



1-1 相似形的意義

以前醫師動手術必須自己親自操刀，現在有達文西手術的技術，醫師可以**大動作**的在電腦操作，引導機器手臂以**更小幅度的**動作進行手術，這樣會讓手術更精準，病人的傷口變小，因此復原也變得更快了！



建築師會將心目中的建築物以**縮小比例**的方式畫出設計圖，施工的廠商就利用設計圖以及標示的比例，**放大回實際的尺寸**做出建築物。

我們手機裡面的線路，在設計時，通常是在**放大**的情況下完成設計後，再**縮小回實際的尺寸**來進行手機的製作。



放大和縮小的厲害在於圖形改變的前後，**所有相對應的長度比例是一樣的！**因此，在放大版上的相對位置，就跟在縮小版的相對位置是一模一樣的。

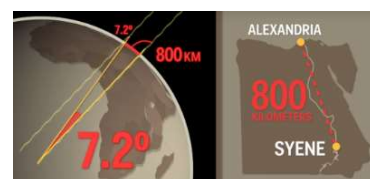
許多問題都是利用這種**相似的比例關係**，讓我們得以**利用已知的資訊去得到（算出）不知道的！**

地球的周長有多長？直徑有多大？

2 千多年前希臘數學家埃拉托斯特尼

（Eratosthenes，西元前 276—西元前 174）

就利用很簡單的**相似圖形**的想法將它算出來了，而且誤差不到 8% 喔！



相似圖形，**大小**不見得一樣，但是，「**形狀**」要一樣！

你會不會懷疑，將圖形放大或縮小後形狀一定會一樣！

令人困惑的是？印在氣球上的圖案，充氣前跟充氣後的形狀好像不太一樣？我們在紙上繪製的設計圖，不管放大或縮小，除了大小改變之外，形狀好像都一樣！到底在什麼樣的表面上做放大或縮小的動作不會改變圖形的形狀呢？



1-2 平面與非平面的特徵（歐基里德面與非歐基里德面）

我們的頭（球面）跟脖子（馬鞍面）的地方跟平平的感覺有很大的不同，就讓我們做一些實驗，來觀察到底有什麼不同之處。

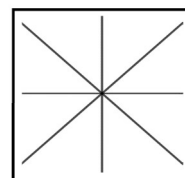
1. 拿一張紙包住另外一個同學的頭，先將紙張的中間壓住頭上，如果紙張想服貼的把頭包住，紙張會有皺褶重疊的現象才會和頭服貼；拿一張紙包住另外一個同學的脖子，先將紙張的中間壓住脖子上，如果紙張想服貼的把脖子包住，紙張必須撕裂才會和脖子服貼！請找個同學做做實驗。

我們的頭和脖子的面和紙張的面顯然有很大的不同！舉目望去，試著寫出和頭或脖子類似的面！



2. 我們在一張紙上畫一個米字，再來觀察將這張紙分別包覆住頭部跟包覆住頭和脖子後，這些線跟原來的有什麼不同？

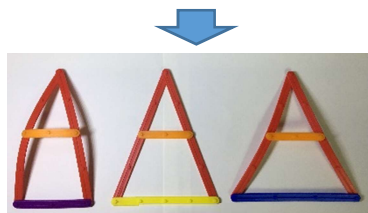
註：操作的方式和第 1 題相同。



3. 現在，我們使用扣條來模擬上一題的情況，如圖(1)，將紅色扣條中間扣上黃色扣條，做出 3 個全等的三角形。接下來，我們使用長短不同的扣條扣住圖(1)三個圖形的底下兩個端點，做出 3 種圖形，如圖(2)，左邊跟右邊的兩個三角形，它的形狀跟原來的小三角形變的不一樣了，左邊的圖形因為扣條太短使得角度變大，右邊的圖形因為扣條太長使得角度變小，只有中間的圖形，它的黃色扣條長度剛好是橘色扣條的 2 倍，大三角形跟小三角形的形狀一樣。



圖(1)



