

3-4

中垂線與角平分線的性質

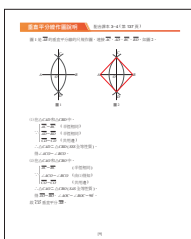
1 中垂線與角平分線

2 綜合應用

主題 1 中垂線與角平分線

我們在 3-2 節學過中垂線、角平分線的尺規作圖，接下來將利用三角形的全等性質，進一步探討中垂線及角平分線性質。

附錄 P.[13]



中垂線性質

《可搭配附錄 P.[13] 中垂線作圖說明》

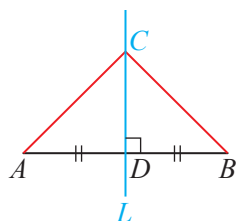
如右圖，直線 L 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，若 C 為直線 L 上任一點，那麼 $\overline{CA}$ 是否等於 $\overline{CB}$ 呢？

說明 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBD$ 中，

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BD} & (L \text{ 為 } \overline{AB} \text{ 的中垂線}) \\ \angle CDA = \angle CDB = 90^\circ & (L \text{ 為 } \overline{AB} \text{ 的中垂線}) \\ \overline{CD} = \overline{CD} & (\text{共用邊}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBD$ (SAS 全等性質)，

故 $\overline{CA} = \overline{CB}$ (對應邊相等)。



由上可知， $\overline{AB}$ 的中垂線 L 上任一點 C 到 $\overline{AB}$ 兩端點的距離相等，因此：

Key point

中垂線性質

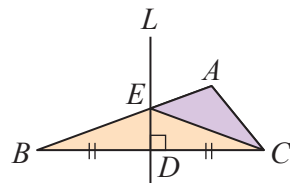
一線段的中垂線上任一點到此線段兩端點的距離相等。

隨堂練習

如右圖，直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，且交 $\overline{AB}$ 於 E 點，若 $\triangle AEC$ 的周長為 26， $\overline{AC} = 8$ ，則 $\overline{AB}$ 的長度為多少？

$\because$ 直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線， $\therefore \overline{BE} = \overline{CE}$

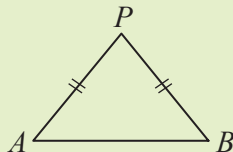
$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AE} + \overline{CE} = \triangle AEC \text{ 周長} - \overline{AC} = 26 - 8 = 18$



例 1

中垂線的判別性質 學習內容 S-8-12

如右圖， P 點是 $\overline{AB}$ 外一點。若 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，
說明 P 點在 $\overline{AB}$ 的中垂線上。



解 過 P 點作 $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ 於 M 點。

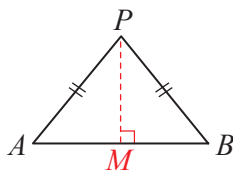
在 $\triangle APM$ 和 $\triangle BPM$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \overline{PA} = \overline{PB} & (\text{已知}) \\ \overline{PM} = \overline{PM} & (\text{共用邊}) \\ \angle AMP = \angle BMP = 90^\circ & (\overline{PM} \perp \overline{AB}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle APM \cong \triangle BPM$ (RHS 全等性質)，得 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 。

$\therefore \overline{PM} \perp \overline{AB}$ ，且 $\overline{AM} = \overline{BM}$ ， $\therefore \overleftrightarrow{PM}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，

故 P 點在 $\overline{AB}$ 的中垂線上。



例 1 中， $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 分別是 P 點到 $\overline{AB}$ 兩端點的距離，且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，
得 P 點在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，因此：

Key point

中垂線的判別性質

若一點到某線段兩端點的距離相等，則此點會在該線段的中垂線上。

隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{BE} = \overline{CE}$ ，若 $\overline{AB} = 5$ 、
 $\overline{BD} = \frac{13}{2}$ ，試回答下列問題：

(1) $\overline{AC} = ?$ (2) $\triangle ABE$ 的周長為何？

(1) 由題可知 $\overline{BE} = \overline{CE}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{BC}$

