

## 單元三 指數與科學記號

### 主題一 指數

#### 一、何謂指數

##### 1.乘方的意義

『”指數”這個名詞聽起來很新潮，感覺像一個新的數，到底指數是用來做什麼用的呢？讓我們來看個小漫畫！』



##### 2.乘方的簡記

『何謂指數？指數的用途又是什麼？現在就讓我們來認識指數這個新朋友吧！』

## 觀念一點通

1. ”指數”用來幫助我們簡化同”底數”相乘的計算，記在數的”右上角”。
2. 如下例，3個2相乘，讀作”2的3次方”，記為” $2^3$ ”，而 $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ，其值為8。
3.  $2^3$ 表示”2這個數自己乘自己乘了3次”。

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

└───────────┐ 指數  
└──────────┘ 底數

**練習 1：**將下列各題次方寫出來並計算出值：

(1)  $5 \times 5 \times 5 = 5^{( \quad )} = ( \quad )$

唸作：( )的( )次方

(2)  $7 \times 7 = 7^{( \quad )} = ( \quad )$

唸作：( )的( )次方

(3)  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{( \quad )} = ( \quad )$

唸作：( )的( )次方

**練習 2：**計算出下列各題：

(1)  $2^5 = ( \quad )$

$$(2) \quad 6^3 = ( \quad )$$

$$(3) \quad 3^4 = ( \quad )$$

**動動腦** 如何計算  $(\frac{2}{3})^4$

『月黑風高殺人夜，單純的整數已不是我們的對手』

『現在，挑戰者出現了，分數與小數。』

在動動腦中，我們知道：

$$(\frac{2}{3})^4 = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}_{4 \text{ 個 } \frac{2}{3} \text{ 相乘}} = \underbrace{\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3}}_{\substack{\text{分數相乘，分子乘} \\ \text{分子、分母乘分母}}} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

**重點提示：**

$(\frac{2}{3})^4$  代表  $\frac{2}{3}$  自己乘自己 4 次，再利用分數乘法性質，得知結果。

**練習 3：**計算下列各題：

$$(1) \quad (\frac{3}{4})^3 = ( \quad )$$

$$(2) \quad (\frac{2}{5})^2 = ( \quad )$$



**觀念一點通：**

1. 自己乘自己，不管乘了多少個，都可以用指數很簡單的表示出來
2. 分數的次方，可以使用分數乘法的性質來計算

## 二、負數與指數

### 1. 負數的次方計算

『上面我們學會了指數如何計算，但是回想之前我們剛學過的“負數”，如果是一個負數的次方，那要如何計算呢？讓我們繼續看下去！』

$$(-3)^5 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times (-3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times (-3) = -243$$

↓  
孤獨的負數

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} \times \underbrace{(-3) \times (-3)}_{\text{負負得正}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

#### 觀念一點通

1. 在計算負數的次方時，須完成一連串的負負得正
2. 當做完一連串的負負得正時，若存在“孤獨的負數”，則算出之值為負。也就是說：偶數個負數相乘，其值為正，奇數個負數相乘，其值為負。

**練習 4：**計算出下列各式之值。

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $(-3)^3 = ( \quad )$ | (4) $(-2)^2 = ( \quad )$ |
| (2) $(-5)^3 = ( \quad )$ | (5) $(-4)^2 = ( \quad )$ |
| (3) $(-7)^3 = ( \quad )$ | (6) $(-6)^2 = ( \quad )$ |

**練習 5：**判斷下列各小題為正數或負數：

- (1)  $(-4)^{101}$  為( )數                      (3)  $(-3)^{10100}$  為( )數  
 (2)  $(-7)^{98}$  為( )數                      (4)  $(-2)^{197}$  為( )數

**動動腦：**

想想看  $(-2)^4$  與  $-2^4$  『算出來的結果是否相等？』

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$-2^4 = -(2^4) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