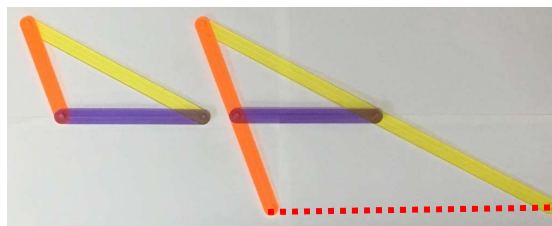
圖(2)

紀錄一下我們在圖(2)看到一些結果：

- (1) 中間的圖，一個三角形的 2 邊放大 2 倍，這 2 邊的夾角只要不變，三角形的第 3 邊自然就會是 2 倍放大，而且這個圖形可以貼在一張紙上。這個放大 2 倍的三角形和原來的三角形會有相同的形狀。
- (2) 左圖跟右圖分別可以放在球面跟馬鞍面上，我們看到了在球面跟馬鞍面上的圖形沒有放大之後會相似的性質！

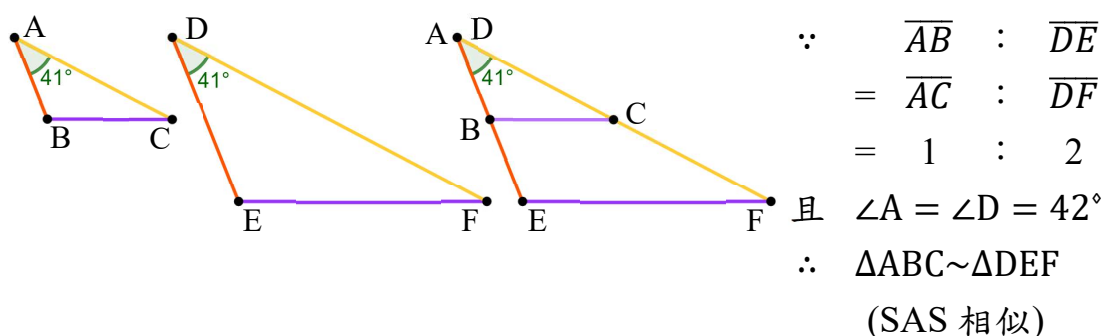
- 結論：**
1. 只有在跟紙張一樣的平面上，利用放大縮小可以做出相似的圖形。
 2. 在跟紙張一樣的平面上，三角形兩邊的邊長放大時，第三邊的邊長會依同比例放大，且三角形內角和會保持 180 度。
 3. 在球面上，三角形兩邊的邊長放大時，第三邊的邊長不會依同比例放大，且三角形內角和大於 180 度。
 4. 在雙曲面上，三角形兩邊的邊長放大時，第三邊的邊長不會依同比例放大，且三角形內角和小於 180 度。

