

1-2 式的運算

重點整理

一、乘法公式

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。
2. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。(平方差)
3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ 。
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。
 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。
5. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。(立方和)
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。(立方差)

二、分式的運算

分式運算的基本規則如同分數的運算，分子與分母有共同因式時可以約分，作加減運算時要先通分。

$$\begin{aligned} \text{例：} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 1} \\ &= \frac{4x}{x^2 - 1}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-3x+2} \times \frac{x-1}{x^2+3x+2} &= \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} \times \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{1}{x^2-x-2}。 \end{aligned}$$

三、根式的運算

1. 根式的基本性質

實數表示為根號形式時，根號裡的數不能小於 0。

$$(1) \text{ 假設 } a, b \geq 0, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (b \neq 0)。$$

$$\text{例：} \sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}, \text{不可表為 } \sqrt{-2} \times \sqrt{-3}。$$

$$\text{同理，} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{不可寫為 } \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{-2}{-3}} = \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}。$$

$$(2) a \text{ 是任意實數，則 } \sqrt{a^2} = |a|。$$

$$\text{例：} \sqrt{3^2} = |3| = 3, \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3。$$

2. 有理化分母

將分母的無理數(帶根號的無理數)化為有理數,稱為**有理化分母**。

- (1) $\frac{b}{\sqrt{a}}$ 的形式: 分子、分母同時乘以 $\sqrt{a}$ 。

$$\text{例: } \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}。$$

- (2) $\frac{c}{a + \sqrt{b}}$ 的形式: 分子、分母同時乘以 $a - \sqrt{b}$ 。

$$\text{例: } \frac{1}{3 + \sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{3 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}。$$

- (3) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 的形式: 分子、分母同時乘以 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 。

$$\text{例: } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}。$$

3. 雙重根式

根號裡還有一個根號的實數,簡稱為**雙重根式**,例如: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ 、 $\sqrt{9 - \sqrt{56}}$ 、 $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ 。

符合特殊條件的雙重根式,可以消去外層根號,方法如下:

- (1) $\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, 其中 $a, b \geq 0$ 。

- (2) $\sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, 其中 $a \geq b \geq 0$ 。

$$\text{例: } \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3 + 2 + 2\sqrt{3 \times 2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}。$$

(找到 3 與 2, 使得 $3 + 2 = 5$, $3 \times 2 = 6$)

四、算幾不等式

設實數 $a, b \geq 0$, 則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

特別地, $a = b$ 時, 上式等號成立, 也就是 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 。

$\frac{a+b}{2}$ 稱為 a, b 的**算術平均數**, $\sqrt{ab}$ 稱為 a, b 的**幾何平均數**, 所以這個不等式簡

稱**算幾不等式**。

例: (1) 已知 $a, b > 0$ 且 $a + b = 6$,

則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 得 $\frac{6}{2} \geq \sqrt{ab}$, 即 $\sqrt{ab} \leq 3$, 故 $ab \leq 9$ 。

特別地, $a = b = 3$ 時, $ab = 9$ 。

(2) 已知 $a, b > 0$ 且 $ab = 16$,

則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 得 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{16}$, 即 $\frac{a+b}{2} \geq 4$, 故 $a + b \geq 8$ 。

特別地, $a = b = 4$ 時, $a + b = 8$ 。

例題 1 乘法公式

展開並化簡下列各式：

(1) $(x-2)^2$ 。(4分)

(2) $(x+2y)^3$ 。(4分)

(3) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$ 。(4分)

解

例題 2 使用乘法公式因式分解

試將下列各式因式分解：

(1) $a^4 - b^4 =$ _____。(4分)

(2) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 =$ _____。(4分)

(3) $8a^3 + b^3 =$ _____。(4分)

解

例題 3 分式的運算

(1) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+3x+2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4分)

(2) $\frac{x^2+2x}{x^3-1} - \frac{1}{x^2+x+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4分)

解

例題 4 乘法公式的應用

已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，試求：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4分)

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4分)

解

例題 5 根式運算

有理化分母：

(1) $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(2) $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

解

例題 6 根式的化簡

化簡下列各式：

(1) $(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

(2) $\sqrt{54} - \sqrt{24} + 2\sqrt{150} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

解

例題 7 雙重根式的化簡

試化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

(2) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

(3) $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

(4) $\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

解

例題 8 算幾不等式(一)

已知 $a, b > 0$ 且 $2a + 3b = 4$ ，試求 ab 最大值及最大值發生時的 a, b 值。(8 分)

解

例題 9 算幾不等式(二)

已知 $x, y > 0$ 且 $xy = 4$ ，試求 $x + 2y$ 的最小值及最小值發生時的 x, y 值。(8 分)

解**例題 10 算幾不等式的應用**

小明打算用鐵絲網在一個筆直的圍牆邊圍矩形花圃。

- (1) 已知鐵絲網長度為 36 公尺，試求此矩形花圃的最大面積為多少平方公尺？(5 分)
- (2) 如果打算圍出面積為 200 平方公尺的矩形花圃，至少需要多少公尺的鐵絲網？(5 分)

解