當根號內的數無法直接看出它是否為某正數的平方時，可利用下面的方法求出它的值。

放大 **例4 利用質因數分解求 $\sqrt{a^2}$ 的值** 加強 自評 P71 第 3 題

計算下列各數：

(1) $\sqrt{784}$　(2) $\sqrt{2^4\times3^2\times7^2}$　(3) $\sqrt{1.96}$

解 (1)

解 (2)

解 (3)

放大 **隨堂練習** 自評 P71 第 2 題 (3)(4)

計算下列各數：

(1) $\sqrt{576}$　(2) $\sqrt{2^2\times3^4\times5^4}$　(3) $\sqrt{4.41}$

解　解　解

③ $\sqrt{a}$ 的近似值 動畫

基會 十分逼近法

正方形的面積為 3，其邊長可記為 $\sqrt{3}$，那麼 $\sqrt{3}$ 的近似值應該是多少呢？

因為 $1^2=1<3$，且 $2^2=4>3$，所以 $1<\sqrt{3}<2$，故 $\sqrt{3}=1.\cdots$，即 $\sqrt{3}$ 的整數部分為 1，下面的 探索活動 將進一步推導 $\sqrt{3}$ 的近似值。

放大 **探索活動 十分逼近法**

解 1. 將 1 到 2 之間分成十等分，並使用計算機求出這九個等分點 1.1 至 1.9 的平方：

$(1.1)^2=$ ______

$(1.2)^2=$ ______

$(1.3)^2=$ ______

$(1.4)^2=$ ______

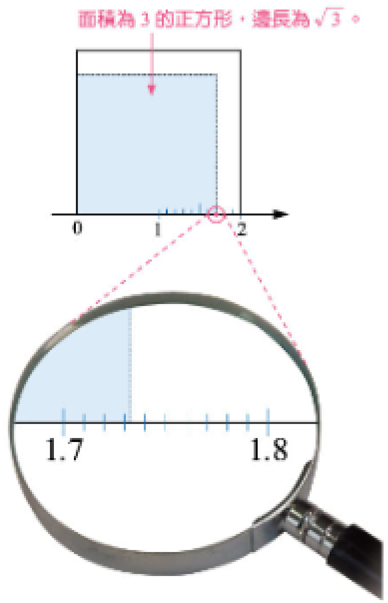
$(1.5)^2=$ ______

$(1.6)^2=$ ______

$(1.7)^2=$ ______

$(1.8)^2=$ ______

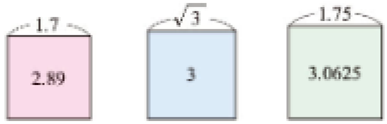
$(1.9)^2=$ ______



解 2. 3 介於第 1 題中哪兩個平方數之間？

因為 $(\sqrt{3})^2=3$，對照上面 1.1 至 1.9 九個數的平方，可知 $(1.7)^2<(\sqrt{3})^2<(1.8)^2$，所以 $1.7<\sqrt{3}<1.8$。

那麼 $\sqrt{3}$ 到底比較靠近 1.7 還是 1.8 呢？



我們知道 $(1.75)^2=3.0625$，所以 $1.7<\sqrt{3}<1.75$。

如果用四捨五入法求得 $\sqrt{3}$ 的近似值到小數點後第一位，即 $\sqrt{3}≒1.7$。（≒讀作「近似於」）依此方式進行，可以求出 $\sqrt{3}$ 的近似值到任意小數位數，這個方法稱為**十分逼近法**。

將十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位的過程，整理如下：

$(\sqrt{3})^2=3$

(1) $1^2=1$，$2^2=4$，
因為 $1^2<(\sqrt{3})^2<2^2$，
所以 $1<\sqrt{3}<2$。

$1^2=1$，$2^2=4$ ⟵ $3=(\sqrt{3})^2$

(2) $(1.7)^2=2.89$，$(1.8)^2=3.24$，
因為 $(1.7)^2<(\sqrt{3})^2<(1.8)^2$，
所以 $1.7<\sqrt{3}<1.8$。

$(1.7)^2=2.89$，$(1.8)^2=3.24$ ⟵ $3=(\sqrt{3})^2$

(3) 因為 $(1.75)^2=3.0625$，
所以 $1.7<\sqrt{3}<1.75$。

$(1.7)^2=2.89$，$(1.75)^2=3.0625$ ⟵ $3=(\sqrt{3})^2$

經四捨五入得 $\sqrt{3}≒1.7$

簡單的說，求 $\sqrt{3}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位，是用十分逼近法先得到 $1.7<\sqrt{3}<1.8$，再判別 $\sqrt{3}$ 比較靠近 1.7 還是 1.8。1.75 是數線上 1.7 與 1.8 的中點，因為 $(\sqrt{3})^2<(1.75)^2$，所以 $\sqrt{3}<1.75$，也就是 $\sqrt{3}$ 比較靠近 1.7，故小數點後第二位必須捨去，得 $\sqrt{3}≒1.7$。

