

## 2-1 質因數分解

國小時學過以短除法做質因數分解，本章將從質因數分解出發來學習標準分解式，經由標準分解式認識公因數與公倍數，也可從最小公倍數進行分數的通分。

### 1 因數與倍數



在上圖中， $1740 \div 29 = 60$ ，即  $1740 = 60 \times 29$ ，因此：

- (1) 29 和 60 都是 1740 的因數。
- (2) 1740 是 29 和 60 的倍數。

#### 因數與倍數

如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為任意三個整數，且  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆不為 0，若  $a \div b = c$ ，即  $a = b \times c$ ，則

- (1)  $b$ 、 $c$  是  $a$  的因數。
- (2)  $a$  是  $b$ 、 $c$  的倍數。

根據因數、倍數的意義，我們可以來討論 1 和 0 這兩個數的因數與倍數：

- ① 因為任何整數  $a$  除以 1 的結果都是  $a$  (即  $a \div 1 = a$ )，所以任何整數都是 1 的倍數，1 是任何整數的因數。
- ② 因為 0 不可以當作除數，所以 0 不是任何整數的因數。
- ③ 因為  $0 \div a = 0$  ( $a \neq 0$ )，所以 0 是任何非零整數的倍數。

在國中階段，若沒有特別說明，因數都是指正因數；而倍數指的是正倍數。

### 例 1 因數與倍數的判別

自評 P99 第 6 題

判別下列敘述是否正確。

(1) 210 是 14 的倍數。

(2) 15 是 235 的因數。

解

$$(1) 210 \div 14 = 15$$

因為 210 可以被 14 整除，  
所以 210 是 14 的倍數。

$$(2) 235 \div 15 = 15 \cdots \cdots 10$$

因為 235 不可以被 15 整除，  
所以 15 不是 235 的因數。

### 隨堂練習

判別下列敘述是否正確。

(1) 91 是 7 的倍數。

☐ 是 ☐ 否

(2) 11 是 121 的因數。

☐ 是 ☐ 否

在學習前哨站，已複習曾學過的 2、5 倍數判別法，接下來我們將學習 3、4、9、11 的倍數判別法。

## ▶ 4 的倍數判別法

要判別一個數是不是 4 的倍數，除了直接用除法判別外，還有更簡便的方法。

例如：判別 7528 是不是 4 的倍數時，

因為  $100 = 25 \times 4$ ，所以 100 的倍數都是 4 的倍數，

而  $7528 = 75 \times 100 + 28$ ， $75 \times 100$  必為 4 的倍數，末兩位數 28 是 4 的倍數，  
所以 7528 是 4 的倍數。

### 📌 4 的倍數判別法

如果一個整數的末兩位數是 4 的倍數，則這個整數是 4 的倍數。

### 例 2 判別 4 的倍數

自評 P98 第 1 題

判別下列各數是否為 4 的倍數。

(1) 536

(2) 2370

**解** (1) 因為 536 的末兩位數 36 是 4 的  
倍數，所以 536 是 4 的倍數。

(2) 因為 2370 的末兩位數 70 不是 4 的  
倍數，所以 2370 不是 4 的倍數。

### ▶ 隨堂練習

有一個四位數  $23\square 4$ ，如果此數是 4 的倍數，則  $\square$  可以填入哪些數字？

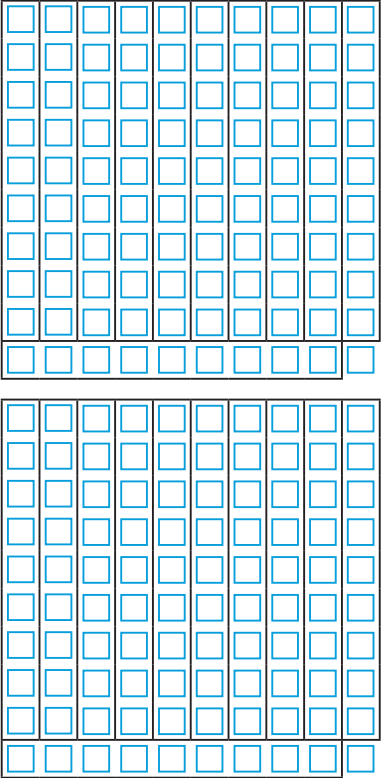
### 🗣️ Thinking

7528 是不是 8 的倍數呢？除了直接利用除法之外，還有沒有更簡便的方法呢？

(提示： $1000 = 125 \times 8$ )