4. 將右圖中，左邊較小三角形的黃色和紅色扣條 2 倍放大後，第 3 條邊長(虛線)需要多長才會平貼在跟紙張一樣的平面上呢？

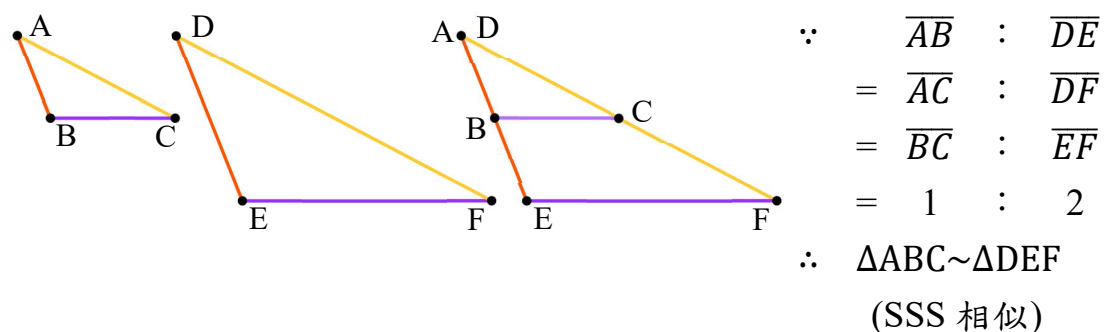


整理一下，以後，我們將「跟紙張一樣的平面」(又稱為歐基里德平面)簡稱為平面：

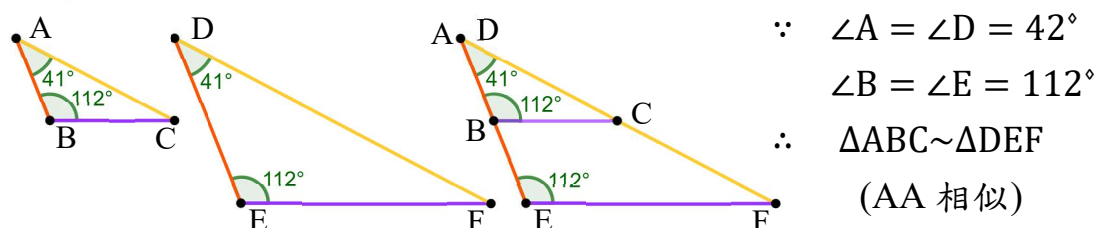
- (1) 在平面上，當三角形兩邊長度放大 2 倍，在兩邊夾角不變的情況下，第 3 邊的長度自然會被放大 2 倍。也就是說，當兩個三角形有兩組邊長比例相同，且兩邊的夾角相等，這兩個三角形就會是相似圖形，這種判斷法簡記為邊角邊相似(SAS 相似)。



- (2) 在平面上，當三角形三邊長度都放大 2 倍，角度不會改變。也就是說，當兩個三角形有三組邊長比例相同，這兩個三角形就會是相似圖形，這種判斷法簡記為邊邊邊相似(SSS 相似)。



- (3) 當兩個三角形兩個角度相同，第 3 個角度就會因為在平面上有三角形內角和 180 度而相同，此時，將兩個三角形的頂角對齊疊合時，它們的底邊就會平行，由平行線截等比例線段可以得到，兩個三角形的對應邊成比例，所以相似。也就是說，當兩個三角形有兩組角度相同，這兩個三角形就會相似，這種判斷法簡記為**角角相似**(AA 相似)。

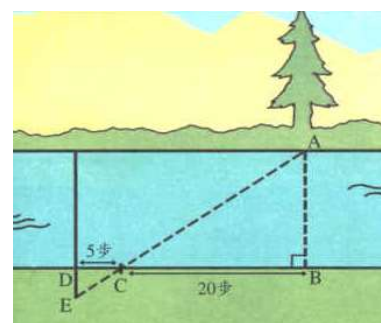


- 結論：**
1. **邊角邊相似**：兩組邊長比例相同且夾角相等的兩個三角形。
 2. **邊邊邊相似**：三組邊長比例相同的兩個三角形。
 3. **角角相似**：兩組角度相等的兩個三角形。

我們來看看相似三角形的厲害！

5. 想測量河寬($\overline{AB}$)，河流湍急沒辦法直接測量，我們可以這麼做：

- (1) 先找出對岸目標 A 點 (目標明顯的樹、大石塊...)。
- (2) 再找出本岸對應的 B 點，直視 A 點。
- (3) 站在 B 點，沿 AB 的垂直線，順著河邊走廿步(步數可自行設定)，做個記號，為 C 點。
- (4) 由 C 點再向前走五步(為原設定步數的四分之一)，即為 D 點。
- (5) 沿 CD 的垂直線，背河前進到能望見 C 與 A 成一直線時為止，得 E 點。
- (6) 測量 DE 的長度，河寬即為 DE 的四倍長。



以上是利用 AA 相似**創造**出兩個**相似三角形**，再利用相似圖形對應長度的比例相同，從可以量測的長度**算出**了無法直接測量的**河寬**！

※整理如下：

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 當中，

$\because \angle B = \angle D = 90^\circ$

且 $\angle ACB = \angle ECD$ (對頂角相等)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDC$ (AA 相似)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AB}{BC} &= \frac{ED}{CD} \Rightarrow AB = 4 \times ED \\ &= \frac{20}{5} \times 4 \end{aligned}$$

