CHAPTER

# 3

# 多項式函數

## 3-1

### 多項式的運算與應用

1. 多項式的基本概念
2. 多項式的四則運算
3. 餘式定理
4. 因式定理

## 3-2

### 多項式函數及其圖形

1. 函　數
2. 一次函數及其圖形
3. 二次函數及其圖形
4. 三次函數及其圖形
5. 函數圖形的大域特徵和局部特徵

## 3-3

### 多項式不等式

1. 函數圖形與方程式的實根
2. 一次、二次不等式
3. 高次不等式

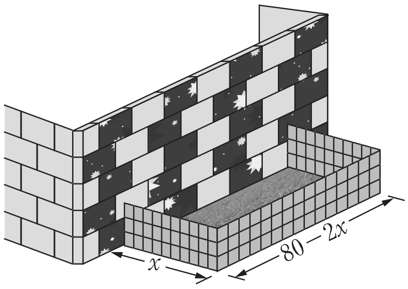
# 3-1 多項式的運算與應用

最早提出符號代表未知量，進行代數式的運算和方程求解的數學家是花拉子米 (約公元 780～850)，代表數學從算術進入代數階段．由數和具有數的性質的符號，用加、減、乘運算所形成的式子，稱為多項式．本節中，將討論多項式的概念和四則運算，以及由除法運算所推導出的重要定理 —— 餘式定理與因式定理．


▲ 蘇聯為紀念花拉子米 1200 歲，於 1983 年發行的紀念郵票

## 1 多項式的基本概念

如右圖，想用長 80 公尺的柵欄圍成一個矩形的菜園，且矩形菜園的一邊是住屋的高牆，則菜園的最大面積為何？若矩形菜園與牆相鄰的邊長是 $x$ 公尺，則所圍菜園的面積為 $x(80-2x)=-2x^2+80x$．我們將形如 $-2x^2+80x$ 的式子稱為 $x$ 的多項式．




事實上，若 $n$ 是正整數或 0，$a$ 為實數，我們將形如 $ax^n$ 稱為 $x$ 的**單項式**．當 $n=1$ 時，可簡寫成 $ax$；當 $n=0$ 時，則簡寫成 $a$．由有限多個 $x$ 的單項式用加號或減號連接的式子，則稱為 $x$ 的**多項式**．而多項式常表示如下：

**常用的多項式表示法**

一個 $x$ 的多項式常寫成

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 為實數．

例如: $2x$, $\frac{1}{3}x^2-5$, $x^3-\sqrt{2}x+1$ 都是 $x$ 的多項式; 而 $\frac{1}{x}+x^2$, $|x|+2$, $3+\sqrt{x-1}$ 都不是 $x$ 的多項式. 為了方便, 常用 $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ 等符號來代表不同的多項式.

**教學活動**

下列哪些式子是 $x$ 的多項式? (多選)

(A) $x+\frac{1}{x}$　(B) $x-\sqrt{x}$　(C) $5x+\frac{1}{3}$　(D) $\sqrt{7}$　(E) $|x|^3+3x-1$

有關多項式 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 的一些基本概念, 說明如下:

(1) **係數**

$a_n$, $a_{n-1}$, $\cdots$, $a_1$ 分別稱為 $x^n$, $x^{n-1}$, $\cdots$, $x$ 項的**係數**. 當 $a_n \neq 0$, $a_n$ 稱為 $f(x)$ 的**首項係數**, $a_0$ 稱為 $f(x)$ 的**常數項**. 此處所談多項式的係數, 都限定在實數的範圍內.

(2) **次數**

當 $a_n \neq 0$ 時, $f(x)$ 的次數就是 $a_n x^n$ 項中 $x$ 的乘冪 $n$, 稱為 ***n* 次多項式**. 簡記作 $\deg f(x)=n$. 例如:

$f(x)=-x^3+x^2+\sqrt{3}$.　　$\deg f(x)=3$　三次多項式

$p(x)=\frac{2}{3}$.　　$\deg p(x)=0$　零次多項式

$q(x)=0$. (**零多項式**)　　$q(x)$ 沒有次數

(零次多項式與零多項式) 合稱為常數多項式

一個多項式依各項次數由高而低排列, 稱為**降冪排列**. 反之, 則稱為**升冪排列**. 例如: $f(x)=2x^3-x^2+3x+7$ (降冪排列) 或

$f(x)=7+3x-x^2+2x^3$ (升冪排列).

(3) **多項式的值**

當 $x$ 指定一個數值 $x_0$ 代入多項式 $f(x)$, 稱

$f(x_0)=a_n x_0{}^n+a_{n-1}x_0{}^{n-1}+\cdots+a_1 x_0+a_0$ 為 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的值.