## 9 的倍數判別法

要判別 216 是不是 9 的倍數，可以先將 216 寫成  $200+10+6$ ，再透過下圖判別。

|             |   |                                                                                                  |   |                                                                                                  |       |                                                                                                 |
|-------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>216</b>  | = | <b>200</b><br> | + | <b>10</b><br> | +     | <b>6</b><br> |
|             |   |                                                                                                  |   |                                                                                                  |       |                                                                                                 |
| 觀察上圖<br>可得： |   |                                                                                                  |   |                                                                                                  |       |                                                                                                 |
| <b>216</b>  | = | $2 \times 100$                                                                                   | + | $1 \times 10$                                                                                    | +     | $6$                                                                                             |
|             | = | $2 \times (99 + 1)$                                                                              | + | $1 \times (9 + 1)$                                                                               | +     | $6$                                                                                             |
|             | = | $2 \times 99 + 2 \times 1$                                                                       | + | $1 \times 9 + 1 \times 1$                                                                        | +     | $6$                                                                                             |
|             | = | $2 \times 99$                                                                                    | + | $1 \times 9$                                                                                     | +     | $(2 + 1 + 6)$                                                                                   |
|             |   | 9 的倍數 (99、9 都是 9 的倍數)                                                                            |   |                                                                                                  | 各位數字和 |                                                                                                 |

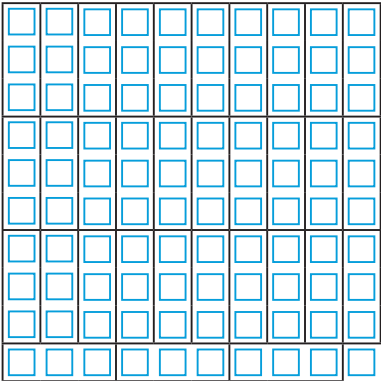
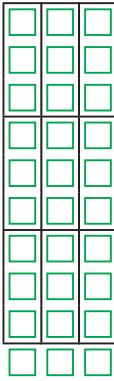
因為  $2 \times 99 + 1 \times 9$  是 9 的倍數，所以要判別 216 是否為 9 的倍數，只要看各位數字和是否為 9 的倍數。由於  $2+1+6=9$ ，因此 216 是 9 的倍數。

### 9 的倍數判別法

如果一個整數的各位數字和是 9 的倍數，則這個整數是 9 的倍數。

### ▶ 3 的倍數判別法

要判別 135 是不是 3 的倍數，也可以仿照「9 的倍數判別法」，先將 135 寫成  $100 + 30 + 5$ ，再透過下圖判別。

|              |                                                                                                 |   |                                                                                                 |   |                                                                                                 |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>135</b> = | <b>100</b><br> | + | <b>30</b><br> | + | <b>5</b><br> |
| 觀察上圖<br>可得：  |                                                                                                 |   |                                                                                                 |   |                                                                                                 |
| <b>135</b> = | <b>1</b> × 100                                                                                  | + | <b>3</b> × 10                                                                                   | + | <b>5</b>                                                                                        |
| =            | <b>1</b> × (99 + 1)                                                                             | + | <b>3</b> × (9 + 1)                                                                              | + | <b>5</b>                                                                                        |
| =            | <b>1</b> × 99 + <b>1</b> × 1                                                                    | + | <b>3</b> × 9 + <b>3</b> × 1                                                                     | + | <b>5</b>                                                                                        |
| =            | 1 × 99                                                                                          | + | 3 × 9                                                                                           | + | ( <b>1</b> + <b>3</b> + <b>5</b> )                                                              |
|              | 3 的倍數 ( 99、9 都是 3 的倍數 )                                                                         |   |                                                                                                 |   | 各位數字和                                                                                           |