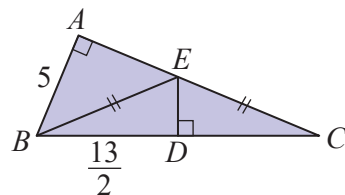
根據中垂線的判別性質，得 $\overleftrightarrow{DE}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線

即 D 為 $\overline{BC}$ 的中點， $\overline{BC} = 2 \times \overline{BD} = 2 \times \frac{13}{2} = 13$

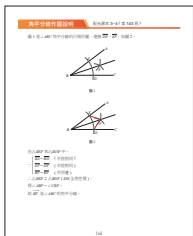
$\therefore \triangle ABC$ 為直角三角形

$\therefore \overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

(2) $\triangle ABE$ 的周長 $= \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{CE} = \overline{AB} + \overline{AC} = 5 + 12 = 17$

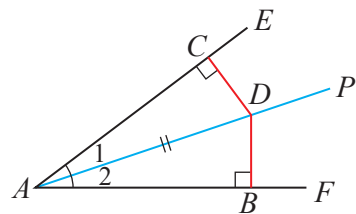


附錄 P.[14]



✓ 角平分線性質 《可搭配附錄 P.[14] 角平分線作圖說明》

如右圖， $\overrightarrow{AP}$ 為 $\angle EAF$ 的角平分線，若 D 為 $\overrightarrow{AP}$ 上任一點，且 $\overline{DC} \perp \overline{AE}$ ， $\overline{DB} \perp \overline{AF}$ ，那麼 $\overline{DC}$ 是否等於 $\overline{DB}$ ？



說明 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 & (\overrightarrow{AP} \text{ 為 } \angle EAF \text{ 的角平分線}) \\ \angle ACD = \angle ABD = 90^\circ & (\overline{DC} \perp \overline{AE}, \overline{DB} \perp \overline{AF}) \\ \overline{AD} = \overline{AD} & (\text{共用邊}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD$ (AAS 全等性質)，

故 $\overline{DC} = \overline{DB}$ (對應邊相等)。

由上可知， $\angle EAF$ 的角平分線 $\overrightarrow{AP}$ 上任一點 D 到 $\angle EAF$ 兩邊的距離相等，因此：

Key point

角平分線性質

一角之角平分線上任一點到此角兩邊的距離相等。

隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overrightarrow{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，交 $\overline{AC}$ 於 D 點，且 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 。若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{CD} = 3$ ，則：

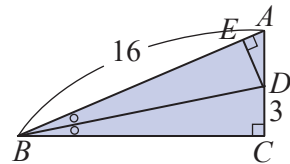
(1) $\overline{DE} = ?$

(2) $\triangle ABD$ 的面積為多少？

(1) $\because \overrightarrow{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線

$$\therefore \overline{DE} = \overline{CD} = 3$$

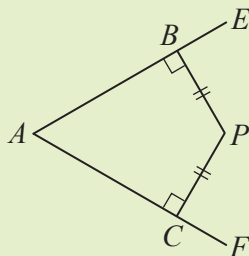
$$(2) \triangle ABD \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DE} = \frac{1}{2} \times 16 \times 3 = 24$$



例 2

角平分線的判別性質 學習內容 S-8-12

如右圖， P 點是 $\angle EAF$ 內的一點， $\overline{PB}$ 垂直 $\overrightarrow{AE}$ 於 B 點， $\overline{PC}$ 垂直 $\overrightarrow{AF}$ 於 C 點，且 $\overline{PB} = \overline{PC}$ ，說明 P 點在 $\angle EAF$ 的角平分線上。



解 如右圖，連接 $\overline{AP}$ ，

在 $\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 中，

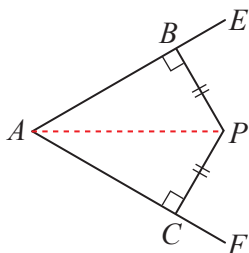
$$\therefore \begin{cases} \overline{PA} = \overline{PA} & (\text{共用邊}) \\ \overline{PB} = \overline{PC} & (\text{已知}) \\ \angle ABP = \angle ACP = 90^\circ (\overline{PB} \perp \overrightarrow{AE}, \overline{PC} \perp \overrightarrow{AF}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle APB \cong \triangle APC$ (RHS 全等性質)，

