

### 主題 3 質數與質因數分解

#### ● 質數與合數

一個大於 1 的整數，

(1) 除了 1 和本身以外，**沒有**其他的因數，這樣的數稱為**質數**。

例如：2、11、17 等都是質數。

(2) 除了 1 和本身以外，**還有**其他的因數，這樣的數稱為**合數**。

例如：4、15、51 等都是合數。

而 1 不是質數也不是合數，

2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

因此，要判斷一個正整數是質數還是合數，要看小於它的正整數中，除了 1 以外，是否有其他的因數。

#### 例 8 判斷質數與合數 學習內容 N-7-1

分別判斷 21 和 23 兩數是質數還是合數？

解 (1) 在小於 21、大於 1 的正整數 2、3、4、5、6、……、20 中，

3 和 7 皆是 21 的因數，所以 21 是合數。

(2) 在小於 23、大於 1 的正整數中，

① 2 不是 23 的因數，

所以 2 的倍數 4、6、8、10、12、14、16、18、

20、22 也不是 23 的因數；

② 3 不是 23 的因數，

所以 9、15、21 也不是 23 的因數；

③ 5、7、11、13、17、19 也不是 23 的因數。

因此，小於 23 的正整數中，除了 1 以外，再也找不到其他因數，

所以 23 是質數。

1	<del>2</del>	<del>3</del>	<del>4</del>	<del>5</del>
<del>6</del>	<del>7</del>	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
<del>11</del>	<del>12</del>	<del>13</del>	<del>14</del>	<del>15</del>
<del>16</del>	<del>17</del>	<del>18</del>	<del>19</del>	<del>20</del>
21	<del>22</del>	23		

由例 8(2)的步驟中，我們依序刪除由小到大質數的倍數，發現要判斷一個正整數是否為質數，只要看小於這個數的質數是否為此數的因數即可。

## 隨堂練習

分別判斷 31 和 39 兩數是質數還是合數？

(1) 在小於 31、大於 1 的質數中

2、3、5、7、11、13、17、19、23、29 皆不是 31 的因數

因此 31 是質數

(2) 在小於 39、大於 1 的質數中

3 和 13 皆是 39 的因數

因此 39 是合數

## 質數篩檢法

大約在兩千多年前，古希臘數學家埃拉托賽尼(*Eratosthenes*)就已利用篩檢法找出某個範圍內的質數，我們來看下面的問題探索。

## 問題探索

### 篩出與檢驗 1 到 100 中的質數

在下面的百數表中，依下列過程操作，並回答問題：

<del>1</del>	②	③	<del>4</del>	⑤	<del>6</del>	⑦	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
⑪	<del>12</del>	⑬	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	⑰	<del>18</del>	⑱	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	⑳	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	<del>29</del>	<del>30</del>
⑳	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	㉑	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
㉒	<del>42</del>	㉓	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	㉔	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>
<del>51</del>	<del>52</del>	㉕	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	㉖	<del>60</del>
㉗	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	㉘	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>
㉙	<del>72</del>	㉚	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	㉛	<del>80</del>
<del>81</del>	<del>82</del>	㉜	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	㉝	<del>90</del>
<del>91</del>	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	㉞	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>

(1) 步驟①：1 不是質數，刪去 1。

步驟②：2 是質數，圈出 2，並刪去其他 2 的倍數。

步驟③：3 是質數，圈出 3，並刪去其他 3 的倍數。

步驟④：5 是質數，圈出 5，並刪去其他 5 的倍數。

步驟⑤：7 是質數，圈出 7，並刪去其他 7 的倍數。

步驟⑥：11 是質數，圈出 11，並刪去其他 11 的倍數。

步驟⑦：13 是質數，圈出 13，並刪去其他 13 的倍數。

(2) 在(1)步驟⑥中，是否有刪去 11 的倍數？

的倍數都已經在刪去 2、3、5、7 的倍數時被刪去了

(3) 在(1)步驟⑦中，是否有刪去 13 的倍數？

的倍數都已經在刪去 2、3、5、7 的倍數時被刪去了

(4) 列出目前剩下的所有數，並檢驗它們是否為質數。

、7、11、13、17、19、23、29、

41、43、47、53、59、61、67、

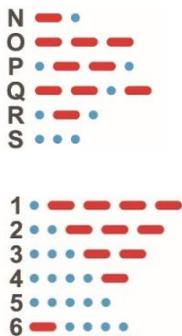
79、83、89、97

，它們都是質數

由問題探索的過程可發現，在 1 到 100 的整數中，只要保留 2、3、5、7 並刪去 2、3、5、7 的倍數後，剩下的數都是質數。

## 數學好好玩

### 摩斯密碼



摩斯密碼(Morse code)是透過「·」、「—」的排列順序，來表達不同的英文字母、數字等的一種代碼。例如：我們規定質數表示「—」，合數表示「·」，那麼(34) (29) (51) 摩斯密碼為「·—·」，透過左邊表格我們可以知道它代表的意思是「R」。

你可以翻到書末 [5]「摩斯密碼解鎖」，利用所學的質數、合數概念，一起挑戰解謎。

### 數學遊戲



▲書末 [5]

