即可用平行線截比例線段性質解題。

考 會考觀測站 精熟演練題 搭配自評第 5 題

- 如圖， $ABCD$ 為平行四邊形， E 為 $\overline{CD}$ 延長線上一點， $\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 F 點，交 $\overline{AC}$ 於 G 點，若 $\overline{BG}=6$ ， $\overline{EF}=9$ ，則 $\overline{GF}=?$

3



1-4 相似三角形的應用與三角比

12年國教

- 課綱 P18：
已從九年一貫 97 年課程綱要刪除者，以及未列入現有內容且較難者，不可在教科書中呈現。

教學眉批

- 根據課綱，此處不呈現內分比性質。
- 有關內分比與外分比的證明，教師可參考備課用書 P46~47，並視班級情況補充。
- 教師亦可舉生活中的例子，例如：將一張 A3 紙對摺後就是 A4；沿著 A4 的長邊對摺後就是 A5，其中 A3 的對應邊長是 A5 的 2 倍，面積是 A5 的 4 倍。

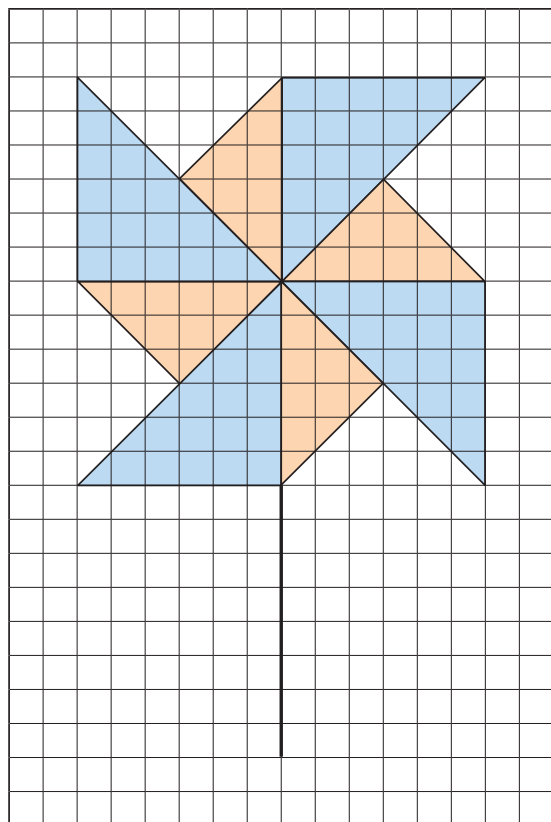
關鍵提問

- 圖一中的藍色三角形面積與圖二藍色三角形面積的比是多少？
4 : 1

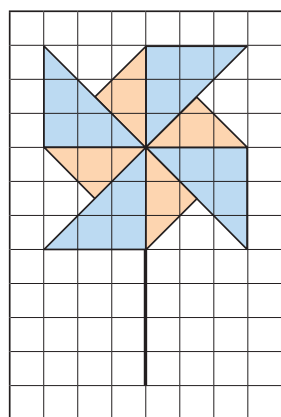
1 相似三角形的比例關係

對應學習內容 S-9-2

安琪利用暑假設計兩個相似但大小不同的風車圖案，這兩個風車分別使用 4 個大的和 4 個小的等腰直角三角形拼湊完成，此兩圖中同顏色三角形的對應邊長比是 2 : 1。



圖一



圖二

Thinking

圖一中橘色三角形面積與圖二橘色三角形面積的比是多少？

4 : 1

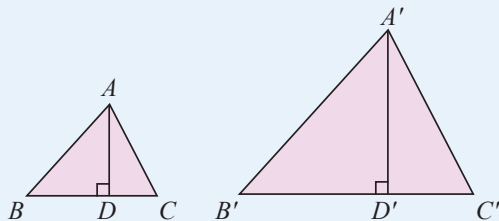
考 會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

- (D) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ ， $\overline{AB} : \overline{PQ} = 1 : 4$ ，則 $\triangle ABC$ 面積 : $\triangle PQR$ 面積 = ?
(A) 1 : 4 (B) 4 : 1
(C) 1 : 8 (D) 1 : 16

接下來將探討兩個相似三角形面積比與其對應邊長比的關係。

例 1 相似三角形對應高的比 = 對應邊長的比

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別是 A' 、 B' 、 C' ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，說明 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



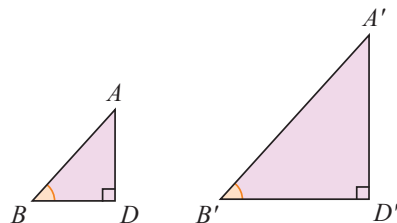
說明 $\angle B = \angle B'$ ($\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$)

$$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90^\circ$$

($\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$)，

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ (AA 相似性質)，

故 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



測 基會試題

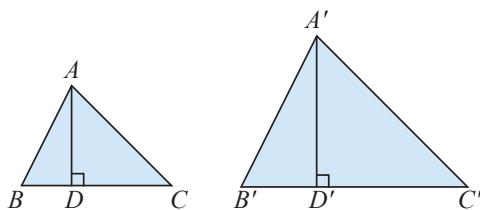
◆ 92 基測 I 第 16 題

教學眉批

■ 本性質的設計是先由例題 1 推得 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ ，再由隨堂練習得知 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ ，進而完成「相似三角形對應高的比 = 對應邊長的比」。

隨堂練習

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別是 A' 、 B' 、 C' ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，若 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{B'C'} = 9$ ， $\overline{AD} = 4$ ，求 $\overline{A'D'}$ 。



$$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = 6 : 9 = 2 : 3$$

且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ ，

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$$

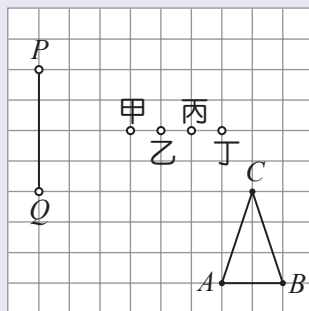
$$\text{故 } \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$$

$$4 : \overline{A'D'} = 2 : 3$$

$$\overline{A'D'} = 6$$

考 92 基測 I 第 16 題 搭配隨堂

- (D) 如圖，棋盤上有 A 、 B 、 C 三個黑子 P 、 Q 兩個白子。請問第三個白子 R 應放在下列哪一個位置，才會使得 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ ？
(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁



測 基會試題

- ◆ 107 會考第 24 題
- ◆ 108 會考第 17 題

Q 教學眉批

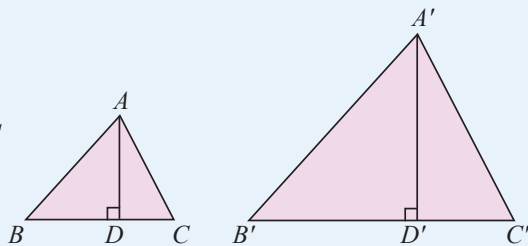
- 教學時宜加以說明

$$\frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{\overline{B'C'} \times \overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$$

的過程。

例 2 相似三角形面積的比 = 對應邊長的平方比

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別是 A' 、 B' 、 C' ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，說明 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle A'B'C'$ 面積 = $\overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$ 。



說明 $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ 。← 對應高的比 = 對應邊長的比

$$\text{因此 } \frac{\triangle ABC \text{ 面積}}{\triangle A'B'C' \text{ 面積}} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}}{\frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

$\therefore \triangle ABC \text{ 面積} : \triangle A'B'C' \text{ 面積} = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$ 。

同理，若 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，則 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle A'B'C'$ 面積 = $\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$
= $\overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2$ 。

相似三角形的比例關係

兩個相似三角形，有下列關係：

(1) 對應高的比 = 對應邊長的比；(2) 面積的比 = 對應邊長的平方比。

關鍵提問

- $\triangle ADE$ 與梯形 $DBCE$ 的面積比為何？
4 : 5。

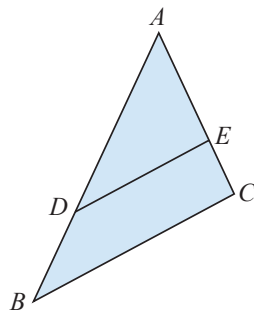
隨堂練習

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BD} = 2$ ， $\triangle ADE$ 的面積為 4，求 $\triangle ABC$ 的面積。

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

故 $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$

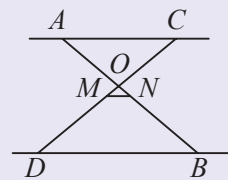
4： $\triangle ABC$ 面積 = $4^2 : (4+2)^2$ ， $\triangle ABC$ 面積 = 9。



考 會考觀測站 基礎演練題 搭配隨堂

- 如圖， $\overline{AC} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{MN}$ ，若 $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{MN} = 1$ ， $\overline{BD} = 7$ ，且 $\triangle AOC$ 的面積為 10，求四邊形 $MNBD$ 的面積。

$$\frac{96}{5}$$

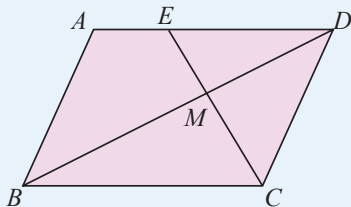


例3 相似三角形面積比的應用

自評 P81 第2題

如圖， $\square ABCD$ 中， $\overline{AE} : \overline{ED} = 1 : 2$ ，
回答下列問題：

- (1) 說明 $\triangle EMD \sim \triangle CMB$ 。
(2) 求 $\triangle EMD$ 與 $\triangle CMB$ 的面積比。