得 $\angle BAP = \angle CAP$ (對應角相等)，

即 $\overrightarrow{AP}$ 是 $\angle EAF$ 的角平分線，

故 P 點在 $\angle EAF$ 的角平分線上。



例 2 中， $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ 分別是 P 點到 $\angle EAF$ 兩邊的距離，且 $\overline{PB} = \overline{PC}$ ，得 P 點在 $\angle EAF$ 的角平分線上，因此：

Key point

角平分線的判別性質

若一點到某角兩邊的距離相等，則此點會在該角的角平分線上。

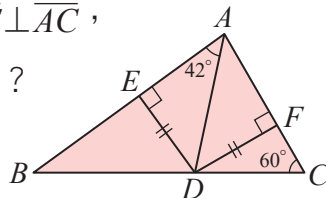
隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 $\overline{BC}$ 上， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 、 $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ ，且 $\overline{DE} = \overline{DF}$ ， $\angle BAD = 42^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，則 $\angle B = ?$

由題可知 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 、 $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ ，且 $\overline{DE} = \overline{DF}$

根據角平分線的判別性質，得 $\overrightarrow{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線
即 $\angle CAD = \angle BAD = 42^\circ$

故 $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - (42^\circ + 42^\circ) = 36^\circ$

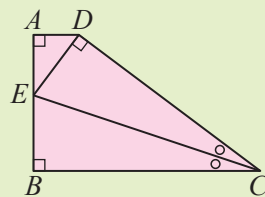


主題2 綜合應用

例 3

角平分線性質的應用 學習內容 S-8-12

如右圖，在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD}$ 平行 $\overline{BC}$ ， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 18$ ， $\overline{AD} = 6$ ，且 $\overline{CE}$ 平分 $\angle BCD$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點， $\angle CDE = 90^\circ$ ，則 $\overline{BE}$ 的長度為何？



解 $\because \overline{CE}$ 為 $\angle BCD$ 的角平分線，
 且 $\angle B = \angle CDE = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 設 $\overline{BE} = \overline{DE} = x$ ， $\overline{AE} = 18 - x$ 。
 在 $\triangle ADE$ 中，

$$x^2 = (18 - x)^2 + 6^2$$

$$\cancel{x^2} = 324 - 36x + \cancel{x^2} + 36$$

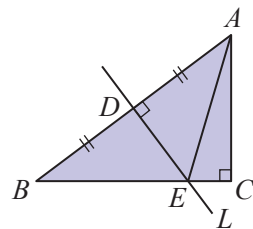
$$36x = 360$$

$$x = 10$$

 故 $\overline{BE} = 10$ 。

隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ，直線 L 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，則 $\overline{CE} = ?$



$\because$ 直線 L 為 $\overline{AB}$ 的中垂線
 $\therefore$ 設 $\overline{CE} = x$ ， $\overline{AE} = \overline{BE} = 8 - x$
 在 $\triangle AEC$ 中

$$(8 - x)^2 = x^2 + 6^2$$

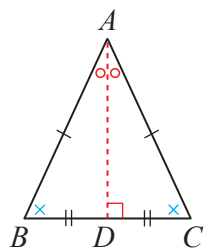
$$64 - 16x + x^2 = x^2 + 36$$

$$16x = 28, x = \frac{7}{4}$$

 故 $\overline{CE} = \frac{7}{4}$

✓ 等腰三角形的性質

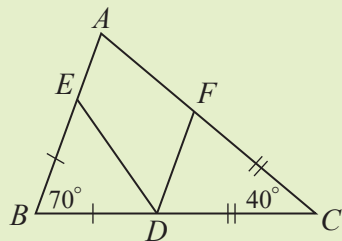
利用線對稱的概念，我們學過等腰三角形的一些性質。如右圖，若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，則兩底角相等，對稱軸 $\overline{AD}$ 同時是頂角 $\angle A$ 的角平分線，也是底邊 $\overline{BC}$ 的中垂線。接著將利用以上性質做練習。