└─→ 指數先運算再加負號

『由上面運算結果， $(-2)^4$  與  $-2^4$  算出來的值不一樣，會差一個負號，想想看如果奇數次方，算出來會是怎樣的結果？』

**練習 6：**計算下列各式之值

- (1)  $(-3)^2 = ( \quad )$   
 (2)  $-3^2 = ( \quad )$



#### 觀念一點通

- 負數的次方需要做一連串的負負得正，觀察是否擁有**孤獨的負數**，決定值為正為負。
- 我們發現：一個負數的奇次方，必具有**孤獨的負數**，為**負數**  
偶次方，不具有落單的負數，為**正數**

### 三、指數律

#### 1.指數律

『指數在計算上，有一些規則可循，於是產生了指數四大金剛，也就是所謂指數律。指數律能夠幫助我們解決任何指數計算問題！』

##### 觀念一點通

1. 同底數相乘，指數相加：

$$3^4 \times 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$$

2. 同底數相除，指數相減：

$$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$$

3. 同指數相乘，底數相乘：

$$3^5 \times 2^5 = (3 \times 2)^5 = 6^5$$

4. 同指數相除，底數相除：

$$8^4 \div 2^4 = (8 \div 2)^4 = 4^4$$

##### 練習 7：填填看

- (1)  $2^4 \times 2^5 = 2^{( \quad )}$
- (2)  $6^7 \div 6^3 = 6^{( \quad )}$
- (3)  $3^5 \times 3^3 = 3^{( \quad )}$
- (4)  $9^7 \div 9^6 = 9^{( \quad )}$
- (5)  $4^3 \times 2^3 = ( \quad )^3$

$$(6) 8^7 \div 4^7 = ( \quad )^7$$

$$(7) 2^6 \times 5^6 = ( \quad )^6$$

$$(8) 100^8 \div 10^8 = ( \quad )^8$$

### 動動腦

想想看  $(3^2)^4$  與  $(3^4)^2$  它們的結果是否相等？

$$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$$

指數律”同底相乘，指數相加”

$$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^{4+4} = 3^8$$

指數律”同底相乘，指數相加”

由上面的結果我們知道  $(3^2)^4 = (3^4)^2$ ，想想看，是否換個底數以後也是如此呢？

**練習 8：**請先寫出各小題的指數型式，並判斷各小題的兩個答案是否相同，然後在□中打✓

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (4^3)^2 \\ (4^2)^3 = 4^{( \quad )} \end{array} \right.$$



結果： ☐相同 ☐不相同

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (5^4)^2 \\ (5^2)^4 = 5^{( \quad )} \end{array} \right.$$

結果： ☐相同 ☐不相同

由前面的練習可知道

$$(3^2)^4 = 3^{2+2+2+2}$$

$$(3^4)^2 = 3^{4+4}$$

因此  $(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$

$$(3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8$$

這兩個數運算出來的結果會一樣。

**練習 9：**填填看

(1)  $(2^2)^3 = 2^{(\quad)}$

(2)  $(4^3)^2 = 4^{(\quad)}$

**動動腦** 利用指數律計算  $3^3 \div 3^3$ ，並觀察其結果  
由指數律”同底相除，指數相減”得知

$$3^3 \div 3^3 = 3^{3-3} = 3^0$$

然而  $3^3 \div 3^3 = 27 \div 27 = 1$

於是得知  $3^0 = 1$

其實不為零的數的 0 次方皆為 1，

即  $a^0 = 1$ ， $a$  為不為零的數

#### 觀念一點通

1.  $(3^4)^2$ ，這類指數乘指數的計算，即把”指數相乘”，為  $3^{4 \times 2}$ 。
2. 由乘法交換律知道， $3^{4 \times 2} = 3^{2 \times 4}$ ，於是  $(3^4)^2 = (3^2)^4$ 。
3.  $(3^4)^2 = 3^{4 \times 2}$  這也是指數律。
4. 指數的指數：可利用”指數相乘”的方法運算
5. 不為零的數的 0 次方皆為 1，即  $a^0 = 1$ ， $a$  為不為零的數