教學眉批

「相似三角形的面積比 = 對應邊長的平方比」與「等高三角形的面積比 = 對應底邊長的比」，此兩個性質學生容易混淆，教師可於此處強化兩者的差異。

說明 (1) 在 $\triangle EMD$ 與 $\triangle CMB$ 中，

$$\because \angle EDM = \angle CBM (\overline{DE} \parallel \overline{BC}),$$

$$\angle EMD = \angle CMB (\text{對頂角}),$$

$$\therefore \triangle EMD \sim \triangle CMB (AA \text{ 相似性質}).$$

$$(2) \because \overline{AE} : \overline{ED} = 1 : 2$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{BC} (\because ABCD \text{ 是平行四邊形, 對邊相等}).$$

$$\text{故 } \overline{DE} : \overline{BC} = 2 : 3.$$

$$\therefore \triangle EMD \text{ 面積} : \triangle CMB \text{ 面積} = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2 = 2^2 : 3^2 = 4 : 9. \leftarrow \begin{array}{l} \text{相似三角形面積的比} \\ = \text{對應邊長的平方比} \end{array}$$

隨堂練習

搭配習作 P17 基礎題 2

如圖， $\square ABCD$ 中， E 為 $\overline{CD}$ 中點， $\overline{AE}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 F 點，回答下列問題：

- (1) $\triangle ADE$ 與 $\triangle FBA$ 中，

$$\because \angle DAE = \angle F (\text{理由: } \overline{AD} \parallel \overline{BF}),$$

$$\angle DEA = \angle BAF (\text{理由: } \overline{DE} \parallel \overline{AB}),$$

$$\therefore \text{根據 } AA \text{ 相似性質, 可知 } \triangle ADE \sim \triangle FBA.$$

- (2) 若 $\triangle ADE$ 的面積為 12，求 $\triangle FBA$ 的面積。

$$\because \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB},$$

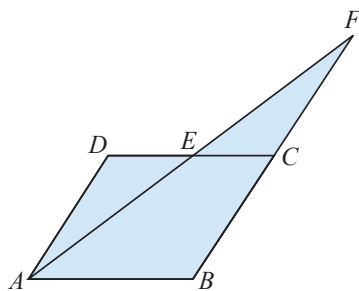
$$\therefore \overline{DE} : \overline{AB} = 1 : 2$$

$$\text{又 } \triangle ADE \sim \triangle FBA$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 面積} : \triangle FBA \text{ 面積} = \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$$

$$12 : \triangle FBA \text{ 面積} = 1^2 : 2^2$$

$$\triangle FBA \text{ 面積} = 48$$



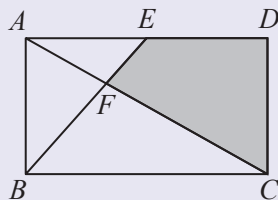
關鍵提問

- $\overline{FC} : \overline{FB} = ?$
 $1 : 2.$
■ $\triangle ADE$ 與梯形 $AECB$ 的面積比為何?
 $1 : 3.$

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 3

- 如圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{AD} = 16$ ， E 為 $\overline{AD}$ 的中點，則四邊形 $CDEF$ 的面積是多少？

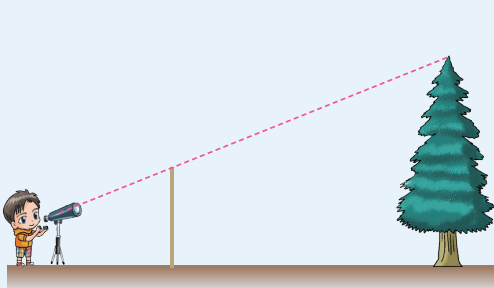
60



對應學習內容 S-9-2、S-9-3

例5 測量樹高

如圖，志豪想要測量樹高，他在樹前 5 公尺垂直豎立了一根長 1.8 公尺的木棍，並繼續往同方向在木棍後方找到觀測點，從望遠鏡看到木棍頂端與樹梢重疊。經測量木棍與望遠鏡的水平距離是 2 公尺，望遠鏡至地面的高度為 1 公尺，求樹高。



教學眉批

- 樹高為 $\overline{AB}$ ，故算出 $\overline{AH}$ 後，還要再加上 $\overline{BH}$ （即 $\overline{EF}$ ），才是正確解答。
- 教師亦可引導學生利用 $\triangle ECG \sim \triangle EAH$ 解題。

解 依題意畫出右圖，

$\therefore \overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 皆垂直於 $\overline{BD}$ ， $\therefore \overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ，

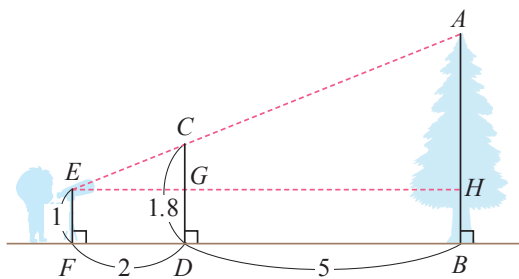
在 $\triangle EAH$ 中， $\therefore \overline{CG} \parallel \overline{AH}$ ，

$\therefore \overline{EG} : \overline{EH} = \overline{CG} : \overline{AH}$

$$2 : (2 + 5) = (1.8 - 1) : \overline{AH}$$

$$\overline{AH} = 2.8$$

則 $\overline{AB} = 2.8 + 1 = 3.8$ ，故樹高 $\overline{AB} = 3.8$ （公尺）。



樹高是 $\overline{AB}$ ，垂直木棍是 $\overline{CD}$ ，望遠鏡是 E 點，自 E 點作垂線分別交 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 於 G 、 H 兩點。

關鍵提問

- 例題 5， $\overline{EC} : \overline{CA} = ?$
 $2 : 5$ 。
- 例題 5，梯形 $EFDC$ 與梯形 $CDBA$ 相似嗎？
不相似。

隨堂練習

如圖，艾美站在一道高 4 公尺的牆前 2 公尺處，如果她的眼睛距離地面 1.6 公尺，向牆望去，觀得牆頂與樹梢重疊在一起，若樹與牆相距 6 公尺，求樹高。

如右圖，自 A 點作直線垂直 $\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ ，

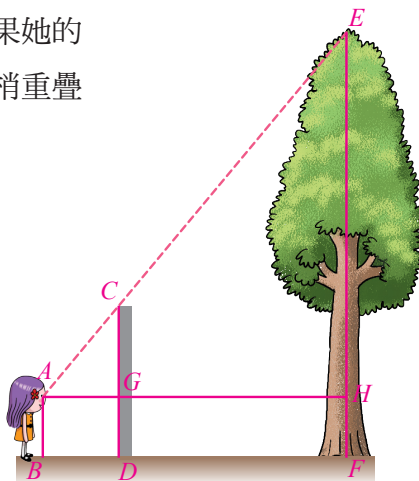
並分別交於 G 、 H ， $\overline{CG} = 4 - 1.6 = 2.4$ ，

$\therefore \overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ 皆垂直於 $\overline{BF}$ ， $\therefore \overline{CG} \parallel \overline{EH}$ ，

$\therefore \overline{AG} : \overline{AH} = \overline{CG} : \overline{EH}$

$$2 : 8 = 2.4 : \overline{EH}, \overline{EH} = 9.6,$$

則 $\overline{EF} = 9.6 + 1.6 = 11.2$ ，故樹高 11.2 公尺。

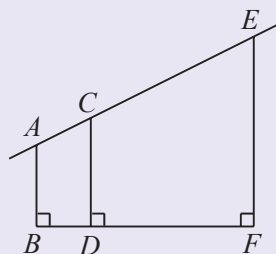


考

會考觀測站 基礎演練題 搭配例 5

- 如圖，由三根柱子撐起的一個棚架，可供避雨及防曬。其中兩根柱子的高分別為 $\overline{AB} = 6$ 公尺， $\overline{CD} = 8$ 公尺，若 $\overline{BD} = 4$ 公尺， $\overline{DF} = 12$ 公尺，則第三根柱子 $\overline{EF}$ 的高度為多少公尺？

14 公尺



12年國教

■ S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30° ， 60° ， 90° 其邊長比記錄為「 $1 : \sqrt{3} : 2$ 」；三內角為 45° ， 45° ， 90° 其邊長比記錄為「 $1 : 1 : \sqrt{2}$ 」。

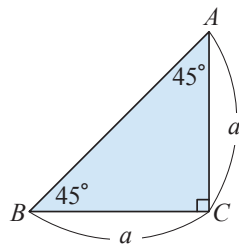
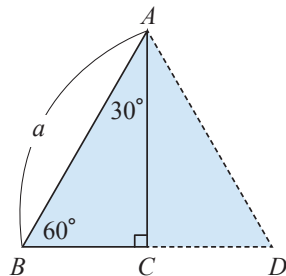
3 三角比