例 4

等腰三角形性質的應用 學習內容 S-8-8

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上。若 $\overline{BD} = \overline{BE}$ 、 $\overline{CD} = \overline{CF}$ ，且 $\angle B = 70^\circ$ 、 $\angle C = 40^\circ$ ，則 $\angle EDF = ?$

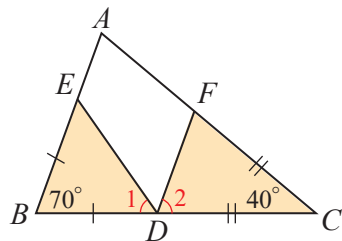


解 $\because \triangle BDE$ 、 $\triangle CDF$ 都是等腰三角形，

$$\therefore \angle 1 = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

$$\angle 2 = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \angle EDF &= 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 \\ &= 180^\circ - 55^\circ - 70^\circ \\ &= 55^\circ \end{aligned}$$



◆ 隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 D 為 $\overline{BC}$ 上一點，若 $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$ ，且 $\angle C = 32^\circ$ ，則 $\angle B = ?$

$\triangle ACD$ 中

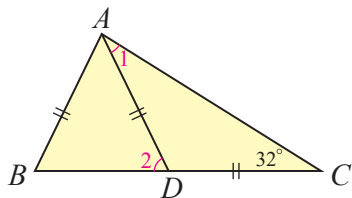
$$\because \overline{AD} = \overline{CD}, \therefore \angle 1 = \angle C = 32^\circ$$

根據三角形的外角定理

$$\text{得 } \angle 2 = \angle 1 + \angle C = 64^\circ$$

$\triangle ABD$ 中

$$\because \overline{AB} = \overline{AD}, \therefore \angle B = \angle 2 = 64^\circ$$

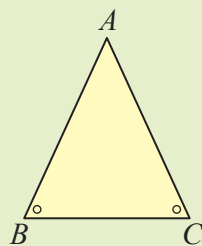


前面談到等腰三角形的兩個底角會相等，那麼如果一個三角形有兩個角相等，這個三角形是等腰三角形嗎？

例 5

等腰三角形的判別性質 學習內容 S-8-5、S-8-8

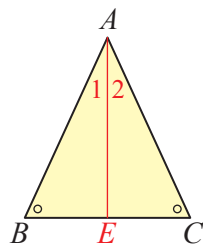
如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ，試說明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。



解 作 $\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 E 點，
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle B = \angle C \text{ (已知)} \\ \angle 1 = \angle 2 \text{ (}\overrightarrow{AE}\text{ 為 } \angle A \text{ 的角平分線)} \\ \overline{AE} = \overline{AE} \text{ (共用邊)} \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACE$ (AAS 全等性質)，
 得 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (對應邊相等)，
 故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。



Hint

若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。

Key point

等腰三角形的判別性質

若三角形有兩個內角相等，則此三角形必為等腰三角形。

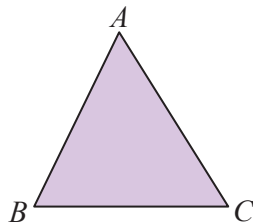
隨堂練習

如右圖，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 58^\circ$ ， $\angle B = 64^\circ$ ，
 則此三角形的邊長中，哪兩個邊的長度相等？

$$\angle C = 180^\circ - 58^\circ - 64^\circ = 58^\circ$$

$$\therefore \angle C = \angle A$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$$

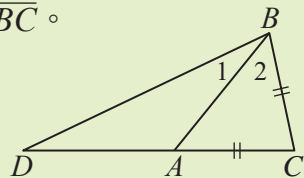


例 6

等腰三角形判別性質的應用 學習內容 S-8-8

如右圖， $\triangle BCD$ 中， A 為 $\overline{CD}$ 上一點，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 。

若 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle 2$ ，則 $\triangle ABD$ 是否為等腰三角形？



解

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \overline{AC} = \overline{BC}, \therefore \angle 3 = \angle 2,$$