※換你來練習一下。

6. 想測量樹高($\overline{AD}$)，樹太高沒辦法直接測量，我們可以這麼做：

(1) 從樹下一點 A，背對樹幹向前走 9 步，設為 B 點，豎根棍子(棍子要比人高)。

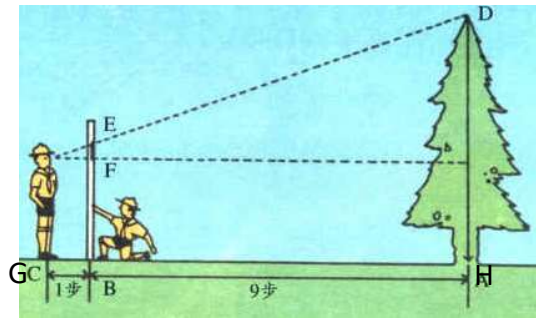
(2) 豎好棍子，從 B 點向前一步，設為 C 點。

(3) 站在 C 點，望向樹梢 D，視線通過棍子的那點做上記號，是為 E 點。

(4) 站在 C 點，兩眼平視，視線與棍子相交點，請同學做上記號，是為 F 點。

(5) 量出 EF 的長度。

(6) 樹高= $BF + EF \times 10$



以上是利用 AA 相似**創造**出兩個**相似三角形**，再利用相似圖形對應長度的比例相同，從可以量測的長度**算出**了無法直接測量的**樹高**！

※整理如下：練習使用第 6 題整理好的寫法，算出樹高($\overline{AD}$)。

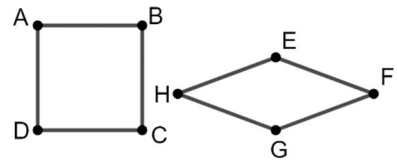
※我們有檢查兩個三角形是否相似的簡便方法，那**四邊形**呢？

多邊形呢？

7. 小學的時候，我們檢查四邊形或多邊形是否相似都是這麼說的：

對應角相等，**對應邊成比例**。現在我們學到判斷兩個三角形是否相似時，只要檢查對應邊是否成比例即可，不需要檢查對應角是否相等，這樣的想法可不可以應用在多邊形上呢？

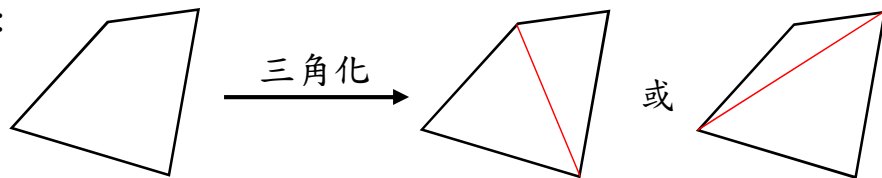
如右圖，兩個用相同長度做出來的四邊形，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $EFGH$ ，雖然他們的對應邊都相同，可是形狀卻不同，我們可以看到如果是 $A \leftrightarrow E$ ， $B \leftrightarrow F$ ，



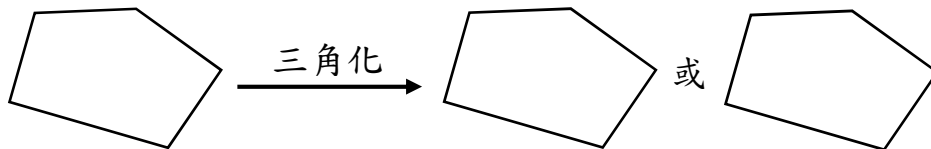
$C \leftrightarrow G$ ， $D \leftrightarrow H$ ，這種對應， $\overline{AC}$ 比 $\overline{EG}$ 長，但， $\overline{BD}$ 比 $\overline{FH}$ 短，光從長度不成比例就可以看出兩個四邊形不相似。