### 例 9

### 質數與合數的應用 學習內容 N-7-1

欲將  $n$  個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成矩形，且不會剩下任何小正方形，則：

(1)  $n=12$  時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

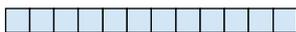
(2)  $n=13$  時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

**解** 矩形面積 = 長  $\times$  寬，所以將  $n$  分解成兩個因數的乘積就可以判斷。

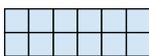
(1)  $n=12$

拼法：

$$= 1 \times 12$$



$$= 2 \times 6$$



$$= 3 \times 4$$



所以可以拼出 3 種矩形。

(2)  $n=13$

拼法：

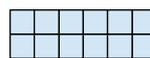
$$= 1 \times 13$$



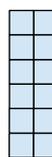
所以只可以拼出 1 種矩形。

**Hint**

2x6



6x2



矩形是一樣的。

### 隨堂練習

在例 9 中，若  $n=36$ ，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

$$n = 36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$$

所以可以拼出 5 種矩形

**動動腦**

在例 9 中，當  $n$  是質數時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

$$\text{則 } n = 1 \times n$$

只可以拼出 1 種矩形

## ● 質因數分解

如果一個整數的因數也是質數，我們稱此因數為這個整數的**質因數**。

例如：18 的因數有 1、2、3、6、9、18，

其中 2、3 是質數，所以 2、3 就是 18 的質因數；

其他的因數 1、6、9、18 都不是 18 的質因數。

我們曾經學過，利用短除法將一個合數分解，並寫成它的質因數連乘積。

例如：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72} \\ 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

表示 72 是 3 個質因數 2 和 2 個質因數 3 的連乘積。

事實上，每一個合數都可以分解成質因數的連乘積，這樣的過程稱為**質因數分解**。將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為**標準分解式**。

$$\underbrace{72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}_{\text{質因數分解}} = \underbrace{2^3 \times 3^2}_{\text{標準分解式}}$$

### 例 10 質因數與標準分解式 學習內容 N-7-1

將 180 以標準分解式表示，並寫出所有的質因數。

$$\begin{array}{r} \text{解} \quad 2 \overline{) 180} \quad 1 \quad 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ 2 \overline{) 90} \quad 2 \quad 3^3 \times 5 \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

180 的質因數為 2、3、5。

### 隨堂練習

將下列各數以標準分解式表示，並寫出所有的質因數。

(1) 105

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 105} \\ 5 \overline{) 35} \\ 7 \end{array} \quad 105 = 3 \times 5 \times 7$$

105 的質因數為 3、5、7

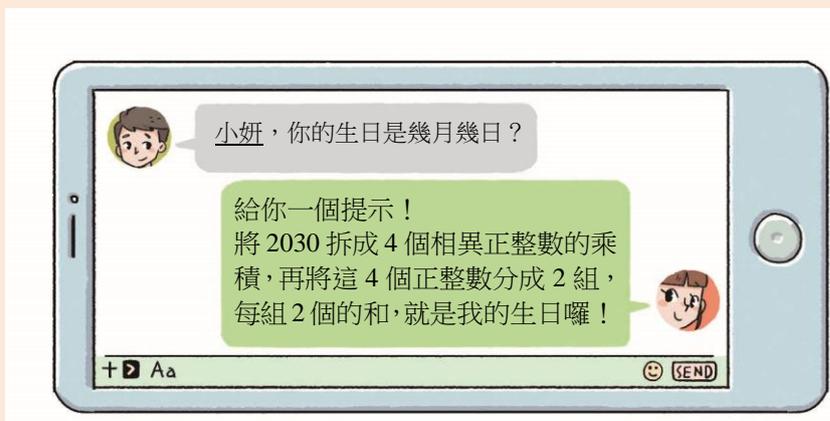
(2) 150

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 150} \\ 3 \overline{) 75} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array} \quad 150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

150 的質因數為 2、3、5

**例 11** 質因數分解的應用 學習內容 N-7-2

根據以下小翊與小妍的對話過程，判斷小妍的生日應為幾月幾日？



解 因為  $2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 29$ ，

小妍生日日期可能為： $29 + 2 = 31$ ，

$29 + 5 = 34$ (不合)，

$29 + 7 = 36$ (不合)，

得月分為  $5 + 7 = 12$ ，

所以小妍的生日為 12 月 31 日。



資安工程師

利用質數進行加密，  
創建屬於自己的密  
語。 書末 [10]

**隨堂練習**

小翊設定手機解鎖的密碼為  $abcd$  四碼，若他是利用 2268 的標準分解式  $2^a \times b^c \times d$  來設計密碼，則此組密碼為何？

$$\begin{array}{r}
 2 \mid 2268 \\
 2 \mid 1134 \\
 3 \mid 567 \\
 3 \mid 189 \\
 3 \mid 63 \\
 3 \mid 21 \\
 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2268 = 2^2 \times 3^4 \times 7, \\
 \text{所以密碼為 } 2347。
 \end{array}$$