



1-3 對數函數

配合課本 P.39~P.45

主題 1 對數函數

1. 設 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ ， x 是任意正實數，則稱函數 $f(x) = \log_a x$ 是以 a 為底數的對數函數。

2. 對數函數 $y = \log x$ 的圖形特性

- (1) 過定點 $(1, 0)$ 。
- (2) 圖形皆在 y 軸右方，即 $x > 0$ 。
- (3) $y = \log x$ 為嚴格遞增函數，即 $x_1 < x_2$ ，則 $\log x_1 < \log x_2$ ，圖形由左往右逐漸上升。
- (4) 圖形有漸近線 $x = 0$ 。
- (5) 圖形凹口向下。
- (6) 任一直線和圖形最多有 2 個交點，水平線和圖形最多有 1 個交點。

3. 對數函數 $y = \log x$ 的凹向性

- (1) $y = \log x$ 的圖形凹口向下。
- (2) 若在 $y = \log x$ 的圖形上任取相異兩點 $A(x_1, \log x_1)$ 、 $B(x_2, \log x_2)$ ，則

$$\frac{\log x_1 + \log x_2}{2} < \log \frac{x_1 + x_2}{2}。$$



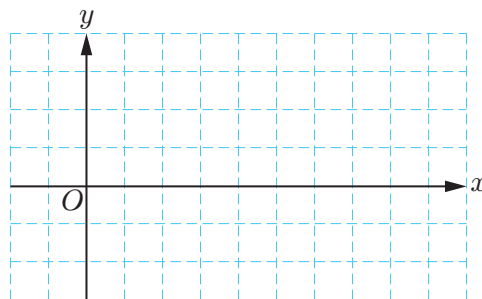
例題 1

對數函數的圖形

配合課本例題 1

試利用描點法描繪函數 $y = \log_3 x$ 的圖形。

解

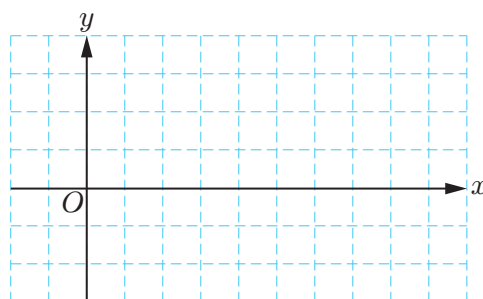




練習 1

試利用描點法描繪函數 $y = \log x$ 的圖形。

解



1



例題 2

對數函數的性質

配合課本例題 2

下列關於函數 $y = \log x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A) 圖形與 y 軸交於 $(0, 1)$
- (B) 圖形均在 x 軸的上方
- (C) 圖形由左向右逐漸遞增
- (D) 圖形與 x 軸恰有一個交點
- (E) 若 $(\frac{1}{3}, k)$ 為函數 $y = \log x$ 圖形上一點，則 $k < 0$

解

 練習 2

下列關於函數 $y = \log x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A) 圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$
- (B) 圖形均在 y 軸的右方
- (C) 圖形與 $x = 3$ 恰有一個交點
- (D) 圖形與 $y = -\frac{1}{2}$ 恰有一個交點
- (E) 若 $(h, \frac{1}{3})$ 為函數 $y = \log x$ 圖形上一點，則 $h < 0$

解


例題 3

函數 $y = \log x$ 的凹向性



已知 $y = \log x$ 的圖形上的兩點 $A(3, \log 3)$ 、 $B(5, \log 5)$ ，試利用圖形的性質來比較 $a = \log 4$ 、 $b = \frac{\log 3 + \log 5}{2}$ 的大小關係。

解

 練習 3

若 $a > b$ ，試比較 $\log \frac{a+b}{2}$ 、 $\frac{\log a + \log b}{2}$ 的大小關係。

解

配合課本 P.45

主題 2 指數函數與對數函數的圖形關係

1. 指數函數與對數函數圖形的對稱性

- (1) $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 兩函數圖形對稱於直線 $y = x$ 。
- (2) 當 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 與 $y = a^x$ 兩函數圖形對稱於直線 $y = x$ 。

2. 對數函數的圖形特性

當 $a > 1$ 時，對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形有以下特性：

- (1) 過定點 $(1, 0)$ 。
- (2) 圖形皆在 y 軸右方，即 $x > 0$ 。
- (3) $y = \log_a x$ 為嚴格遞增函數，即 $x_1 < x_2$ ，則 $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ，圖形由左往右逐漸上升。
- (4) 圖形有漸近線 $x = 0$ 。
- (5) 圖形凹口向下。
- (6) 任一直線和圖形最多有 2 個交點，水平線和圖形最多有 1 個交點。
- (7) $y = \log_a x$ 與 $y = a^x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。