▶ 特殊直角三角形的邊長比

在八下曾學過利用正三角形的邊長來求其高，如右圖，若正三角形 ABD 的邊長為 a ， $\overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 邊上的高，則 $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} a$ ， $\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ，所以 $\triangle ABC$ 三邊長的比為 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = \frac{1}{2} a : \frac{\sqrt{3}}{2} a : a = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

同樣地，如右圖，若等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ ，則 $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} a$ ，所以 $\triangle ABC$ 三邊長的比為 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = a : a : \sqrt{2} a = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

對應學習內容 S-9-4



教學眉批

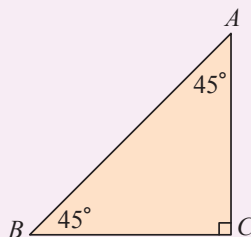
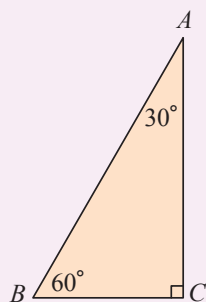
■ 教師可針對程度較好的學生補充：

如上圖，
 $\angle A = 120^\circ$ ，
 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ，
 則 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 1 : \sqrt{3}$ 。

特殊直角三角形的邊長比

1. 直角三角形 ABC 中，
 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，
 則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

2. 等腰直角三角形 ABC 中，
 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，
 則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

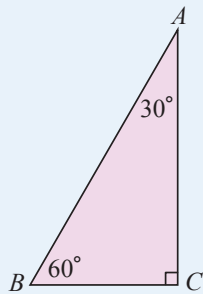


會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

1. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，則 $\overline{AB} : \overline{AC} = \underline{\sqrt{3} : 1}$ 。
2. $\triangle DEF$ 中，已知 $\angle D = \angle E = 45^\circ$ ，若 $\overline{DE} + \overline{EF} = 6 + 6\sqrt{2}$ ，則 $\overline{EF} + \overline{DF} = \underline{12}$ 。

例6 30 - 60 - 90 度三角形的三邊長 搭配習作 P19 基礎題 5 自評 P82 第 4 題

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A=30^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ，若 $\overline{AB}=6$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長。



教學眉批

- 有些學生會誤以為 $\sqrt{3}$ 比 2 大，而將 30-60-90 度三角形的三邊比 $1:\sqrt{3}:2$ 誤記成 $1:2:\sqrt{3}$ ，請老師教學上注意。

解 在直角三角形 ABC 中，

$$\because \angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ,$$

$$\therefore \overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2。$$

$$\overline{BC}:\overline{AC}:6=1:\sqrt{3}:2$$

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{2},$$

$$\text{可得 } \overline{AC}=3\sqrt{3}、\overline{BC}=3。$$

若 $x:y:z=a:b:c$ ，
且 $a、b、c$ 皆不為 0，
則 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}。$

測 基會試題

- ◆ 100 聯測第 34 題
- ◆ 106 會考第 21 題
- ◆ 107 會考第 20 題
- ◆ 109 會考第 20 題

隨堂練習

直角三角形 ABC 中， $\angle A=30^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ，若 $\overline{AC}=9$ ，求 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 的長。

$$\overline{BC}:9:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$$

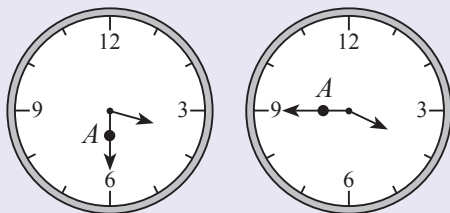
$$\frac{\overline{BC}}{1} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{AB}}{2},$$

$$\text{可得 } \overline{BC}=3\sqrt{3}、\overline{AB}=6\sqrt{3}。$$

考 會考觀測站 精熟演練題 搭配例 6

- 右圖表示一個時鐘的鐘面垂直固定於水平桌面上，其中分針上有一點 A ，且當鐘面顯示 3 點 30 分時，分針垂直於桌面， A 點距桌面的高度為 8 公分，則鐘面顯示 3 點 45 分時， A 點距桌面的高度為 12 公分，則鐘面顯示 3 點 50 分時， A 點距桌面的高度為多少公分？

14 公分

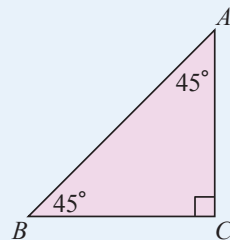


12年國教

- S-9-4 備註：學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。
- 條目範圍：不處理直角三角形中，不同角度時兩對應邊對應的比值，隨之變大或變小。

例 7 45 - 45 - 90 度三角形的三邊長 搭配習作 P19 基礎題 5 自評 P82 第 4 題

如圖，等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 6$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長。



解 在等腰直角三角形 ABC 中，

$$\because \angle A = \angle B = 45^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

$$\overline{AC} : \overline{BC} : 6 = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

$$\frac{\overline{AC}}{1} = \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{6}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{AC} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\text{同理, } \overline{BC} = \overline{AC} = 3\sqrt{2}.$$

隨堂練習

等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 8$ ，求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 的長。

$$8 : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

$$\frac{8}{1} = \frac{\overline{AC}}{1} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{可得 } \overline{AC} = 8, \overline{AB} = 8\sqrt{2}.$$

關鍵提問

■ 隨堂：

(1) 若 $\overline{AC} = 4$ ，
求 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 。

(2) 若 $\overline{AB} = 4$ ，
求 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 。

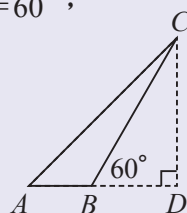
(1) $\overline{BC} = 4$ 、
 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ 。

(2) $\overline{BC} = \overline{AC} = 2\sqrt{2}$ 。

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 6、7

- 如右圖， $\triangle ACD$ 中， $\angle D = 90^\circ$ 。若 $\overline{AD} = \overline{CD}$ ， $\overline{AC} = 4\sqrt{6}$ ， $\angle CBD = 60^\circ$ ，求 $\overline{BC}$ 的長。

8



▶ 直角三角形的三角比

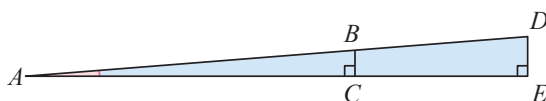
安全

12年國教

內政部營建署 建築物無障礙設施設計規範中，關於無障礙坡道的設計，其中必須符合「坡道之坡度（高度與水平長度之比值）不得大於 $\frac{1}{12}$ 」的規定，意思是「每前進 12 公尺的水平距離，上升高度不能大於 1 公尺」。



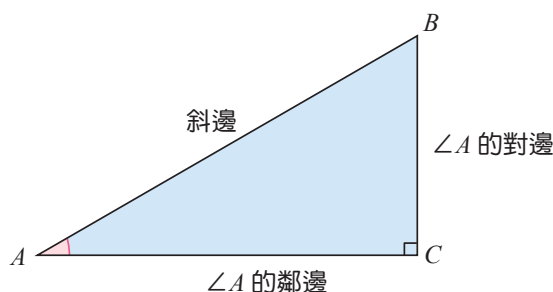
右圖為符合標準的無障礙坡道示意圖，坡道之坡度剛好是 $\frac{1}{12}$ ， $\overline{AD}$ 是無障礙坡道長， $\overline{AE}$ 是地面上的水平距離， $\overline{BC}$ 、 $\overline{DE}$ 皆垂直 $\overline{AE}$ 。



因為 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{1}{12}$ ，亦即在直角三角形 ABC 與直角三角形 ADE 中，兩股長的比值是固定的。

為了討論一般直角三角形三邊的關係，我們規定如下：

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$ 是其中一個銳角，則 $\overline{BC}$ 稱為 $\angle A$ 的對邊， $\overline{AC}$ 稱為 $\angle A$ 的鄰邊。



在前面提到無障礙坡道中，兩股長的比值是固定的，也就是說當 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ，只要 $\angle A$ 的度數固定， $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 的比值就會固定不變。事實上， $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 的比值也是固定不變的，說明如下頁。

- S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30° ， 60° ， 90° 其邊長比記錄為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」；三內角為 45° ， 45° ， 90° 其邊長比記錄為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。
- S-9-4 之備註：學生無使用計算機時，角度限於 30° 、 45° 、 60° 度。
- S-IV-12：理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。

考

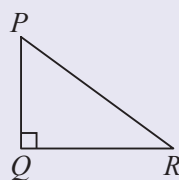
會考觀測站

基礎演練題

搭配課文

- 如右圖， $\triangle PQR$ 中，判別下列線段分別與 $\angle P$ 的關係為何，在空格中填入斜邊、鄰邊或對邊。

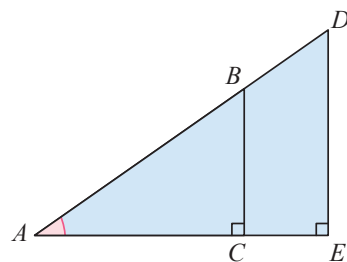
- (1) $\overline{QR}$ 為 $\angle P$ 的 對邊。
- (2) $\overline{PQ}$ 為 $\angle P$ 的 鄰邊。