## 2.指數律計算

『學會了指數律四大金剛，接下來就是利用這些指數律來幫助我們解決指數運算了！』

### 範例 1

$$\begin{aligned}2^3 \times 2^2 \times 2^4 &= (2^3 \times 2^2) \times 2^4 \\&= 2^{3+2} \times 2^4 \\&= 2^5 \times 2^4 \\&= 2^{5+4} = 2^9\end{aligned}$$

### 範例 2

$$\begin{aligned}3^4 \times 3^3 \div 3^2 &= (3^4 \times 3^3) \div 3^2 \\&= 3^{4+3} \div 3^2 \\&= 3^7 \div 3^2 \\&= 3^{7-2} = 3^5\end{aligned}$$

### 範例 3

$$\begin{aligned}4^6 \div 4^4 \times 4^2 &= (4^6 \div 4^4) \times 4^2 \\&= 4^{6-4} \times 4^2 \\&= 4^2 \times 4^2 \\&= 4^{2+2} = 4^4\end{aligned}$$

### 範例 4

$$\begin{aligned}5^6 \div 5^3 \div 5^2 &= (5^6 \div 5^3) \div 5^2 \\&= 5^{6-3} \div 5^2 \\&= 5^3 \div 5^2 \\&= 5^{3-2} = 5^1\end{aligned}$$

**重點提示：**以上範例的技巧，先計算前兩個數，算出結果以後再跟後面的數做運算，每次計算的時候都會用到指數律。

**練習 10：**將以下各題空格填入正確的數。

- (1)  $3^3 \times 3^2 \times 3^4 = 3^{( )}$
- (2)  $2^8 \div 2^3 \times 2^2 = 2^{( )}$
- (3)  $5^8 \div 5^3 \div 5^2 = 5^{( )}$
- (4)  $6^3 \times 6^4 \div 6^2 = 6^{( )}$

牛刀小試 1 在下列空格中填入正確的答案

(1)  $2^3 = ( \quad )$

(2)  $(-3)^3 = ( \quad )$

(3)  $(-5)^{103}$  為(  )數 (填入“正”或“負”)

(4)  $-4^2 = ( \quad )$

(5)  $3^2 \times 3^3 = 3^{( \quad )}$

(6)  $9^8 \div 9^5 = 9^{( \quad )}$

(7)  $2^3 \times 5^3 = ( \quad )^3$

(8)  $(4^3)^2 = 4^{( \quad )}$



(9)  $2^6 \div 2^3 \times 2^2 = ( \quad )$

(10)  $6^3 \times 6^5 \div 6^2 = ( \quad )$

## 主題二 科學記號

### 一、何謂科學記號

#### 1.科學記號的意義

老師：各位同學，老師今天要請問大家一個問題，地球離太陽多少公里？

同學 A：地球跟太陽的距離喔，那一定有 10000 公里這麼多吧？

同學 B：不，可能有 10000000 公里那麼多！

老師：同學都猜得很不錯喔，但基本上地球離太陽的距離有 150000000 公里這麼多喔，可是這個值這麼多位數，我們為了使它變短好記，把 150000000 簡記為  $1.5 \times 10^8$  公里。

同學 C：老師， $1.5 \times 10^8$  是什麼啊？

老師： $1.5 \times 10^8$  這個就是傳說中的”科學記號”簡記法！

#### 2.科學記號的簡記

##### (1) 以 10 的次方表示數

『簡記的方法和我們學過的指數有很大的關係，讓我們先從 10 的次方開始練習吧！』

範例 1 簡記 10000000

$$10000000 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{10000000 \text{ 相當於 } 7 \text{ 個 } 10 \text{ 相乘}} \\ = 10^7$$

範例 2 簡記 0.000001

$$0.000001 = \frac{1}{1000000} \\ = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{1000000 \text{ 相當於 } 6 \text{ 個 } 10 \text{ 相乘}}} \\ = \frac{1}{10^6} \\ = 10^{-6}$$