8. 我們可以這麼做，先將四個邊看成由許多三角形拼起來的圖形，也因此我們會考慮一些沒有被畫出來的線，例如對角線，這種過程叫做三角化一個圖形，將兩個想要比較是否相似的圖形對應的三角化之後，我們就可以利用所有相對應的三角形是否都相似來判斷是否相似了！

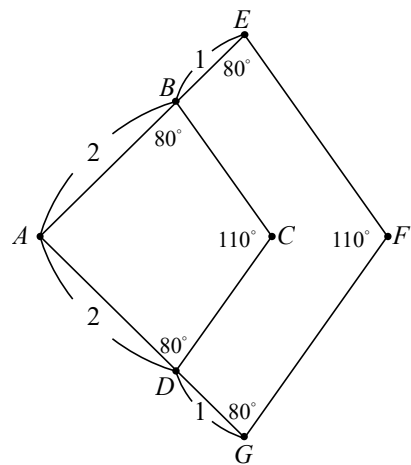
例如：



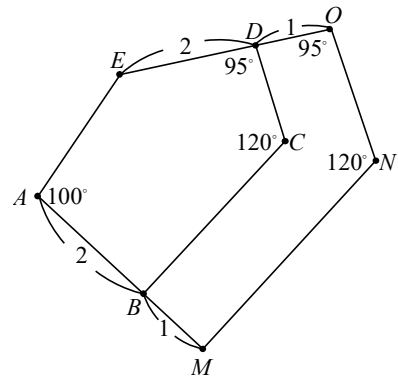
練習一下：



9. 如右圖，有兩個四邊形 $ABCD$ 與 $AEFG$ ，其中 B 、 D 分別在 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AG}$ 上。兩個四邊形是相似圖形嗎？



10. 如右圖，有兩個五邊形 $ABCDE$ 與 $AMNOE$ ，其中 B 、 D 分別在 $\overline{AM}$ 、 $\overline{EO}$ 上。兩個五邊形是相似圖形嗎？

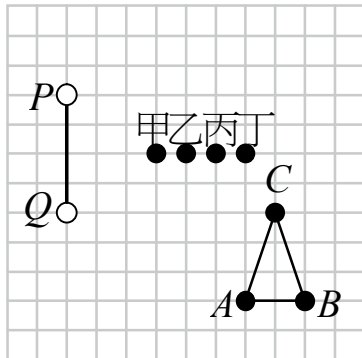


結論：三個邊以上的多邊形相似圖形的判斷方法

1. 對應角相等，且對應邊長成比例，兩個圖形才會相似。
2. 利用對角線將多邊形三角化，再利用三角形的相似性質。

1-3 相似形的使用

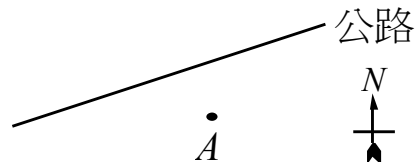
1. 如圖，棋盤上有 A 、 B 、 C 三個黑子與 P 、 Q 兩個白子。請問第三個白子 R 應放在下列哪一個位置，才會使得 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ ？



小幫手：

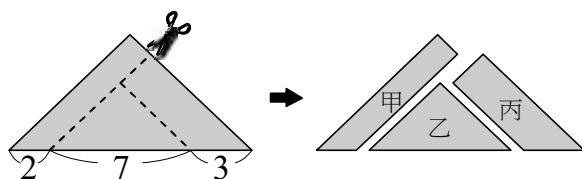
相似圖形所有對應的長度縮放的倍數都一樣。 $\triangle PQR$ 會是 $\triangle ABC$ 的幾倍放大圖形呢？

2. 如圖，有 A 村與一條直線型的公路，今以 A 村為基準點，向北走 4 公里可到達公路。若由 A 村向東走 6 公里，再向北走 6 公里也可到達公路，則由 A 村向西走多少公里可到達公路？