教學眉批

- 由於高中生對於三角函數的學習會有些困難，教學時建議多加提醒。
- 三角比的相關教學，教師可參考備課用書 P 54～55，並視班級情況補充。

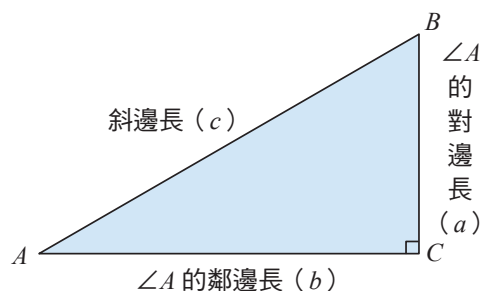
如圖， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 為直角三角形， $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$ ，因為 $\angle A$ 為公用角，所以 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (AA 相似性質)，由此可得



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \left(\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} \right) \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \left(\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} \right) \\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \left(\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} \right) \end{cases}$$

從上面的說明可知，若直角三角形的一個銳角是 $\angle A$ ，當 $\angle A$ 的度數固定不變時，則 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 的比值也是固定不變，我們稱這些比值為 $\angle A$ 的三角比，並用 $\sin \angle A$ 、 $\cos \angle A$ 、 $\tan \angle A$ 來表示這三個比值。

如圖，在直角三角形 ABC 中，
 $\angle C = 90^\circ$ ，



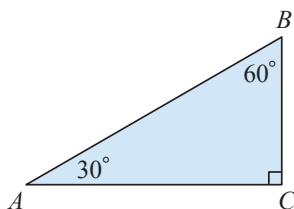
- $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 記作 $\sin \angle A$ ，簡記成 **sin A** (讀做 sine A)，即 $\frac{a}{c} = \sin A$ 。
 - $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 記作 $\cos \angle A$ ，簡記成 **cos A** (讀做 cosine A)，即 $\frac{b}{c} = \cos A$ 。
 - $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 記作 $\tan \angle A$ ，簡記成 **tan A** (讀做 tangent A)，即 $\frac{a}{b} = \tan A$ 。
- 這三個比值，皆稱為 $\angle A$ 的三角比。



會考觀測站 基礎演練題 搭配課文

- (B) 在直角三角形中， $\angle C = 90^\circ$ ，則 $\frac{\angle B \text{ 的對邊長}}{\angle B \text{ 的鄰邊長}}$ 可以用下列哪一種符號表示？
(A) $\sin B$ (B) $\tan B$ (C) $\cos B$ (D) 條件不足，無法得知

如圖，在前面曾學過直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則無論三角形的大小， $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$ 三邊長的比都是 $1 : \sqrt{3} : 2$ ，我們可以得到 30° ($\angle A$) 三角比的值固定不變。同理， 45° 、 60° 三角比的值也是固定不變。



教學眉批

- 特殊角的三角比僅限於 30° 、 45° 和 60° 。
- 提供其他的三角比給程度較好的學生，

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

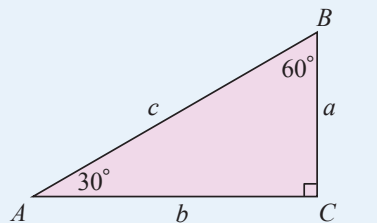
相關補充內容可參考備課用書 P54。

自評 P83 第 5 題

例 8 特殊角的三角比

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，

求 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 。



解 $\because \angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2。$$

$$\text{因此，}\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}，$$

$$\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}。$$

隨堂練習

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，

求 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 。

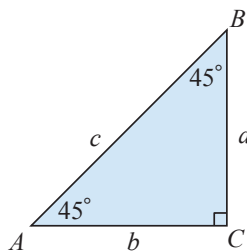
$$\because \angle A = \angle B = 45^\circ，\angle C = 90^\circ，$$

$$\therefore a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}，$$

$$\text{因此，}\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}，$$

$$\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}，$$

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{a}{b} = 1。$$



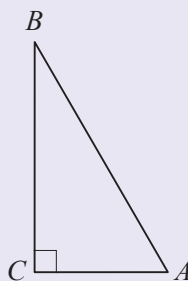
考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 8

- 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則：

$$(1) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

$$(2) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \sqrt{3}。$$

$$(3) \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{1}{2}。$$



教學眉批

- 使用計算機計算三角比時，角度僅限於 360 度制，請勿教學弧度制。

測 基會試題

- ◆ 112 會考非選 2(2)



在例 8 中， $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 可用 $\cos 30^\circ$ 表示，30 度角的三角比也可以用計算機來協助計算，方法如下：

數值	按法	螢幕顯示
$\cos 30^\circ$	30 cos	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3 SHIFT x² ÷ 2 =	

螢幕顯示 $\cos 30^\circ$ 與 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的近似值相同。一般而言，任何銳角的三角比也可以用計算機協助計算。

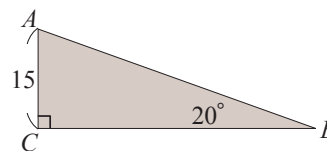
本教材使用之計算機若需 $\sqrt{\quad}$ 功能，須先按 **SHIFT**，再按 **x²**

12年國教

- S-9-4 課程手冊釋例第 4 點：當 $\angle B = 40^\circ$ 時，介紹計算機上 $\sin 40^\circ$ 、 $\cos 40^\circ$ 、 $\tan 40^\circ$ 的意義。

傑克家的地面比騎樓高 15 公分，爸爸為了家裡的摩托車與輪椅進出方便，做了一個活動式木板斜坡，如右圖。若將斜坡角度設定為 20° ，則木板斜坡要多少公分，才會和地面形成 20° 的夾角？

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形，設斜坡的長度為 $\overline{AB}$ ，騎樓與家裡地面的距離為 $\overline{AC}$ ，斜坡的角度為 20° ，利用三角比可以列得算式 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{15}{\overline{AB}} = \sin 20^\circ \approx 0.3420$ ，所以 $\overline{AB} \approx \frac{15}{0.3420} \approx 44$ (公分)，即傑克家的木板斜坡長約 44 公分。



依序輸入 20 **sin**，螢幕顯示



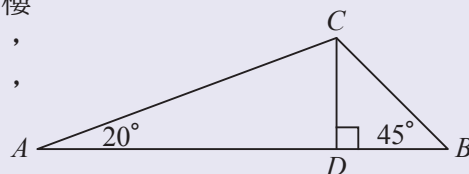
。



會考觀測站 精熟演練題 搭配課文

- 甲在大樓的正西方 A 點處測量大樓樓頂的仰角為 20° ，乙在大樓的正東方 B 點處測量大樓樓頂的仰角為 45° ，已知甲、乙相距 500 公尺，則大樓 ($\overline{CD}$) 高度為多少公尺？($\sin 20^\circ \approx 0.3420201433$ ， $\cos 20^\circ \approx 0.9396926208$ ， $\tan 20^\circ \approx 0.3639702343$ ，並四捨五入取至整數位)

133 公尺



例9 直角三角形的三角比

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C=90^\circ$ ，

且 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 5 : 4 : 3$ 。

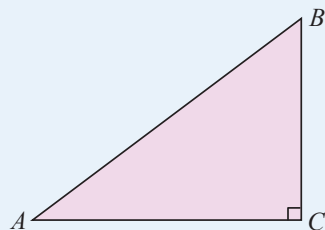
將下列 $\triangle ABC$ 各邊長的比值分別以

$\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 表示。

(1) $\frac{3}{5}$

(2) $\frac{4}{5}$

(3) $\frac{3}{4}$



教學眉批

■ 例題 9：在練習這三種直角三角形的三角比比值與符號的表示方式時，可利用其他直角三角形練習。

解 因為 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 5 : 4 : 3$ ，

所以 (1) $\frac{3}{5} = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \sin A$ ，

(2) $\frac{4}{5} = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \cos A$ ，

(3) $\frac{3}{4} = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \tan A$ 。

隨堂練習

如圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，

且 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 13 : 12 : 5$ 。

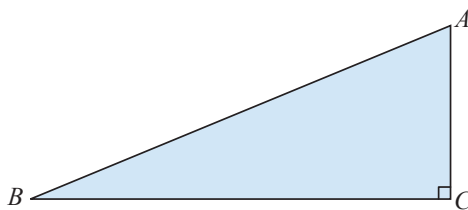
將下列 $\triangle ABC$ 各邊長的比值分別以

$\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 表示。

(1) $\frac{5}{13} = \underline{\cos A}$ 。

(2) $\frac{12}{5} = \underline{\tan A}$ 。

(3) $\frac{12}{13} = \underline{\sin A}$ 。

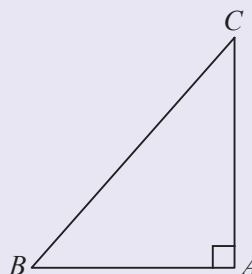


考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 9

■ 如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle A=90^\circ$ ，且 $\overline{BC} : \overline{AC} = 4 : 3$ ，

則 $\frac{\angle B \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \underline{\frac{\sqrt{7}}{4}}$ ，並可用 $\underline{\cos B}$ 表示。