例如: $f(x)=-x^3+x^2+2x+1$, 則 $f(x)$ 在 $x=1$ 的值為

$$f(1)=-1^3+1^2+2\cdot 1+1=3.$$

**教學活動**

設多項式 $f(x)=4x^2-2x-x^3-5$, 請回答下列問題:

(1) 將 $f(x)$ 降冪排列, 則 $f(x)=$________________.

(2) $f(x)$ 的首項係數為______, $\deg f(x)=$______, $f(x)$ 的常數項為_____.

(4) 多項式的相等

當兩個多項式 $p(x)$ 與 $q(x)$ 的**次數相等**, 且**同次項** (次數相同的項) **係數均相等**, 則稱 $p(x)$ 與 $q(x)$ 相等, 記作 $p(x)=q(x)$. 此時, $x$ 以任何數值分別代入 $p(x)$, $q(x)$, 兩多項式的值恆相等.

**教學活動**

已知 $f(x)=(a-2)x^2+3x+(c+1)$, $g(x)=(2b-1)x+10$. 若 $f(x)=g(x)$, 求 $a$, $b$, $c$ 的值.

# 2 多項式的四則運算

## 多項式的加法和減法

兩多項式的相加、相減, 就是將同次項的係數相加、相減, 進行合併同次項, 再整理成降冪 (或升冪) 排列. 例如, $f(x)=5x^3-6x+3$, $g(x)=2x^2+3x-4$, 則

$$\begin{aligned} f(x)-2g(x) &= (5x^3-6x+3)-2(2x^2+3x-4) \\ &= (5x^3-6x+3)-(4x^2+6x-8) \\ &= 5x^3-4x^2+(-6-6)x+(3+8) \\ &= 5x^3-4x^2-12x+11. \end{aligned}$$

## 教學活動

求下列多項式的和、差:

(1) $(x^3-x^2+3x+5)+(x^2-2x-4)=$__________.

(2) $(5x^2+x-7)-(5x^2-2x+3)=$__________.

從上面的教學活動不難發現:

兩多項式經過相加或相減後, 最高次項可能消去. 因此,

**給定兩個非零多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$, 當 $f(x)\pm g(x)$ 不是零多項式時，**

**$f(x)\pm g(x)$ 次數會小於或等於 $f(x)$ 與 $g(x)$ 中的較大次數。**

## 多項式的乘法

接著來看多項式的乘法, 以 $f(x)=4x+5$, $g(x)=x^2+3x-2$ 為例:

$$\begin{aligned}f(x)\,g(x)&=(4x+5)(x^2+3x-2)\\&=4x(x^2+3x-2)+5(x^2+3x-2)\\&=4x^3+(12+5)x^2+(-8+15)x-10\\&=4x^3+17x^2+7x-10.\end{aligned}$$

除了橫式算法外, 也可用直式算法進行運算, 見**例題 1**.

## 例題 1

求兩多項式 $f(x)=3x-2$ 與 $g(x)=x^3-2x+5$ 的乘積.

解

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & +\,0x^2 & -\,2x & +\,5 & \\
\times) & & & 3x & -\,2 & \\
\hline
 & -2x^3 & +\,0x^2 & +\,4x & -\,10 & \\
+)\ 3x^4 & +\,0x^3 & -\,6x^2 & +\,15x & & \\
\hline
3x^4 & -\,2x^3 & -\,6x^2 & +\,19x & -\,10 &
\end{array}$$

**隨堂練習**

求下列多項式的乘積，並按降冪排列.

(1) $(x-1)(x^2+x+1)=$____________.

(2) $(x+2)(x^3-x^2-1)=$____________.

由上面的計算中，會發現多項式的乘法與其次數之間有著重要關係：

若 $f(x)$ 的最高次項是 $a_n x^n$，$g(x)$ 的最高次項是 $b_m x^m$，則 $f(x)\cdot g(x)$ 的最高次項為 $(a_n x^n)\cdot(b_m x^m)=(a_n b_m)x^{n+m}$.（因 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，故 $a_n b_m\neq 0$.）

換句話說，**兩非零多項式相乘後，次數等於兩多項式的次數和.**

## 多項式的除法

多項式的除法運算，可視為整數除法的延伸，下面用**例題** 2 說明.

**例題 2**

設 $f(x)=4x^3-3x+5$，$g(x)=2x^2+x-2$，試求：

$f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $q(x)$ 和餘式 $r(x)$.