放大 例5 十分逼近法求近似值 基礎 自評 P71 第 4 題

利用十分逼近法求 $\sqrt{5}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位。

解

放大 隨堂練習

依下列各小題所提供的數據，按步驟回答下列問題，並求 $\sqrt{7}$ 的近似值到小數點後第一位。

解 (1) 因為 $1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，所以 $\sqrt{7}$ 在哪兩個連續整數之間？
答：______ $<\sqrt{7}<$ ______。

解 (2) 因為 $(2.6)^2=6.76$，$(2.7)^2=7.29$，$(2.8)^2=7.84$，所以 $\sqrt{7}$ 在哪兩個連續一位小數之間？
答：______ $<\sqrt{7}<$ ______。

解 (3) 根據 $(2.65)^2=7.0225$，比較 $\sqrt{7}$ 和 2.65 的大小關係。（填 > 或 <）
答：$\sqrt{7}$ ______ 2.65。

解 (4) 以四捨五入法求 $\sqrt{7}$ 的近似值到小數點後第一位，得 $\sqrt{7}≒$ ______。

課本 習作

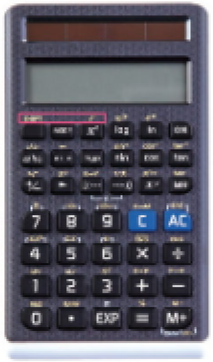
精熟

1. 利用十分逼近法求平方根的近似值，過程非常繁瑣。因此也可以利用計算機求 $\sqrt{a}$ 的近似值。例如：求 $\sqrt{2}$ 的近似值，操作方法如下：

數值	按法	螢幕顯示
$\sqrt{2}$	2 SHIFT x^2	1.414213562

我們也可以利用計算機驗證這個數的平方就是 2。

按法	螢幕顯示
2 SHIFT x^2，再按 x^2	2.



2. 以計算機按出 $\sqrt{2}$、$\sqrt{2.1}$、$\sqrt{3.9}$、$\sqrt{4.1}$ 的近似值，

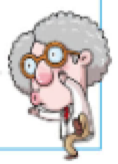
$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.414213562$，$\sqrt{2.1}\fallingdotseq 1.449137675$，

$\sqrt{3.9}\fallingdotseq 1.974841766$，$\sqrt{4.1}\fallingdotseq 2.024845673$，

從計算機出現的結果，我們也可以歸納得到：

當 $a>b>0$ 時，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。

本教材使用之計算機若需 $\sqrt{\ }$ 功能，須先按 SHIFT，再按 x^2



放大 隨堂練習 自評 P72 第 5 題

利用計算機計算，並回答下列各題：

解 (1) 求 $\sqrt{16.81}$ 的值。

解 (2) $\sqrt{12345}$ 的整數部分是多少呢？

解 (3) 比較 $\sqrt{123}$ 與 $\sqrt{132}$ 的大小。

④ 平方根的意義 動畫

當 $a\geq 0$，若 $b^2=a$，則稱 b 是 a 的平方根（也稱為二次方根）。

例如：$(\sqrt{2})^2=2$ ← 即 $\sqrt{2}$ 是 2 的正平方根。

$(-\sqrt{2})^2=2$ ← 即 $-\sqrt{2}$ 是 2 的負平方根。

所以 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 都是 2 的平方根。

$\sqrt{2}$ 的相反數記為 $-\sqrt{2}$。

放大 隨堂練習 基礎

解 1. 判別 15 是否為 225 的平方根？

解 2. 判別 -15 是否為 225 的平方根？

事實上，對於任意的正數 a，

$(\sqrt{a})^2=a$ ← 即 $\sqrt{a}$ 是 a 的正平方根。

$(-\sqrt{a})^2=a$ ← 即 $-\sqrt{a}$ 是 a 的負平方根。

所以 $\sqrt{a}$、$-\sqrt{a}$ 都是 a 的平方根，而且 $\sqrt{a}$ 和 $-\sqrt{a}$ 互為相反數。

因此，任意的正數都有兩個平方根，而這兩個平方根互為相反數。

正數的平方是正數，負數的平方也是正數，在國中階段，我們找不到任何一個數的平方是負數，所以負數沒有平方根。又 $0^2=0$，所以 0 的平方根只有 0，也就是 $\sqrt{0}=0$。

平方根

1. 若 $a>0$，則 a 的平方根為 $\pm\sqrt{a}$。
2. 若 $a<0$，則 a 沒有平方根。
3. 若 $a=0$，則 a 的平方根為 0，也就是 $\sqrt{0}=0$。

第 2 章

解答：7。（7 的英文由 5 個字母組成，剩餘都是 3 個英文字母）