(填入 $\sin B$ 、 $\cos B$ 或 $\tan B$)



12年國教

- S-IV-12：理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。

教學眉批

- 上述學習表現所指認識比值符號，並未專指 $\sin$ 、 $\cos$ 和 $\tan$ ，教師教學時可介紹學生認識生活中常見的符號，例如：坡度(%)。
- 為避免增加學生學習負擔，建議教師在命題時提供坡度百分比的定義或提示。

例10 坡度百分比

跑步機的設定有速度、坡度等功能。

已知坡度百分比 = $\frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$ ，也就是說使用跑步機時，

設定坡度百分比為 1%，就相當於水平移動 100 公尺會鉛直上升 1 公尺。

傑克在跑步機上設定 12% 的坡度跑 1 小時，若所跑的水平移動距離為 4000 公尺，則相當於鉛直上升多少公尺？



解 設使用 12% 的坡度時，鉛直上升 x 公尺，

$$12\% = \frac{x}{4000} \times 100\%$$

$$x = 480 \text{ (公尺)}$$

因此，這 1 小時相當於鉛直上升 480 公尺。

隨堂練習

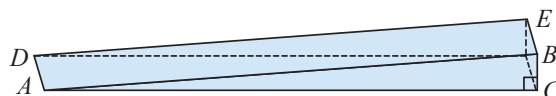
搭配習作 P19 基礎題 6

如圖，酷玩遊戲場滑板坡道的坡度百分比為 10%，已知此坡道的水平距離 $\overline{AC}$ 為 20 公尺，則鉛直高度 $\overline{BC}$ 為多少公尺？

設鉛直高度 $\overline{BC}$ 為 x 公尺，

$$10\% = \frac{x}{20} \times 100\%$$

$$x = 2 \text{ (公尺)}$$



考 會考觀測站 基礎演練題 搭配隨堂

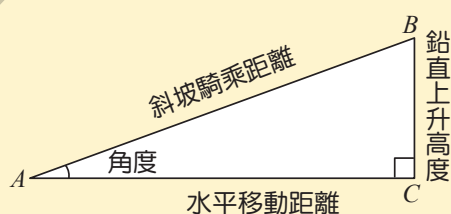
- 已知坡度百分比 = $\frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$ ，若有一路段的坡度百分比為 7%，且該路段的鉛直高度為 17.5 公尺，則該路段的水平距離為多少公尺？

250 公尺

坡度

騎自行車是臺灣非常盛行的一種休閒運動，而陡峭的斜坡考驗車友的體力與毅力，是車友又愛又恨的挑戰。

通常我們用「坡度」來表示斜坡陡峭的程度，這個數值是以百分比來表示，以下為斜坡角度與坡度的關係。



$$\text{坡度百分比} = \frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$$

坡度在 5~10% 屬於中度坡；

10~15% 屬於陡坡；

15~25% 屬於超陡坡。

埔里到合歡山武嶺是自行車車友喜歡挑戰的路線之一，這段路程的鉛直上升高度共 2794 公尺。其中，超陡坡占整段路程的百分之五、陡坡占整段路程的百分之十七及中度坡占整段路程的百分之四十四。

在爬坡的路上，如果看到如下圖的交通標誌，表示此路段的坡度為 15%，即 $\frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\% = 15\%$ 。

Q 在爬坡的路上，有甲、乙兩段水平距離都是 3000 公尺，若其坡度分別是表示 15% 與 12%，則這兩段路上升的鉛直高度相差多少公尺？

$$15\% = \frac{\text{甲路段鉛直上升高度}}{3000} \times 100\%,$$

$$\text{甲路段鉛直上升高度} = 450 \text{ 公尺}。$$

$$12\% = \frac{\text{乙路段鉛直上升高度}}{3000} \times 100\%,$$

$$\text{乙路段鉛直上升高度} = 360 \text{ 公尺}。$$

$$\therefore 450 - 360 = 90 \text{ (公尺)}。$$



資料來源：國土資訊系統自然環境資料庫

補充資料 ■ 坡度與角度

- 坡度是指一筆土地傾斜的陡峭程度，通常以坡面的垂直高度和水平距離的百分比表示。坡度 = (兩點的垂直距離 ÷ 兩點的水平距離) × 100%
坡度的值也有負數，如果為正值就意味著上坡，為負值就是下坡。
- 坡度 ≠ 角度， $\tan \text{坡度} = \text{角度}$ 。

角度	0°	5°	10°	30°	45°
坡度	0%	9%	18%	58%	100%





數問速答

- 配合小節重點回顧，教師可提供 QRCode 給學生，進行線上同步測驗與複習。



- 上述題目可參考本頁下方數問速答。

1 相似三角形的比例關係

兩個相似三角形有下列關係：

(1) 對應高的比 = 對應邊長的比；(2) 面積的比 = 對應邊長的平方比。

2 生活中無法直接求得的距離或長度，可利用相似三角形作簡易測量。

3 特殊直角三角形的邊長比

(1) 直角三角形 ABC 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

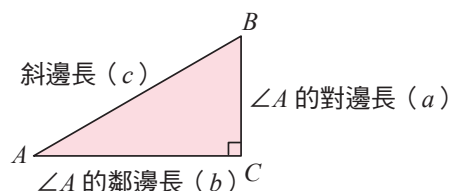
則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

(2) 等腰直角三角形 ABC 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

4 三角比

如圖，在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，



(1) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記成 $\sin A$ (讀做 sine A)，即 $\frac{a}{c} = \sin A$ 。

(2) $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 簡記成 $\cos A$ (讀做 cosine A)，即 $\frac{b}{c} = \cos A$ 。

(3) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 簡記成 $\tan A$ (讀做 tangent A)，即 $\frac{a}{b} = \tan A$ 。

這三個比值，皆稱為 $\angle A$ 的三角比。

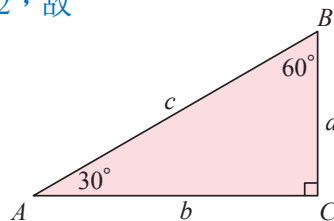
例 如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

若 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ，可得 $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，故

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$



數問速答

- 判別下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。
- (×) (1) 已知有兩個相似三角形，若對應邊長的比為 5 : 7，則對應高的比與面積的比皆為 25 : 49。
- (×) (2) 直角三角形 ABC 中，已知 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，則 $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 2 : \sqrt{3}$ 。
- (×) (3) 騎車時，斜坡的坡度百分比為 10%，表示此斜坡與平面所夾的角度為 10° 。



1-4 自我評量

- ① 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，課 P66 例 2

若 $\triangle ABC$ 的面積為 16 平方公分，求 $\triangle ADE$ 的面積。

$\because D$ 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ，

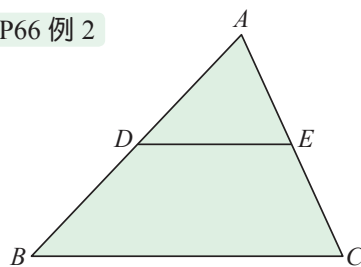
則 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 相似性質)

故 $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 $= \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2$

$$\triangle ADE \text{ 面積} : 16 = 1^2 : 2^2$$

$$\triangle ADE \text{ 面積} : 16 = 1 : 4$$

$$\triangle ADE \text{ 面積} = 4 \text{ (平方公分)}$$

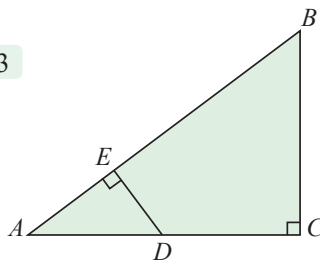


答：4 平方公分。

- ② 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，已知 $\overline{BC} = 6$ ，課 P67 例 3

$\overline{AC} = 8$ ， D 為 $\overline{AC}$ 的中點， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ，求：

(1) $\overline{DE}$ 。(2) 四邊形 $DEBC$ 面積。



(1) $\because \angle A = \angle A$ ， $\angle AED = \angle C = 90^\circ$ ，(2) $\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB$

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACB$ (AA 相似性質) $\therefore \triangle AED$ 面積： $\triangle ACB$ 面積 $= \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$

$$\text{故 } \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{\overline{DE}}{6}$$

$$\overline{DE} = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AED \text{ 面積} : \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 4^2 : 10^2$$

$$\triangle AED \text{ 面積} : 24 = 16 : 100$$

$$\triangle AED \text{ 面積} = \frac{96}{25}$$

$$\text{故四邊形 } DEBC \text{ 面積} = 24 - \frac{96}{25} = \frac{504}{25}$$

答：(1) $\frac{12}{5}$ (2) $\frac{504}{25}$ 。

測 基會試題

- ◆ 91 基測 II 第 15 題
- ◆ 94 基測 II 第 22 題
- ◆ 97 基測 I 第 18 題
- ◆ 97 基測 II 第 26 題
- ◆ 100 聯測第 15 題
- ◆ 101 基測第 32 題
- ◆ 102 基測第 33 題
- ◆ 109 會考第 24 題