由三角形外角定理可知 $\angle D + \angle 1 = \angle 3$ ，

$$\text{已知 } \angle 1 = \frac{1}{2} \angle 2,$$

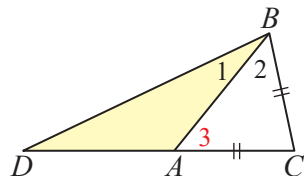
$$\text{得 } \angle D = \angle 3 - \angle 1$$

$$= \angle 2 - \frac{1}{2} \angle 2$$

$$= \frac{1}{2} \angle 2$$

$$\text{即 } \angle D = \angle 1,$$

故 $\triangle ABD$ 是等腰三角形。



隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = 3$ ， D 為 $\overline{AB}$ 上一點。

若 $\angle A = \angle 1$ 、 $\angle B = \angle 2$ ，則 $\overline{BD} = ?$

$\triangle BCD$ 中

$$\because \angle B = \angle 2$$

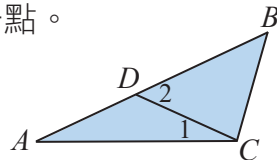
$$\therefore \overline{CD} = \overline{CB} = 3$$

$\triangle ACD$ 中

$$\because \angle A = \angle 1$$

$$\therefore \overline{AD} = \overline{CD} = 3$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 7 - 3 = 4$$





1 中垂線性質

一線段的中垂線上任一點到此線段兩端點的距離相等。

例 如圖 1，若 A 點在 $\overline{BC}$ 的中垂線上，則 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

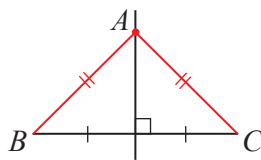


圖 1

2 中垂線的判別性質

若一點到某線段兩端點的距離相等，則此點會在該線段的中垂線上。

例 如圖 1，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 A 點在 $\overline{BC}$ 的中垂線上。

3 角平分線性質

一角之角平分線上任一點到此角兩邊的距離相等。

例 如圖 2，若 D 點在 $\angle B$ 的角平分線上，
則 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 。

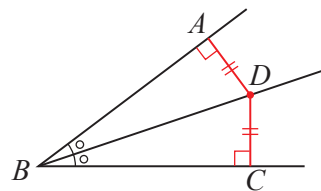


圖 2

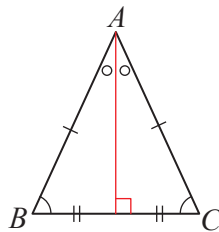
4 角平分線的判別性質

若一點到某角兩邊的距離相等，則此點會在該角的角平分線上。

例 如圖 2，若 $\overline{AD} = \overline{CD}$ ，則 D 點在 $\angle B$ 的角平分線上。

5 等腰三角形的性質

- (1) 等腰三角形的兩個底角會相等。
- (2) 等腰三角形的頂角平分線就是底邊的中垂線。



6 等腰三角形的判別性質

若三角形有兩個內角相等，則此三角形必為等腰三角形。



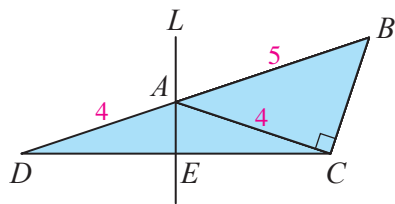
- 1 如右圖， $\triangle BCD$ 中，直線 L 為 $\overline{CD}$ 的中垂線，交 $\overline{BD}$ 於 A 點，交 $\overline{CD}$ 於 E 點。若 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{BD} = 9$ ，則 $\overline{BC} = ?$

$\because L$ 為 $\overline{CD}$ 的中垂線， $\therefore \overline{AD} = \overline{AC} = 4$

得 $\overline{AB} = \overline{BD} - \overline{AD} = 9 - 4 = 5$

直角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

得 $5^2 = 4^2 + \overline{BC}^2$ ， $\overline{BC} = 3$



P.141 隨堂

- 2 如右圖， $\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ ，且 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 8$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 21，則 $\overline{DE} = ?$

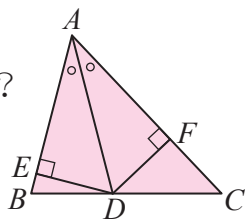
$\because \overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線， $\therefore \overline{DE} = \overline{DF}$