例題 4

指數與對數函數的性質



下列關於函數 $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A) 兩圖形均與 y 軸交於 $(0, 1)$
- (B) 兩圖形均在 x 軸的上方
- (C) 兩圖形均由左向右逐漸遞增
- (D) 兩圖形均會與任一鉛直線交於一點

解



練習 4

下列關於函數 $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A) 兩圖形均有漸近線
- (B) 兩圖形均凹口向上
- (C) 兩圖形均會與任一水平線交於一點
- (D) 兩圖形對稱於直線 $y = x$

解



主題 3 對數方程式與不等式

1. 簡單對數方程式：

$\log_a x_1 = \log_a x_2$ 則 $x_1 = x_2$ 。(對數方程式需注意解是否為符合自然限制)

2. 簡單對數不等式：

$\log_a x_1 > \log_a x_2$ 時，若 $a > 1$ ，則 $x_1 > x_2$ ，若 $1 > a > 0$ ，則 $x_1 < x_2$ 。

3. 進階對數方程式與不等式：

若方程式（或不等式）的等號（或不等號）兩側無法化為單一的對數，則令 $t = \log_a x$ 其它部份需能化為 t^2 或 $\frac{1}{t}$ ，將式子化為二次方程式（或不等式）。

1



例題 5

對數方程式

配合課本例題 3

試解下列對數方程式：

(1) $\log \sqrt{x-21} + \frac{1}{2} \log x = 1$ 。

(2) $(\log x)^2 - 4(\log x) + 3 = 0$ 。

解

 練習 5

試解下列對數方程式：

(1) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$ 。

(2) $(\log x)^2 - 3(\log x) + 2 = 0$ 。

解


例題 6
對數不等式

配合課本例題 4 

試解下列對數不等式：

(1) $\log \sqrt{x-21} + \frac{1}{2} \log x \geq 1$ 。

(2) $(\log x)^2 - 4(\log x) + 3 \geq 0$ 。

解

 練習 6

試解下列對數不等式：

(1) $\log_2 x + \log_2(x-1) \leq 1$ 。

(2) $(\log x)^2 - 3(\log x) + 2 \leq 0$ 。

解



例題 7

解一般的指數方程式

配合課本例題 5

試求指數方程式 $10^{x-1} = 3^x$ 的解，四捨五入到小數點後第一位。

解

1



練習 7

試求指數方程式 $2^{x+1} = 3^x$ 的解，四捨五入到小數點後第一位。

解



例題 8

利用取對數比大小

配合課本例題 6

試比較 $a = 2^{48}$ 、 $b = 3^{30}$ 和 $c = 5^{25}$ 的大小關係。

解



練習 8

試比較 2^{54} 和 3^{35} 的大小關係。

解

主題 4 對數函數的應用

1. 七二法則

設本金為 P ，利率為 $r\%$ ，複利計算，期數為 n 。

當 n 、 r 滿足 $n \times r = 72$ 時，則 n 年後的本利和約為 $2P$ 。當 $2 \leq r \leq 18$ 時，估計效果較佳。

例如：當年利率為 4% 時， $n = \frac{72}{4} = 18$ ，即 18 年後本利和為原來的 2 倍。

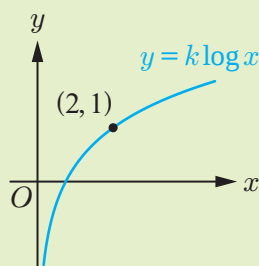


例題 9

對數函數的應用 1

配合課本例題 7

已知「環境照度」為 x 勒克斯時，其中勒克斯為照度單位，設眼睛對環境的「亮度感覺」為 y ，而 y 與 x 呈現對數函數 $y = k \log x$ 的關係，其中 k 為常數。右圖是函數 $y = k \log x$ 的部分圖形，試求：



(1) k 的值。

(2) 已知原教室使用日光燈燈管時，眼睛對教室的亮度感覺為 7，而後

來學校將教室換成 LED 燈管時眼睛對教室的亮度感覺為 9，則 LED 燈管的環境照度為日光燈燈管的環境照度的多少倍？

解



練習 9

承上題，若是晴天時的環境照度為 8192 勒克斯，試求此時眼睛對環境的亮度感覺之值。

解

1



例題 10

對數函數的應用 2

配合課本例題 8

小華實業年營收為 1 億元，若以平均年成長率 4% 計算，試問多少年後年營收達 2 億元？

($\log 1.04 \approx 0.0170$)

解



練習 10

小華實業年營收為 1 億元，倘若公司希望在 9 年後年營收達 2 億元，則所需平均年成長率約為多少呢？($10^{0.03344} \approx 1.08$)

解