解

$-2x^2\div 2x^2=-1$

$4x^3\div 2x^2=2x$

$$\begin{array}{rrl}
 & 2x\quad -1 & \\
2x^2+x-2\,\big) & 4x^3+0x^2-3x+5 & \\
 & \underline{4x^3+2x^2-4x\qquad} & \leftarrow 2x\,(2x^2+x-2) \\
 & -2x^2+\ x+5 & \\
 & \underline{-2x^2-\ x+2} & \leftarrow -1\,(2x^2+x-2) \\
 & 2x+3 &
\end{array}$$

故商式 $q(x)=2x-1$，餘式 $r(x)=2x+3$.

**例題** 2 中 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的演算法叫作**長除法**, 當餘式 $2x+3$ 的次數小於除式 $2x^2+x-2$ 的次數, 就停止運算.

### 隨堂練習

設 $f(x)=2x^3+5x^2+x-2$, $g(x)=2x-1$, 試求:

(1) $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式、餘式.

(2) $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的商式、餘式.

由**例題** 2 可知:

$$4x^3-3x+5=(2x^2+x-2)(2x-1)+(2x+3),$$

$$\text{被除式}=\quad\text{除式}\quad\times\ \text{商式}\ +\ \text{餘式},$$

$$f(x)=\quad g(x)\quad\cdot\ q(x)\ +\ r(x),$$

這樣的關係, 稱為多項式的**除法原理**.

### 多項式的除法原理

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是兩個多項式, 且 $g(x)$ 不是零多項式, 則恰有一組多項式 $q(x)$, $r(x)$ 使得

$$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x),\ \text{其中 } r(x)=0 \text{ 或 } \deg r(x)<\deg g(x).$$

此時, 滿足上式的 $q(x)$, $r(x)$ 分別稱為 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式、餘式.

### 教學活動

設多項式 $f(x)$ 除以 $2x+4$ 的商式為 $x^2-2x+1$, 餘式為 5.

(1) $f(x)=$________$(x^2-2x+1)+5$.

(2) 求 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的商式和餘式.

**例題 3**

已知 $x^3+mx^2+3x+1$ 被 $x^2-x+2$ 除的商式為 $x+1$，餘式為 $2x+n$，求 $m$，$n$ 的值.

解

由除法原理，設

$$x^3+mx^2+3x+1=(x^2-x+2)\cdot(x+1)+(2x+n)$$

$$=x^3+3x+(2+n),$$

得 $\begin{cases} m=0, \\ 1=2+n, \end{cases}$ 故 $m=0$，$n=-1$.

從上面的解法可以看到：
遇到除法的問題除了利用長除法，也可用除法原理將之寫成乘法的形式，從不同的方向解決問題.

**隨堂練習**

若 $x^3+ax^2+6x+8$ 被 $x^2+2x+3$ 除的商式為 $x+1$，餘式為 $bx+c$，試求 $a$，$b$，$c$ 的值.

此外，長除法運算所占的篇幅通常較為龐大，當除式是一次式且首項係數為 1 時，求商式、餘式常用另一種簡化的除法演算，稱為**綜合除法**. 下面以 $2x^3+3x^2-5x+15$ 除以 $x+3$ 為例說明.（課本附錄三還提供另一種解說版本，請同學自行參閱.）

❶ 長除法算式如圖 1, 觀察算式, 可發現許多單項式重複出現. 如: $\boxed{\phantom{x}}$ 內單項式的係數都是商式的係數 (因為除式一次項係數為 1), ◌ 內單項式的係數是被除式的係數, 可以將這些單項式省略不寫, 如圖 2.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+4 \quad \leftarrow \text{商式} \\
x+3 & 2x^3+3x^2-5x+15 \leftarrow \text{被除式} \\
 & \underline{\boxed{2x^3}+6x^2} \\
 & \quad \boxed{-3x^2}-5x \\
 & \quad \underline{\boxed{-3x^2}-9x} \\
 & \qquad\quad \boxed{4x}+15 \\
 & \qquad\quad \underline{\boxed{4x}+12} \\
 & \qquad\qquad\quad 3 \leftarrow \text{餘式}
\end{array}
$$

圖 1

❷ 將 $\boxed{\phantom{x}}$ 內的單項式 $-9x$, $+12$ 往上提升與 $+6x^2$ 同一列, 寫在被除式的對應項下; 合併餘式與商式寫在第三列; 除式寫到右邊, 得到更簡化的演算式, 如圖 3.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+4 \quad \leftarrow \text{商式} \\
x+3 & 2x^3+3x^2-5x+15 \leftarrow \text{被除式} \\
 & \underline{\qquad +6x^2 \qquad\qquad} \\
 & \underline{\qquad\qquad \boxed{-9x} \qquad} \\
 & \underline{\qquad\qquad\qquad \boxed{+12}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 3 \leftarrow \text{餘式}
\end{array}
$$