因為  $1 \times 99 + 3 \times 9$  是 3 的倍數，所以要判別 135 是否為 3 的倍數，只要看各位數字和是否為 3 的倍數。由於  $1 + 3 + 5 = 9$ ，因此 135 是 3 的倍數。

#### 📖 3 的倍數判別法

如果一個整數的各位數字和是 3 的倍數，則這個整數是 3 的倍數。

**例 3** 判別 3、9 的倍數

自評 P98 第 1 題

判別 6108 是否為 3 的倍數？是否為 9 的倍數？

**解** 6108 的各位數字和為  $6+1+0+8=15$ ， $15 \div 3=5$ ； $15 \div 9=1 \cdots \cdots 6$   
 所以 6108 是 3 的倍數，不是 9 的倍數。

**隨堂練習**

1. 有一個四位數  $149\square$  是 3 的倍數，則  $\square$  可填入哪些數字？
2. 有一個四位數  $149\square$  是 9 的倍數，則  $\square$  可填入哪些數字？

**Thinking**

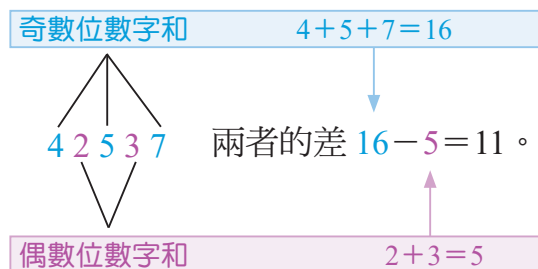
如果一個整數是 3 的倍數，則這個整數一定是 9 的倍數嗎？

**11 的倍數判別法**

要判別 42537 是不是 11 的倍數，可以將 42537 寫成

$$\begin{aligned}
 42537 &= 4 \times 10000 + 2 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \\
 &= 4 \times (9999 + 1) + 2 \times (1001 - 1) + 5 \times (99 + 1) + 3 \times (11 - 1) + 7 \\
 &= 4 \times 9999 + 4 + 2 \times 1001 - 2 + 5 \times 99 + 5 + 3 \times 11 - 3 + 7 \\
 &= (4 \times 9999 + 2 \times 1001 + 5 \times 99 + 3 \times 11) + (4 + 5 + 7) - (2 + 3) \\
 &\quad \text{11 的倍數 (9999、1001、99、11 都是 11 的倍數)} \quad \text{奇數位數字和} \quad \text{偶數位數字和}
 \end{aligned}$$

所以 42537 除以 11 的餘數與  
 $(4+5+7)-(2+3)$  除以 11 的餘數相同。  
 因為  $(4+5+7)-(2+3)=11$ ，  
 所以 42537 是 11 的倍數。



### 11 的倍數判別法

如果一個整數的「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0，則這個整數是 11 的倍數。

#### 例 4 判別 11 的倍數

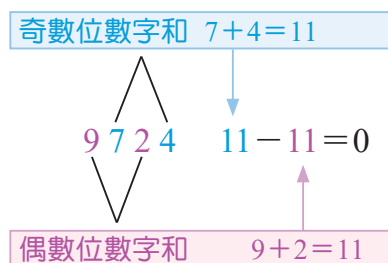
自評 P98 第 1 題

判別下列各數是否為 11 的倍數。

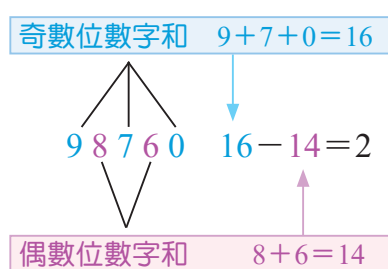
(1) 9724

(2) 98760

**解** (1) 9724 的奇數位數字和為  $7+4=11$ ，  
偶數位數字和為  $9+2=11$ 。  
 $11-11=0$ ，  
所以 9724 是 11 的倍數。



(2) 98760 的奇數位數字和為  $9+7+0=16$ ，  
偶數位數字和為  $8+6=14$ 。  
 $16-14=2$  (不是 11 的倍數或 0)，  
所以 98760 不是 11 的倍數。