關鍵提問

- 第 1 題： $\overline{BC}$ 是 $\overline{DE}$ 的幾倍？
2 倍。



會考觀測站

加強演練題

搭配自評第 1 題

- 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，若 $\overline{AB} = \frac{1}{3} \overline{DE}$ ，則 $\triangle DEF$ 面積： $\triangle ABC$ 面積的比值為 9。

- 3 如圖，威利在地上放了一面鏡子，透過鏡子的反射（入射角等於反射角），他可以看見樹梢。已知威利與鏡子的距離是 1.2 公尺，鏡子與樹的距離是 6 公尺，威利眼睛離地面的高度是 1.5 公尺，求樹高。

課 P69 例 5

設鏡子是 C 點，威利與鏡子的距離是 $\overline{CD}$ ，
鏡子與樹的距離是 $\overline{BC}$ ，威利眼睛 (E 點) 離地面的高度是 $\overline{DE}$ 。

在 $\triangle EDC$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \angle EDC = \angle ABC = 90^\circ, \angle 1 = \angle 2,$$

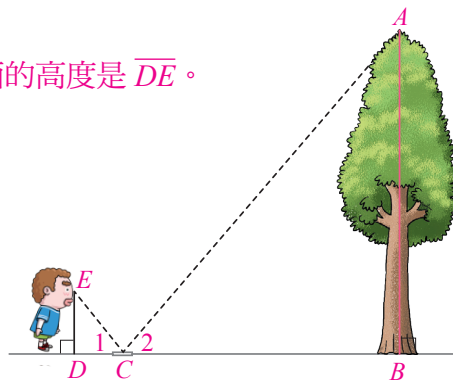
$$\therefore \triangle EDC \sim \triangle ABC \text{ (AA 相似性質)},$$

$$\text{則 } \overline{DC} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{AB}$$

$$1.2 : 6 = 1.5 : \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = 7.5$$

故樹高 $\overline{AB} = 7.5$ (公尺)。



答：7.5 公尺。

教學眉批

- 第 4 題：此題結合 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 及 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 兩種特殊直角三角形的三邊長比之計算。

- 4 如圖， $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，且 D 在 $\overline{AC}$ 上， $\angle BDC = 45^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 12$ ，求：

課 P71、72 例 6、7

(1) $\overline{AD}$ 。

(2) $\triangle ABD$ 的面積。

$$(1) \because \angle BDC = \angle DBC = 45^\circ, \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore 12 : \overline{DC} : \overline{BD} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

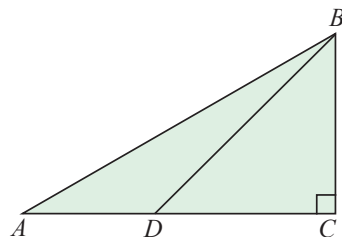
$$\overline{DC} = 12, \overline{BD} = 12\sqrt{2}。$$

$$\text{又 } \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore 12 : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2。$$

$$\overline{AC} = 12\sqrt{3}, \overline{AB} = 24。$$

$$\text{故 } \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = 12\sqrt{3} - 12。$$



(2) $\triangle ABD$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times (12\sqrt{3} - 12) \times 12$$

$$= 72\sqrt{3} - 72$$

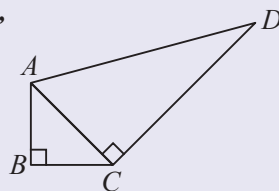
答：(1) $12\sqrt{3} - 12$ (2) $72\sqrt{3} - 72$ 。



會考觀測站 基礎演練題 搭配自評第 4 題

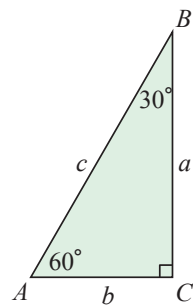
1. 若直角三角形 ABC 兩股長分別為 6、 $6\sqrt{3}$ ，則周長為 $18 + 6\sqrt{3}$ 。

2. 如圖， $\angle B = \angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle CAD = 2\angle D$ ， $\angle BAC = \angle BCA$ ，若 $\overline{AD} = 4$ ，則 $\overline{BC} =$ $\sqrt{2}$ 。



- 5 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ，若 $\overline{BC}=a$ ， $\overline{AC}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ，求 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ 、 $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$ 。

課 P75 例 8



$$\begin{aligned} \because \angle A=60^\circ, \angle B=30^\circ, \angle C=90^\circ, \\ \therefore \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = b : a : c = 1 : \sqrt{3} : 2, \end{aligned}$$

$$(1) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

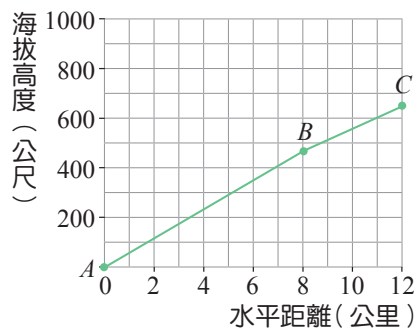
答： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\frac{1}{2}$ ， $\sqrt{3}$ 。

6

通常計算坡度時會用「坡度百分比」表示：坡度百分比 = $\frac{\text{鉛直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$

A、B、C 三地的海拔高度與水平距離的關係如右圖。若 A 地到 B 地的海拔高度持續上升，坡度為 6%；B 地到 C 地的海拔高度仍持續上升，坡度為 4%，則 C 地的海拔高度為多少公尺？

課 P78 例 10



A 地到 B 地： $\frac{\text{鉛直上升高度}}{8000-0} \times 100\% = 6\%$ ，鉛直上升高度 = 480 (公尺)，

B 地到 C 地： $\frac{\text{鉛直上升高度}}{12000-8000} \times 100\% = 4\%$ ，鉛直上升高度 = 160 (公尺)，

故 C 地的海拔高度為 $480 + 160 = 640$ (公尺)。

答：640 公尺。

教學眉批

第 6 題為坡度觀念結合統計圖形的應用題型。

考

會考觀測站

精熟演練題

搭配自評第 5 題

- 直角三角形 ABC 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ，且 $\overline{AB}=26$ ， $\overline{BC}=10$ ，求：

$$(1) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{5}{13}。$$

$$(2) \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{12}{13}。$$

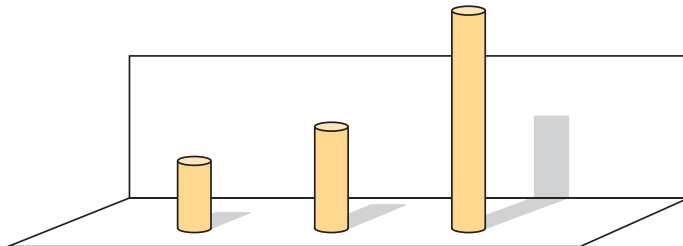
$$(3) \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{5}{12}。$$



測 基會試題

◆ 108 會考非選 2

在公園有三座垂直於水平地面且高度不一的圓柱，三座圓柱後面有一堵與地面互相垂直的牆，且圓柱與牆的距離皆為 120 公分。安琪觀察到第 1 根柱子的高為 100 公分，其影子落在地面上的影長為 60 公分；而第 3 根柱子的部分影子落在牆上，如下圖。



已知落在地面上的影子皆與牆面垂直，並視太陽光為平行光，在不計圓柱厚度與影子寬度的情況下，回答下列問題：

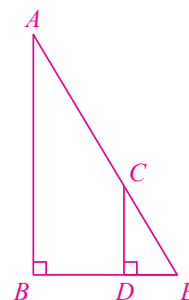
(1) 若第 2 根柱子的高為 150 公分，且影子完全落在地面上，則影長為多少公分？

解 設影長為 x 公分， $100 : 150 = 60 : x$
 $100x = 150 \times 60 = 9000$
 $x = 90$ (公分)

答：90 公分。

(2) 若同一時間測得第 3 根柱子落在牆上的影長為 120 公分，則第 3 根柱子的高度為多少公分？

解 設第 3 根柱子高度為 $\overline{AB}$ ，其落在牆上的影子 $\overline{CD}$
 相關位置關係如右圖，
 則 $\overline{BD} = 120$ 公分， $\overline{CD} = 120$ 公分。
 $\therefore \overline{CD} : 100 = \overline{DE} : 60$ (利用(1)，將 $\overline{CD}$ 想像為柱高， $\overline{DE}$ 為影長)
 $120 : 100 = \overline{DE} : 60$
 $\overline{DE} = 72$
 故 $\overline{BE} = 120 + 72 = 192$ (公分)
 且 $\overline{AB} : 100 = 192 : 60$
 $\overline{AB} = \frac{100 \times 192}{60} = 320$ (公分)



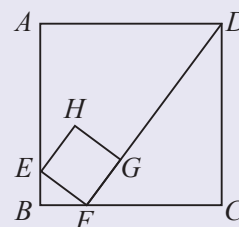
答：320 公分。

解答P191

考 101 基測 第 32 題

- (B) 如圖，邊長 12 的正方形 $ABCD$ 中，有一個小正方形 $EFGH$ ，其中 E 、 F 、 G 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 上。
 若 $\overline{BF} = 3$ ，則小正方形的邊長為何？