設 $\overline{DE} = \overline{DF} = x$

由 $\triangle ABC$ 面積 = $\triangle ABD$ 面積 + $\triangle ACD$ 面積

得 $21 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DE} + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DF}$

$21 = \frac{1}{2} \times 6x + \frac{1}{2} \times 8x$ ， $7x = 21$ ， $x = 3$ ，故 $\overline{DE} = 3$



P.143 隨堂

- 3 如右圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線， $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ 且交 $\overline{AC}$ 於 D 點，直線 L 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點。若 $\angle DCO = 30^\circ$ ，則 $\angle COD = ?$

由 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線， $\overline{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線

可設 $\angle ABO = \angle CBO = \angle BCO = x^\circ$

$\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

$\therefore 90 + 2x + (x + 30) = 180$

$3x = 60$ ， $x = 20$

故 $\angle COD = \angle CBO + \angle BCO = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$

- 4 如右圖，已知 B 、 C 、 D 三點在同一直線上， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{EC} = \overline{ED}$ 。若 $\angle A + \angle E = 160^\circ$ ，則 $\angle ACE = ?$

$\because \overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\therefore \angle B = \angle 1$ ，得 $\angle A = 180^\circ - 2\angle 1$

$\because \overline{EC} = \overline{ED}$ ， $\therefore \angle D = \angle 2$ ，得 $\angle E = 180^\circ - 2\angle 2$

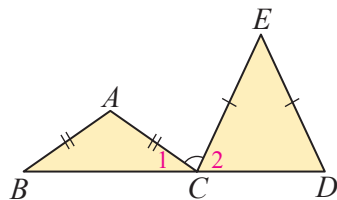
$\because \angle A + \angle E = 160^\circ$

$\therefore (180^\circ - 2\angle 1) + (180^\circ - 2\angle 2) = 160^\circ$

$2(\angle 1 + \angle 2) = 200^\circ$

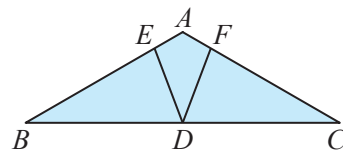
$\angle 1 + \angle 2 = 100^\circ$

故 $\angle ACE = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$



P.146 例 4

- 5 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，其中 $\angle A = 120^\circ$ ， $\overline{BD} = \overline{BE}$ ， $\overline{CD} = \overline{CF}$ ，且 $\angle EDB = \angle FDC$ 。若 $\overline{AB} = 20$ ，則 $\overline{AC} = ?$



P.148 隨堂

$\because \triangle BDE$ 與 $\triangle CDF$ 皆為等腰三角形

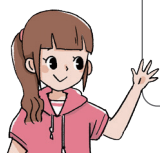
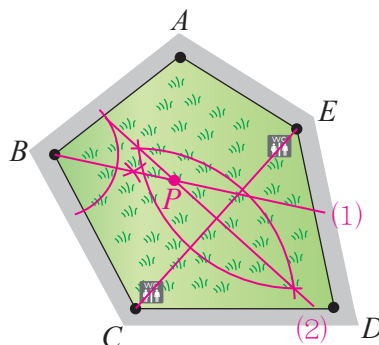
且 $\angle EDB = \angle FDC$

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

故 $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AC} = \overline{AB} = 20$

挑錯題

右圖為五邊形公園，公園管理處規劃在內部設置一座涼亭，設置原則為「使涼亭到最多民眾散步的兩條步道 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 之距離相等，且到洗手間 C 、 E 兩處的距離亦相等。」以下為小妍與小翊的建議方案，判斷他們的建議方案是否符合設置原則，並說明你的理由。



小妍

找出 $\angle ABC$ 的角平分線與 $\overline{CE}$ 的交點，此點就是涼亭的最佳設置地點。



小翊

找出 $\angle ABC$ 的角平分線與 $\overline{CE}$ 的中垂線，兩直線的交點就是涼亭的最佳設置地點。

小妍：☐ 正確；☒ 錯誤，

理由：此交點未必恰為 $\overline{CE}$ 的中點，即此點到 C 、 E 兩處的距離未必相等。

小翊：☒ 正確；☐ 錯誤，

理由：