

# 因式分解解一元二次方程式

- 1 一元二次方程式的意義 2 利用因式分解解一元二次方程式  
3 綜合應用

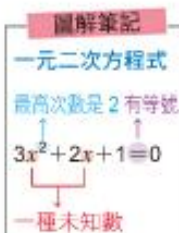
## 主題 1 一元二次方程式的意義



### 課外探索



根據上面的對話，我們可以假設小翊的年齡為  $x$  歲，  
依題意列出方程式： $(x+4)^2 - 20x = 29$ 。利用第 1 章學過的乘法公式展開，得到  $x^2 + 8x + 16 - 20x = 29$ ，化簡得  $x^2 - 12x - 13 = 0$ 。



觀察化簡後的方程式，只含有一種未知數  $x$ ，且  $x$  的最高次數是二次。像這樣經過化簡，可以寫成形如  $ax^2 + bx + c = 0$  (其中  $a \neq 0$ ) 的等式，我們稱為  $x$  的一元二次方程式。

例如： $-2x^2 + 3x = 12$ 、 $2x^2 = 3x$ 、 $(x+3)(x-8) = 14$ 、 $6x^2 - 15 = 0$ 、……，都是  $x$  的一元二次方程式。但是方程式  $x^2 + 3x = x^2 - 13$  經化簡後得到  $3x + 13 = 0$ ，就不是  $x$  的一元二次方程式。

### Key point

#### 一元二次方程式

一個方程式經化簡後可寫成  $ax^2 + bx + c = 0$  (其中  $a \neq 0$ ) 的形式，就稱此方程式為  $x$  的一元二次方程式。

放大

隨堂練習

易 重新布題

判斷下列式子是否為一元二次方程式？是的打「○」，不是的打「×」。

解

( ) (1)  $x+3=0$

解

( ) (2)  $x^2+5x=-13$

解

( ) (3)  $(x-4)(x+3)=0$

解

( ) (4)  $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$

解

( ) (5)  $x^2+x-3$

•

如果將某數代入一元二次方程式的未知數中，會使等號左右兩邊的值相等，就稱這個數為此一元二次方程式的**解**或**根**。而求出一元二次方程式的解或根的過程，稱為**解一元二次方程式**。

易 重新布題

放大

例 1

判別一元二次方程式的解

- 判別 5 是否為一元二次方程式  $x^2+25x=50$  的解？
- 判別 -1 是否為一元二次方程式  $x^2-5x=-2x+4$  的解？

解

▲

▼

•

放大

隨堂練習

易 重新布題

中 重新布題

1. 判別 0 是否為一元二次方程式  $x^2 - 5 = 4x$  的解？2. 判別 4 和 -3 是否為一元二次方程式  $(x-4)(x+3)=0$  的解？

解



解



由例 1 和隨堂練習可知，要判別一個數是不是方程式的解，只要將該數代入方程式的未知數中，看看是否能讓方程式的等號成立就知道了。但如果用代入法找一元二次方程式  $2x^2 - 87x - 135 = 0$  的解，假設我們從整數 1 開始一個一個代進去試，則要試到 45 才能找到這個方程式的一個解。而它的另一個解  $-\frac{3}{2}$  為負分數，若只拿整數試，則永遠也找不到  $-\frac{3}{2}$  這個解。

因此，接下來將學習其他更有效率的方法來解一元二次方程式。



數

學

好

好

玩

「代數」的由來

《代數學》由阿拉伯數學家、天文學家花拉子米（*al-Khwārizmī*，約西元 780~850 年）所著，是第一本解決一元二次方程式的著作。

書中首創還原（*al-jabr*）及平衡（*al-muqābala*）（相當於現今的「移項」和「合併同類項」）的方法，並明確提出代數、已知數、未知數、根及移項等一系列概念，有系統的闡述一元二次方程式的解法，把代數學發展成一門與幾何學相提並論的獨立學科。代數（*Algebra*）一詞即是源自書中解法之一的 *al-jabr*。



▲前蘇聯發行的花拉子米  
1200 歲誕辰紀念郵票

花拉子米（約西元 780~850 年）阿拉伯數學家，其著作《代數學》是第一本關於代數的著作，與丟番圖共享為「代數之父」。



## 主題 2 利用因式分解解一元二次方程式

我們知道，當兩數都不為 0 時，這兩數的乘積一定不為 0。那麼當兩數的乘積為 0 時，這兩數可能會是哪些數呢？

**問題探索** 若  $A \times B = 0$ ，則  $A = 0$  或  $B = 0$  

設  $A$ 、 $B$  為兩數，且  $A \times B = 0$ ，則：

- 解** (1) 當  $A \neq 0$  時， $B$  是不是一定要等於 0？  
**解** (2) 當  $B \neq 0$  時， $A$  是不是一定要等於 0？  
**解** (3)  $A$ 、 $B$  可不可能都是 0？  
**解** (4)  $A$ 、 $B$  可不可能都不是 0？

由問題探索可以知道，若  $A$ 、 $B$  為兩數，當  $A \times B = 0$  時，則  $A$  和  $B$  至少有一個是 0，即  $A = 0$  或  $B = 0$ 。

利用這個結論可以解一元二次方程式。

例如：方程式  $(x-3)(3x-2)=0$  表示  $(x-3)$  和  $(3x-2)$  的乘積是 0，  
 因為  $(x-3)$  和  $(3x-2)$  都是數，利用問題探索的結論，  
 可得  $x-3=0$  或  $3x-2=0$ ，再解這兩個一元一次方程式，  
 即得到方程式  $(x-3)(3x-2)=0$  的解為 3 和  $\frac{2}{3}$ 。

**放大**

 **隨堂練習** 

**易** 重新布題

找出下列各方程式的解。

(1)  $x(x+3)=0$

(2)  $(4x-2)(2x+5)=0$

**解**



**解**



若一個一元二次方程式可化簡為「等號的一邊是兩個一次式的乘積，另一邊是0。」則可利用「有兩數  $A$ 、 $B$ ，若  $A \times B = 0$ ，則  $A = 0$  或  $B = 0$ 。」的性質求解。我們來看下面的例題。

放大

例 2

## 利用提公因式解方程式

解下列各一元二次方程式。

(1)  $2x^2 + 3x = 0$

(2)  $\frac{1}{3}x^2 - 4x = 0$

解



Hint

放大

隨堂練習

易 重新布題

解下列各一元二次方程式。

(1)  $3x^2 - 7x = 0$

(2)  $-\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$

解



解



放大

例 3

先移項再提公因式解方程式

解一元二次方程式  $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$ 。

解



放大

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1)  $(x+3)(x+4)=(x+3)(2x-1)$  (2)  $(x-1)^2=(x-1)(2x+3)$

解



解



動動腦

易 重新布題

例 3 中，若將  $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$  等號兩邊同時除以  $(x-1)$  得  $2x+3=x+2$ ，解一元一次方程式得  $x=-1$ ，這樣的解法對不對？說說看你的想法。

解



放大

例 4

## 利用十字交乘法解方程式

解下列各一元二次方程式。

(1)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

(2)  $-4y^2 + 6y = -4$

解



放大

隨堂練習

易 重新布題

中 重新布題

解下列各一元二次方程式。

(1)  $-2x^2 + 13x - 15 = 0$

(2)  $39y^2 + 24y = 15$

解



解