(A) $\sqrt{12}$ (B) $\frac{15}{4}$ (C) 5 (D) 6

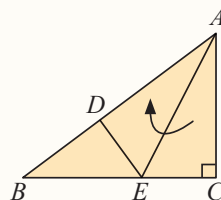




搜尋

相似三角形的應用

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{BC} = 16$ 。若以 $\overline{AE}$ 為摺痕， $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 兩線段會疊合，且 C 點恰好落在 D 點的位置，則四邊形 $ACED$ 的面積為何？



安琪

$\because \overline{AB} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ ， $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{AC} = 20 - 12 = 8$ ，
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle EBD$ 中，
 $\because \angle C = \angle BDE = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle B$ (公用角)，
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$ (AA 相似性質)。
故 $\triangle ABC$ 的面積： $\triangle EBD$ 的面積 $= \overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 = 16^2 : 8^2 = 4 : 1$ ，
因此 $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{12 \times 16}{2} = 96$ ，
 $\triangle EBD$ 的面積 $= \frac{1}{4} \triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{4} \times 96 = 24$ ，
 $\therefore$ 四邊形 $ACED$ 的面積 $= \triangle ABC$ 的面積 $- \triangle EBD$ 的面積 $= 96 - 24 = 72$ 。

相似三角形的面積比



艾美

$\because \overline{AB} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ ， $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{AC} = 20 - 12 = 8$ ，
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle EBD$ 中，
 $\because \angle C = \angle BDE = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle B$ (公用角)，
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$ (AA 相似性質)。
故 $\overline{AC} : \overline{ED} = \overline{BC} : \overline{BD}$ ， $12 : \overline{ED} = 16 : 8 = 2 : 1$ ， $\overline{ED} = 6$ ，
因此，四邊形 $ACED$ 的面積 $= 2 \times \triangle ADE$ 的面積 $= 2 \times \frac{12 \times 6}{2} = 72$ 。

相似三角形、對應邊成比例

你會採用哪種解法呢？
在喜歡的貼文按 ❤️ 吧！



教學眉批

■〈另解〉

$\because \overline{AB} = \sqrt{12^2 + 16^2}$
 $= 20$ ，
 $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD}$
 $= \overline{AB} - \overline{AC}$
 $= 20 - 12$
 $= 8$ ，
 $\therefore \triangle EBD$ 面積：
 $\triangle EAD$ 面積
 $= \overline{BD} : \overline{AD}$
 $= 8 : 12$
 $= 2 : 3$ ，

故四邊形 $ACED$ 面積： $\triangle ABC$ 面積
 $= (3+3) : (3+3+2) = 3 : 4$ ，
又 $\triangle ABC$ 面積
 $= \frac{12 \times 16}{2} = 96$ ，
 $\therefore$ 四邊形 $ACED$ 面積
 $= \frac{3}{4} \triangle ABC$ 面積
 $= \frac{3}{4} \times 96 = 72$



教學眉批

- 騎乘機（慢）車時，為避免因大卡車行駛氣流造成危險，與大卡車併行時應保持 2 公尺以上的間距。遇到大卡車過彎時，建議將車輛停在大型車後輪之後方，等大卡車完全過彎後，確認安全再繼續行駛。
- 大卡車轉彎時，前後輪不會在同一個軌跡，其中內側前輪畫出的圓半徑較大，後輪畫出圓半徑較小，前、後輪差距稱為「內輪差」。

遠離大卡車

根據警政署統計，每年因大型車未保持安全距離的傷亡人數高達一千多人，當行人或機車騎士騎在大卡車的前後方、左右方或大卡車轉彎形成的區域範圍內，都會造成視線死角，是最可怕的道路殺手。

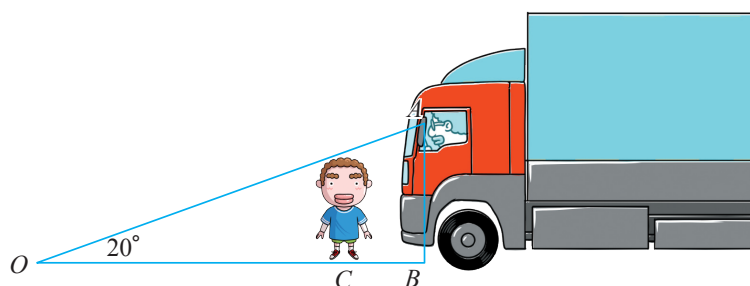
如下圖，駕駛在座位上的位置，他的眼睛位於地平面 B 點正上方約 2 公尺，且視線與地面的水平線約夾 20° ，形成一個直角三角形 OAB ，其中 $\angle OBA = 90^\circ$ 。若某位身高 1.5 公尺的學生站在卡車前方地平面 C 點處，則：

$$\frac{1.5}{OC} = \frac{2}{OB} = \frac{\angle O \text{ 的對邊長}}{\angle O \text{ 的鄰邊長}}$$

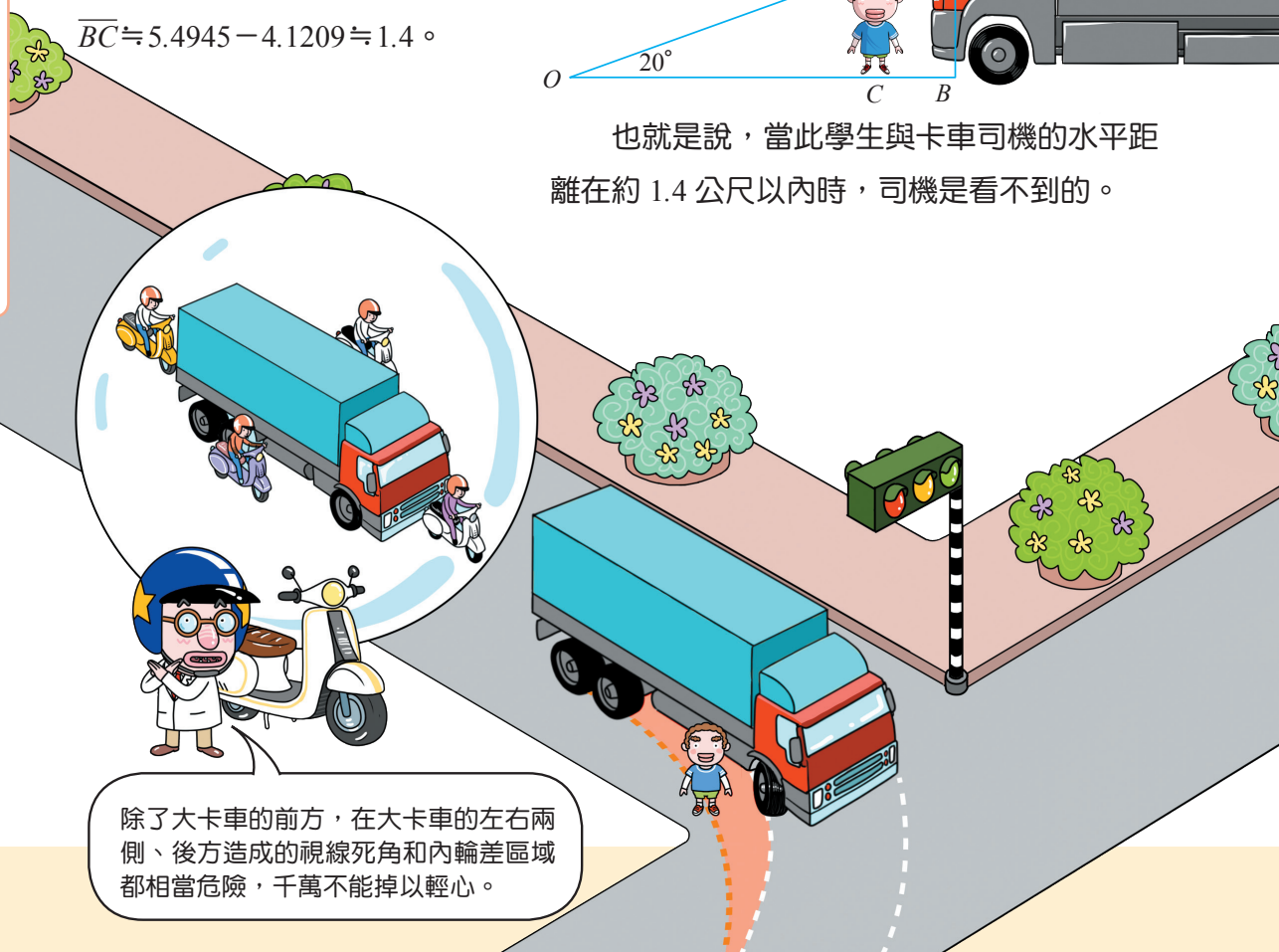
利用計算機可得 $\tan 20^\circ \approx 0.3640$ ，

可得 $\overline{OC} \approx 4.1209$ ， $\overline{OB} \approx 5.4945$ ，

$\overline{BC} \approx 5.4945 - 4.1209 \approx 1.4$ 。



也就是說，當此學生與卡車司機的水平距離在約 1.4 公尺以內時，司機是看不到的。



補充資料

■ 遠離大卡車

- 大卡車行駛時產生的「推」、「吸」的強力氣流，會使騎士容易失去平衡、導致搖晃而發生危險。
- 大卡車在交岔路口轉彎時因車身軸距較長，內輪差也較一般車輛為大，加上大卡車因車輛本身結構及裝載貨的關係，大卡車的視野盲區也較其他車種為大。
- 大卡車內輪差為 3.5~4.5 公尺；聯結車內輪差為 6~7.5 公尺。