圖 2

❸ 觀察圖 3 第二列係數 6, $-9$, 12 為商式的係數 2, $-3$, 4 依序乘除式常數項 $+3$ 的結果 (除式一次項係數為 1), 第三列的數字正是第一列減去第二列.

$$
\begin{array}{lr|ll}
\text{被除式} & & \text{除式} & \\
 & 2x^3+3x^2-5x+15 & x+3 & (\text{第一列}) \\
-) & +6x^2-9x+12 & & (\text{第二列}) \\
\hline
 & \underbrace{2x^2-3x+4}_{\text{商式}} \; \underbrace{+\;3}_{\text{餘式}} & & (\text{第三列})
\end{array}
$$

圖 3

❹ 再將減法用加法取代, 故除式的常數項 $+3$ 變號為 $-3$, 並將 $x$ 去除予以精簡得到綜合除法的演算式, 如圖 4.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & \text{除式}\, x+3=x-(-3) \\
\text{被除式}\rightarrow & 2+3-5+15 & -3 \\
+) & -6+9-12 & \\
\hline
 & \underbrace{2-3+4}\,\underbrace{\big|+\;3} &
\end{array}
$$

商式: $2x^2-3x+4$ 餘式: 3

圖 4

與長除法不同, 綜合除法操作時, 特別注意兩點:

(1) 除式為 $x-c$ 時, 算式的右側要寫 $c$.

(2) 第一列與第二列**相加**得第三列.

## 例題 4

用綜合除法求多項式 $2x^3-5x^2+1$ 除以 $x+2$ 的商式及餘式.

解

除式: $x+2=x-(-2)$,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 被除式 | | $2$ | $-5$ | $+0$ | $+1$ | $-2$ | 除式 $x-(-2)$ |
| | $+)$ | | $-4$ | $+18$ | $-36$ | | |
| 商　式 | | $2$ | $-9$ | $+18$ | $\boxed{-35}$ | | 餘式 |

商式為 $2x^2-9x+18$, 餘式為 $-35$.

### 隨堂練習

用綜合除法求多項式 $x^3+3x^2-4x-2$ 除以 $x-1$ 的商式及餘式.

綜合除法的另一個優點是可連續操作, 將多項式 $f(x)$ 表成 $x-a$ 形式的多項式, 其中 $a$ 為實數.

## 例題 5

設 $f(x)=2x^3-7x^2+6x$.

(1) 將 $f(x)$ 表成 $x-1$ 形式的多項式. 即求出常數 $a, b, c, d$ 使得

$f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$.

(2) 利用 (1), 求 $f(0.998)$ 的近似值. (用四捨五入法取到小數第三位)

解

(1) $f(x)$

$=2x^3-7x^2+6x$

$=(x-1)\underbrace{(2x^2-5x+1)}_{q_1(x)}+1$

$=(x-1)[(x-1)\underbrace{(2x-3)}_{q_2(x)}-2]+1$

$=(x-1)^2(2x-3)-2(x-1)+1$

$=(x-1)^2[2(x-1)-1]-2(x-1)+1$

$=2(x-1)^3-(x-1)^2-2(x-1)+1$,

因此, $f(x)=2(x-1)^3-1(x-1)^2-2(x-1)+1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
f(x)\rightarrow & 2 & -7 & +6 & +0 & 1 \\
+) & & +2 & -5 & +1 & \\
\hline
q_1(x)\rightarrow & 2 & -5 & +1 & \boxed{+1} \leftarrow d & \\
+) & & +2 & -3 & & \\
\hline
q_2(x)\rightarrow & 2 & -3 & \boxed{-2} \leftarrow c & & \\
+) & & +2 & & & \\
\hline
a\rightarrow & 2 & \boxed{-1} \leftarrow b & & &
\end{array}
$$

(2) $x=0.998$, 可得 $x-1=-0.002$,

前二項數值太小, 可略去不計.

$f(0.998)=2(-0.002)^3-(-0.002)^2-2(-0.002)+1$

$\approx 0.004+1=1.004$. 故 $f(0.998)\approx 1.004$.

## 隨堂練習

設 $f(x)=x^3-4x^2+5x+3$.

(1) 用綜合除法找出常數 $a, b, c, d$ 使得

$f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$.

(2) 利用(1), 求 $f(2.001)$ 的近似值. (四捨五入法, 取到小數第三位)