小幫手：依照題意畫出圖形，找出相似圖形。

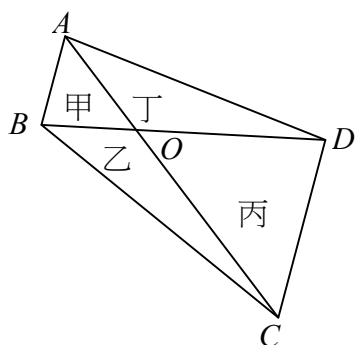
3. 如圖，將一張三角形紙片沿虛線剪成甲、乙、丙三塊，其中甲、丙為梯形，乙為三角形。根據圖中標示的邊長數據，比較甲、乙、丙的面積大小。



小幫手：

相似圖形所有對應的長度縮放的倍數都一樣，因此面積會同步縮放長度倍數的平方。

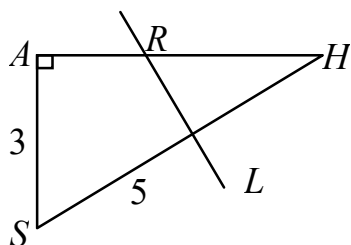
4. 如圖，不等長的兩對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於 O 點，且將四邊形 $ABCD$ 分成甲、乙、丙、丁四個三角形。若 $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD} = 1 : 2$ ，請找出相似三角形。



小幫手：

會是哪一種呢？邊角邊相似、邊邊邊相似還是角角相似。

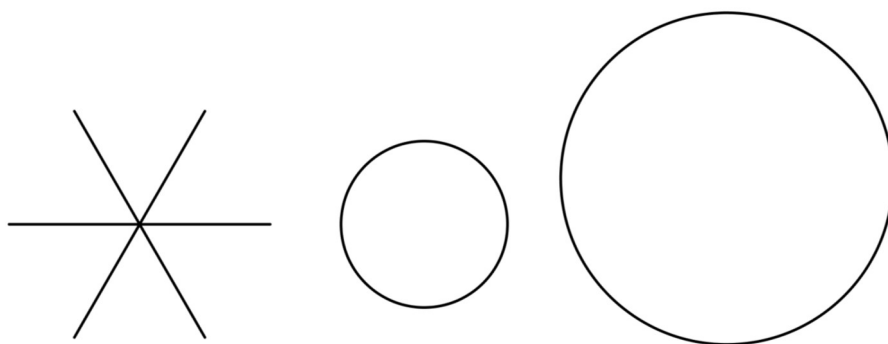
5. 如圖， $\triangle ASH$ 為直角三角形，其中 $\angle A = 90^\circ$ ， L 為 $\overline{SH}$ 的中垂線，交 $\overline{AH}$ 於 R 點。若 $\overline{AS} = 3$ ， $\overline{SH} = 5$ ，則 $\overline{RH} = ?$



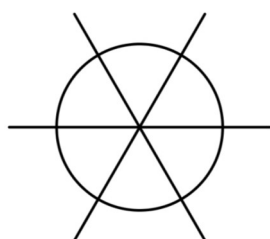
小幫手：

找出相似圖形，就找到解題的方法。

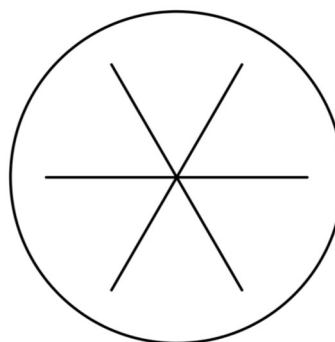
6. 我們使用**很有彈性**的玻璃纖維條做出下面 3 個圖形：



(1) 將小圓和放射線段的端點接起來，圖形看起來會像什麼？
☐頭 ☐脖子 ☐平面。



(2) 將大圓和放射線段的端點接起來，圖形看起來會像什麼？
☐頭 ☐脖子 ☐平面。



小幫手：圓如果**剛好**可以碰到放射線，連接起來的圖形就會是**平面**，
 不會**變形**成像頭一樣的**球面**，或是像脖子一樣的**雙曲面**囉。

註：第 6-7 題取自水牛出版之童軍教育第三冊。