自我挑戰評分指引與得分範例

● 第 1 題：

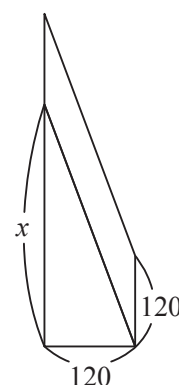
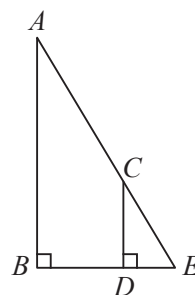
分數	評分指引 / 得分範例
3 分	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確。 設影長為 x 公分， $100:150=60:x$ $100x=150\times 60=9000$ $x=90$ (公分) 答：90 公分。
	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確。 $\because 150\div 100=1.5$ $\therefore$ 第 2 根柱子高是第 1 根柱高的 1.5 倍 $60\times 1.5=90$ (公分) 答：90 公分。
2 分	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確，但過程出現 1 次計算錯誤，並以此數值得出第 2 根柱子的合理影長。 由第 1 根柱高與其影長的關係可得 $\frac{\text{影長}}{\text{第 1 根柱高}}=\frac{60}{100}=\frac{2}{5}$ $150\times\frac{2}{5}=60$ (公分) 答：60 公分。
1 分	解題策略正確，且根據題意合理轉化解題要素，但未達二級分標準。 $\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$ $150\times\frac{5}{3}=250$ (公分) 答：250 公分。
0 分	1. 只有答案或與題目無關。 2. 策略模糊不清或錯誤。



自我挑戰評分指引與得分範例

● 第 2 題：

分數	評分指引 / 得分範例
3 分	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確。 設第 3 根柱子高度為 $\overline{AB}$，其落在牆上的影子 $\overline{CD}$ 相關位置關係如右圖(將此牆想像為可透光的牆)， 則 $\overline{BD}=120$ 公分，$\overline{CD}=120$ 公分。 $\therefore \overline{CD}:100=\overline{DE}:60$ (利用 1.，將 $\overline{CD}$ 想像為柱高，$\overline{DE}$ 為影長) $120:100=\overline{DE}:60$ $\overline{DE}=72$ 故 $\overline{BE}=120+72=192$ (公分) 且 $\overline{AB}:100=192:60$ $\overline{AB}=\frac{100 \times 192}{60}=320$ (公分) 答: 320 公分。
	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確。 設第 3 根柱子下半部高度為 x 公分 $100:x=60:120$ $x=200$ 第 3 根柱子高度 $=120+200=320$ (公分) 答: 320 公分。





自我挑戰評分指引與得分範例

分數	評分指引 / 得分範例
2分	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確，但未能得出第3根柱子的正確高度。
	$\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 設第3根柱子高度為 x，則 $\overline{BE} = \frac{3}{5}x$ $\because \triangle ABE$ 與 $\triangle CDE$ 相似 $\therefore \frac{3}{5}x : (\frac{3}{5}x - 120) = x : 120$
	解題策略正確，且求解過程合理，答案正確，但未能得出第3根柱子的正確高度。
	$120 : 100 = \overline{DE} : 60, \overline{DE} = 72$ $\overline{BE} = 120 + 72 = 192$ $\because \triangle ABE$ 與 $\triangle CDE$ 相似 $\therefore \overline{AB} : 120 = 192 : 72$
1分	解題策略正確，且呈現非題目已知之比例式、幾何量、圖示或幾何關係，但未能得出第3根柱子的正確高度。
	$\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$
	解題策略正確，且解出解題所需之部分比例式，但未達二級分標準。
0分	$120 : 100 = \overline{DE} : 60, \overline{DE} = 72$
	1. 只有答案或與題目無關。 2. 策略模糊不清或錯誤。



第 I 章 MATH 診療室

1

妙麗與威利對於「 x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $2x=3y=5z$ 。」的說法如下。判別他們的說法是否正確？如果不正確，請修改他們的說法或舉出一個使它不正確的例子。



當 $x=15$ 時，由於 $2 \times 15=30$ ，可得 $y=10$ 、 $z=6$ ，因此 x 一定等於 15。

☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

雖然 $x=15$ 、 $y=10$ 、 $z=6$ 滿足 $2x=3y=5z$ ，但不是只有這一組 x 、 y 、 z 的值滿足 $2x=3y=5z$ 。

使它不正確的例子：

$x=30$ 、 $y=20$ 、 $z=12$ 也滿足 $2x=3y=5z$ ，此時 $x \neq 15$ 。



由 $2x=3y$ 可知 $x:y=2:3$ ，
再由 $3y=5z$ 可知 $y:z=3:5$ ，
因此 $x:y:z=2:3:5$ 。

☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

由 $2x=3y$ 可知 $x:y=3:2$ ，
再由 $3y=5z$ 可知 $y:z=5:3$ ，
因此 $x:y:z=15:10:6$ 。

使它不正確的例子：

當 $x=3$ 、 $y=2$ 滿足 $2x=3y$ ，
但是 $x:y=3:2$ 不是 $2:3$ 。

2

右圖是老師在黑板上利用尺規作圖畫出「 $\overline{AB}$ 」上的一點 C ，其中 $\overline{AP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_4}=\overline{P_4P_5}$ ，且 $\angle AP_2Q=\angle AP_5B$ 。」以下是洛基與艾美對於這個尺規作圖的說法，判別他們的說法是否正確？如果不正確，請修正他們的說法。



由 $\angle AP_2Q=\angle AP_5B$ 可知 $\overline{P_2C} \parallel \overline{P_5B}$ ，因此 $\overline{AC}:\overline{CB}=2:3$ 。

☒ 正確 ☐ 不正確

修正：

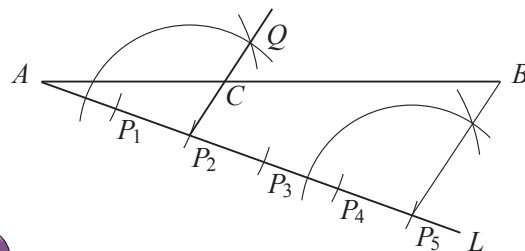


由 $\angle AP_2Q=\angle AP_5B$ 及 $\angle A=\angle A$ 可知 $\triangle AP_2C \sim \triangle AP_5B$ ，因此 $\overline{AC}:\overline{AB}=2:3$ 。

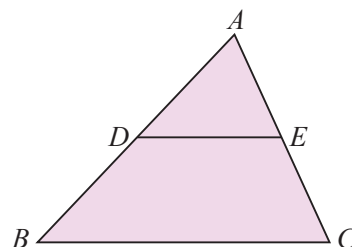
☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

由 $\angle AP_2Q=\angle AP_5B$ 及 $\angle A=\angle A$ 可知 $\triangle AP_2C \sim \triangle AP_5B$ ，
因此 $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AP_2}:\overline{AP_5}=2:5$ 。



- 3 老師在黑板上畫出右圖，並告知「如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點。」安琪與傑克對此圖形的說法如下。判別他們的說法是否正確？如果不正確，請修正他們的說法。



因為 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC} = 1 : 1$ ，
所以 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1$ 。

☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

$$\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2。$$



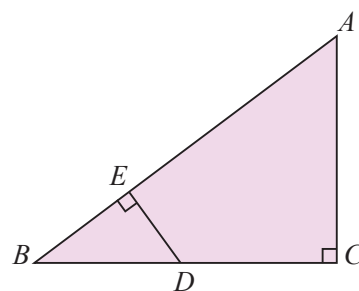
因為 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = 1 : 2$ ，
由 SAS 相似性質可知 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，
且 $\triangle ADE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = $1 : 2$ 。

☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

$$\begin{aligned} \triangle ADE \text{ 面積} : \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= 1^2 : 2^2 \\ &= 1 : 4 \end{aligned}$$

- 4 老師在黑板上畫出右圖，並告知「如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 為 $\overline{BC}$ 的中點， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 。」傑克與艾美對此圖形的說法如下。判別他們的說法是否正確？如果不正確，請修正他們的說法。



因為 D 為 $\overline{BC}$ 的中點，所以 $\overline{BD} : \overline{BC} = 1 : 2$ 。
因此，直角三角形 BED 的三邊長比為
 $\overline{DE} : \overline{BE} : \overline{BD} = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

因為直角三角形 BED 的三內角不一定是
 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ，所以三邊長比不一定是
 $1 : \sqrt{3} : 2$ 。



根據 AA 相似性質可得 $\triangle BED \sim \triangle BCA$ ，
又 D 為 $\overline{BC}$ 的中點，所以 $\overline{DE} : \overline{AC} = 1 : 2$ 。

☐ 正確 ☒ 不正確

修正：

根據 AA 相似性質可得 $\triangle BED \sim \triangle BCA$ ，
所以 $\overline{DE} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{BA} \neq 1 : 2$ 。