**練習 1：**完成下列的空格

(1)  $10000 = 10^{(\quad)}$

(2)  $100000000 = 10^{(\quad)}$

(3)  $0.001 = 10^{(\quad)}$

(4)  $0.00000001 = 10^{(\quad)}$

『學會了如何簡記 10 的次方，接著是我們的重頭戲：科學記號。  
科學記號的簡記法為：將一數簡記成  $a \times 10^b$  的形式，其中  $1 \leq a < 10$ ， $b$  為整數』

## (2) 用科學記號表示很大的數

**範例 3** 將 230000 表示成科學記號

思考：為了將 230000 簡記成  $a \times 10^b$  的形式，我們必須找出一個  $a$ ，使這個大於或等於 1 而且比 10 小。

我們觀察發現 230000 可以寫成  $2.3 \times 100000$

$$230000 = 2.3 \times 100000$$



$$= 2.3 \times 10^5$$

於是我們將 230000 表示成  $2.3 \times 10^5$  這個科學記號

**練習 2：**將下列各數表示成科學記號

(1) 450000

(2) 56000

(3) 12000

(4) 73000000

**動動腦** 1375000 如何化成科學記號？

觀察發現 1375000 可以寫成  $1.375 \times 1000000$

因此將 1000000 簡記成  $10^6$

於是  $1375000000 = 1.375 \times 10^6$  為其科學記號

**練習 3：**將下列各數表示成科學記號

- (1) 173400
- (2) 2543800
- (3) 18340

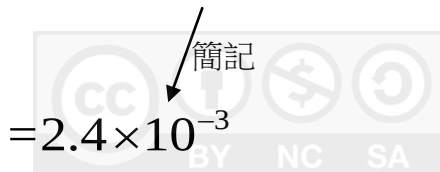
(4) 用科學記號表示很小的數

**範例 4** 將 0.0024 表示成科學記號

思考：為了將 0.0024 簡記成  $a \times 10^b$  的形式，我們必須找出一個  $a$ ，使這個  $a$  比 0 大而且比 10 小。

我們觀察發現 0.0024 可以寫成  $2.4 \times 0.001$

$$0.0024 = 2.4 \times 0.001$$


$$= 2.4 \times 10^{-3}$$

於是我們將 0.0024 用科學記號表示成  $2.4 \times 10^{-3}$  這個科學記號

**練習 4：**將下列各數表示成科學記號

- (1) 0.045
- (2) 0.0031
- (3) 0.00067
- (4) 0.000038

## 觀念一點通

1. 科學記號的意義：當一個正數很大或很小時，閱讀或書寫都不容易，有時甚至會多寫或少寫一個 0，因此我們常把這一類的數，寫成科學記號來表示。
2. 科學記號的定義：將一數簡記成  $a \times 10^b$  的形式，其中  $1 \leq a < 10, b$  為整數。

## 3.科學記號的乘開

『將一數化為科學記號的方法我們學會了，那一個科學記號將它乘開來是什麼數呢？』

**範例 5** 將  $2.43 \times 10^4$  及  $3.2 \times 10^{-3}$  乘開

$$\begin{aligned} 2.43 \times 10^4 &= 2.43 \times 10000 \\ &= 24300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2 \times 10^{-3} &= 3.2 \times 0.001 \\ &= 0.0032 \end{aligned}$$