#### 隨堂練習

1. 判別 2345、123321 是否為 11 的倍數。

2. 有一個四位數  $7\square 36$ ，如果此數是 11 的倍數，則  $\square = ?$

## 2 質數與合數

在國小我們學過：

- ① 如果一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為**質數**。  
例如：2、3、5、7、11 的因數都只有 1 和本身，所以 2、3、5、7、11 都是質數。
- ② 如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為**合數**。  
例如：6 的因數有 1、2、3、6，所以 6 是合數。
- ③ 1 既不是質數，也不是合數。
- ④ 2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

### 例 5 質數與合數的判別

自評 P98 第 2 題

判別 12 和 17 這兩個數是質數還是合數？

**解** 12 的因數有 1、2、3、4、6、12，所以 12 是合數。  
17 的因數只有 1、17，所以 17 是質數。

### 隨堂練習

1. 最小的質數為\_\_\_\_\_，最小的合數為\_\_\_\_\_。
2. 判別 23 和 27 這兩個數是質數還是合數？

對於一個 100 以內的數是否為質數，有沒有方法可以篩檢呢？

古希臘的數學家埃拉托賽尼 (Eratosthenes，西元前 276 — 西元前 194) 發現了一個方法，可以簡化逐一判別每個數是否為質數的步驟，這個方法稱為「埃拉托賽尼篩法」，以下將利用  **探索活動** 來了解他的想法。

### **探索活動** 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

**步驟 1：**因為 1 不是質數，

也不是合數，所以刪去 1。

**步驟 2：**剩下的數最小是 2，

圈出 2 並刪去其餘 2 的倍數。

 此步驟刪去的數最小是\_\_\_\_\_。

**步驟 3：**剩下的數最小是 3，

圈出 3 並刪去其餘 3 的倍數。

 此步驟刪去的數最小是\_\_\_\_\_。

**步驟 4：**剩下的數最小是 5，

圈出 5 並刪去其餘 5 的倍數。

 此步驟刪去的數最小是\_\_\_\_\_。

**步驟 5：**剩下的數最小是 7，

圈出 7 並刪去其餘 7 的倍數。

 此步驟刪去的數最小是\_\_\_\_\_。

**步驟 6：**將剩下的數全部圈起來。

 此時所有圈出來的數是否都是質數？☐是 ☐否

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

## Thinking

1. 由步驟 2~步驟 5 中，每個步驟圈出的數與所刪去的最小數，有什麼關係呢？
2. 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？

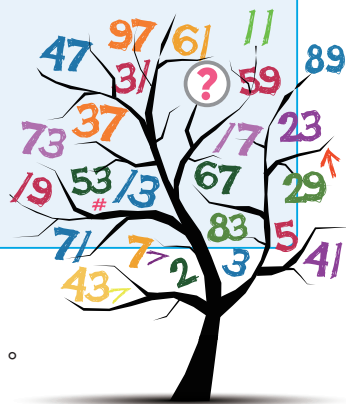
由 **探索活動** 可知，利用埃拉托賽尼篩法篩檢小於 100 的質數，只需使用 2、3、5、7 篩檢即可，且 100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個數。

## 補給站 質數的個數

質數、合數與 1 構成了所有的正整數，而合數的個數顯然有無限多個（例如：所有 10 的倍數都是合數），於是我們想問：質數的個數也有無限多個嗎？或是存在著一個「最大的質數」，所有比此數大的整數都是合數？

早在西元前三世紀，希臘大數學家歐幾里德（Euclid of Alexandria，西元前 325 — 西元前 265）在其名著《幾何原本》（*Elements*）中，就對這個問題提出了解答，證明了質數的個數有無限多個。

較小的質數很容易判斷，例如：2、3、5、7、11、……等；但是較大的質數要如何搜尋呢？我們可利用電腦強大的運算及判斷能力，來發掘更多的質數。



樹上 1~100 的質數好像還少了一個，

要填入什麼數呢？

答：\_\_\_\_\_。