

## 精英重點補充

1. 乘法公式內的符號變化：

(1)  $(-a+b)^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

例： $(-x+5)^2 = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

(2)  $(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

例： $(-x-2)^2 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

2. 在做長除法運算時，餘式的次數要比除式的次數小，或餘式為零才算完成。若遇到缺項時，該項係數要補 0。

3. 若多項式  $A \div B = Q \cdots \cdots$  餘  $R$ ，且  $m$ 、 $n$  為有理數，則：

(1)  $A = B \times Q + R$

(3)  $A \div mB = \frac{1}{m}Q \cdots \cdots$  餘  $R$

(4)  $mA \div nB = \frac{m}{n}Q \cdots \cdots$  餘  $mR$

(2)  $A = B \times Q + R$  同除以  $B \Rightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$

(3)  $A = B \times Q + R = mB \times \frac{1}{m}Q + R$   $\therefore$  商式為  $\frac{1}{m}Q$ ，餘式為  $R$

(4)  $A = B \times Q + R$  同乘以  $m \Rightarrow mA = mB \times Q + mR = nB \times \frac{m}{n}Q + mR$

$\therefore$  商式為  $\frac{m}{n}Q$ ，餘式為  $mR$

## 範例 1

展開  $(3x+2y)^2(3x-2y)^2$ ，得到的結果為何？

$$\begin{aligned} &= [(3x+2y)(3x-2y)]^2 \\ &= (9x^2-4y^2)^2 \\ &= (9x^2)^2 - 2 \cdot 9x^2 \cdot 4y^2 + (4y^2)^2 \\ &= 81x^4 - 72x^2y^2 + 16y^4 \end{aligned}$$

## 精題

展開  $(\frac{2}{3}x+y)^2(\frac{2}{3}x-y)^2$ ，得到的結果為

$$\frac{81}{16}x^4 - \frac{9}{2}x^2y^2 + y^4$$

## 2 範例

被除式 = 除式  $\times$  商式 + 餘式

## 演練 2

若多項式  $A \div B$  得到商式為  $2x+3$ ，餘式為  $-4$ ，則多項式  $2A \div 3B$  之商式與餘式分別為何？

$$\begin{aligned} \text{解：} \therefore A &= (2x+3) \cdot B + (-4) \\ \therefore 2A &= 2(2x+3) \cdot B + (-8) \\ &= 3B \cdot \frac{2}{2}(2x+3) + (-8) \\ &= 3B \cdot \frac{3}{2}(2x+3) + (-8) \\ \therefore \text{商式} &= \frac{3}{2}(2x+3) = \frac{3}{4}x + 2 \\ \text{餘式} &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解：} \therefore C &= (4x-5) \cdot D + (-2) \\ \therefore 3C &= 3(4x-5) \cdot D + (-6) \\ &= \frac{1}{2}D \cdot 6(4x-5) + (-6) \\ \therefore \text{商式} &= 6(4x-5) = 24x-30 \\ \text{餘式} &= -6 \end{aligned}$$

若多項式  $C \div D$  得到商式為  $4x-5$ ，餘式為  $-2$ ，則多項式  $3C \div \frac{1}{2}D$  之商式與餘式分別為何？

## 3 範例

多項式乘法的應用(1)

## 演練 3

若  $x^2+6x-4=0$ ，則  $(x-1)(x+2) \times (x+4)(x+7)$  之值為何？

$$\begin{aligned} \text{解：} \therefore x^2+6x &= 4 \\ \therefore \text{原式} &= (x-1)(x+7)(x+2)(x+4) \\ &= (x^2+6x-7)(x^2+6x+8) \\ &= (4-7) \times (4+8) \\ &= (-3) \times 12 = -36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解：} \therefore x^2-5x &= -3 \\ \therefore \text{原式} &= (x-7)(x+2)(x-2)(x-3) \\ &= (x^2-5x-14)(x^2-5x+6) \\ &= (-3-14) \times (-3+6) \\ &= (-17) \times 3 = -51 \end{aligned}$$

若  $x^2-5x+3=0$ ，則  $(x-7)(x-2) \times (x-3)(x+2)$  之值為何？

## 類題

若  $x^4=25$ ，則  $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$  之值為  $-624$ 。

## 4 範例

多項式乘法的應用(II)

## 演練 4

若  $x^3+4x^2-3x+1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ ，試求下列各式的值：

(1)  $a+b+c+d$ (2)  $-a+b-c+d$ 解：(1) 以  $x=0$  代入(2) 以  $x=-2$  代入

$$\begin{aligned} \therefore a+b+c+d &= 1 \\ \therefore -a+b-c+d &= -8+16+6+1=15 \end{aligned}$$

## 類題

若  $2x^2+3x+7=a(x+1)(x-1)+b(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$ ，則  $a+b=$  1。