**重點提示：**將科學記號中 10 的次方展開再相乘

**練習 5：**將下列科學記號乘開

(1)  $4.3 \times 10^3 = ( \quad )$

(2)  $7.42 \times 10^4 = ( \quad )$

(3)  $5.5 \times 10^{-2} = ( \quad )$

(4)  $6.21 \times 10^{-3} = ( \quad )$



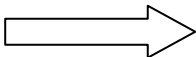
#### 4.科學記號的位數

『科學記號可以很快觀察出其代表的數值是幾位數，或者是小數點後幾位的數。』

**範例 6** 試問  $3.6 \times 10^6$  是幾位數？

若將  $3.6 \times 10^6$  直接乘開，為 3600000，是一個 7 位數

另一種快速判斷法，3.6 乘以  $10^6$  這個非負指數的數，代表乘開的值會比 3.6 大，使小數點往右移 6 位  
因此

$3.600000.$   3600000 為七位數  
  
 往右移 6 位

**練習 6：**仿照範例 10 的方法，不要把科學記號乘開，判斷下列各數是幾位數？

(1)  $5.4 \times 10^4$  是( )位數

(2)  $3.3 \times 10^5$  是( )位數



**範例 7** 試問  $2.3 \times 10^{-5}$  小數點後第 5 位數是多少？

若將  $2.3 \times 10^{-5}$  直接乘開，為 0.000023，小數點後第 5 位數為 2

仿照範例 10，2.3 乘以  $10^{-5}$  這個負指數的數，代表其值會比 2.3 小，使小數點往左移 5 位

因此

$$\begin{array}{ccc}
 0.00002.3 & \longrightarrow & 0.000023 \\
 \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{\text{往左移 5 位}} & & \text{小數後 5 位數為 2}
 \end{array}$$

**練習 7：**仿照範例 11 的方法，不要把科學記號乘開，判斷下列各數小數點後第 5 位數是多少？

- (1)  $3.46 \times 10^{-4}$  小數點後第 5 位數是( )
- (2)  $4.578 \times 10^{-3}$  小數點後第 5 位數是( )



#### 觀念一點通

1. 科學記號  $a \times 10^b$ ,  $1 \leq a < 10$ ,  $b$  為整數，若
  - (1)  $b > 0$ ，將  $a$  的小數點右移  $|b|$  格
  - (2)  $b < 0$ ，將  $a$  的小數點左移  $|b|$  格



**練習 9：**判斷下列各題的兩數的大小關係(□填入“>”“<”或“=”)

(1)  $2.44 \times 10^{-5}$  □  $1.32 \times 10^{-3}$

(2)  $5.53 \times 10^{-2}$  □  $7.45 \times 10^{-3}$

### 觀念一點通

1. 判斷科學記號的大小，依其位數可看出大小關係

### 牛刀小試

1. 簡記下列各題

(1)  $100000000 = 10^{( \quad )}$

(2)  $100000 = 10^{( \quad )}$

(3)  $0.0001 = 10^{( \quad )}$

(4)  $0.0000001 = 10^{( \quad )}$

2. 將下列各數表示成科學記號

(1) 56000

(2) 640000

(3) 0.0031

(4) 0.024

(5) 463600

(6) 1234000



3. 將下列科學記號乘開

(1)  $7.3 \times 10^2 = ( \quad )$

(2)  $1.6 \times 10^3 = ( \quad )$

(3)  $5.5 \times 10^{-2} = ( \quad )$

(4)  $4.2 \times 10^{-3} = ( \quad )$

4. 不要把科學記號乘開，判斷下列各數是幾位數？
- (1)  $3.3 \times 10^5$  是(     )位數
  - (2)  $1.4 \times 10^9$  是(     )位數
  - (3)  $5.7 \times 10^4$  是(     )位數
5. 不要把科學記號乘開，判斷下列各數小數點後第 3 位數是多少？
- (1)  $5.86 \times 10^{-2}$  小數點後第3位數是(     )
  - (2)  $9.46 \times 10^{-1}$  小數點後第3位數是(     )
  - (3)  $2.96 \times 10^{-4}$  小數點後第3位數是(     )
6. 判斷下列各題的兩數的大小關係(□填入“>”“<”或“=”)
- (1)  $5.53 \times 10^{-2}$  □  $7.45 \times 10^{-3}$
  - (2)  $6.32 \times 10^{-7}$  □  $4.41 \times 10^{-5}$
  - (3)  $1.47 \times 10^{-4}$  □  $3.29 \times 10^{-6}$

