

1-2 縮放與相似



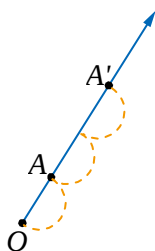
縮放圖形

在國小我們曾經利用影印機或其他方法，將一個圖形進行放大或縮小(簡稱縮放)，圖形經過縮放後可能大小不一樣，但形狀是維持不變的。

圖形的形成是由點和線所構成，所以我們來研究縮放時所對應的點和線段是怎麼被找出來的。

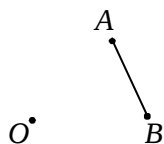
1. 點的縮放：

如果在平面上固定一點 O ，再任意取一點 A ，我們可以在 $\overrightarrow{OA}$ 上找到一點 A' ，使得 $\overline{OA'} = 3 \overline{OA}$ ，我們說 A' 是以 O 為中心，將 A 與 O 的距離縮放為 3 倍的對應點；為了敘述方便，我們簡稱 A' 是以 O 為中心將 A 縮放 3 倍的點， $\overline{OA'} : \overline{OA}$ 的比值 3 就稱為_____。



2. 線段的縮放：

已知 O 、 A 、 B 為平面上三點，將 $\overline{AB}$ 放大三倍的線段長為 $\overline{A'B'}$ 畫出來。



問題： $\overline{AB}$ 上任一個點 P 縮放 3 倍後，都會落在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？

根據以上的問題討論，可知我們要畫一條線段經過縮放後的圖形，只要將此線段兩端點縮放後的點連接成線段，就得到縮放後的圖形。

所以我們有以下結論：

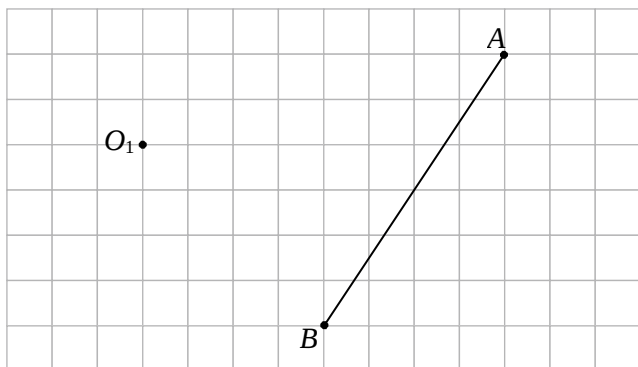
線段的縮放

1. 線段經過縮放後形成的圖形仍然是_____。
2. 縮放後的線段與原線段_____ (或兩線段在同一直線上)。
3. 縮放 r 倍後的線段長度為原來的_____倍。

當然，射線的縮放仍為_____；直線的縮放仍為_____。

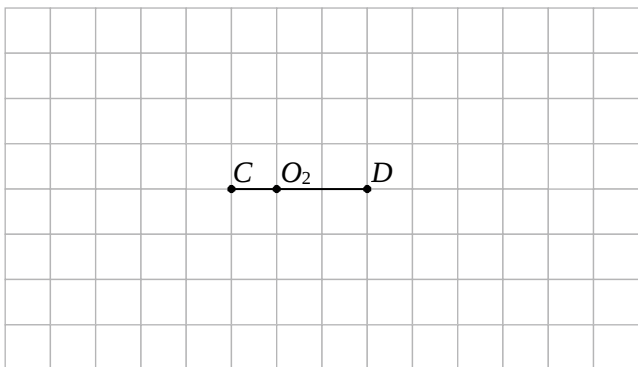
範例解說 1

畫出以 O_1 為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的圖形



類題：

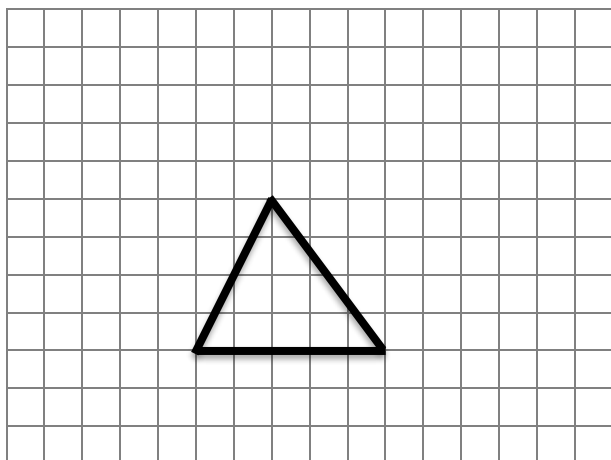
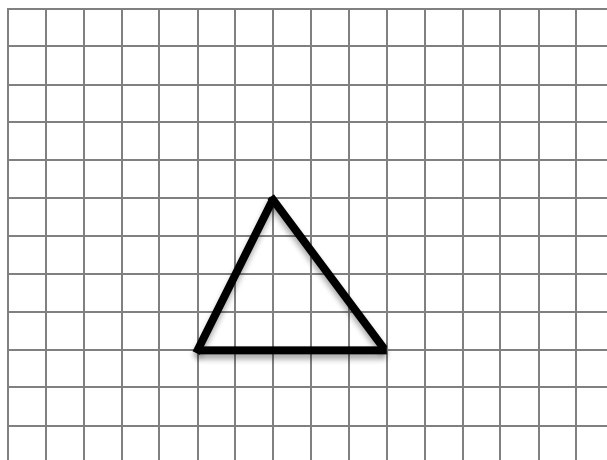
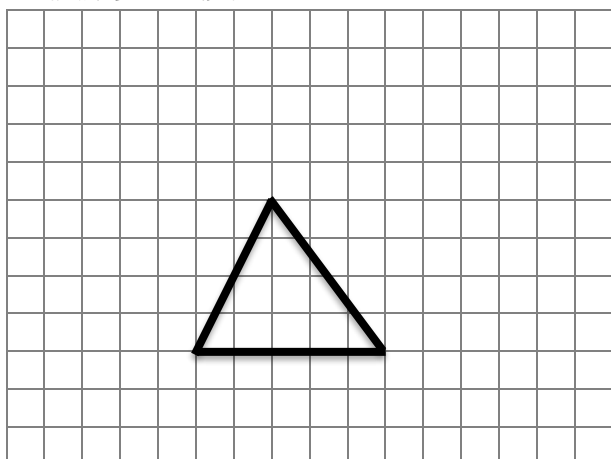
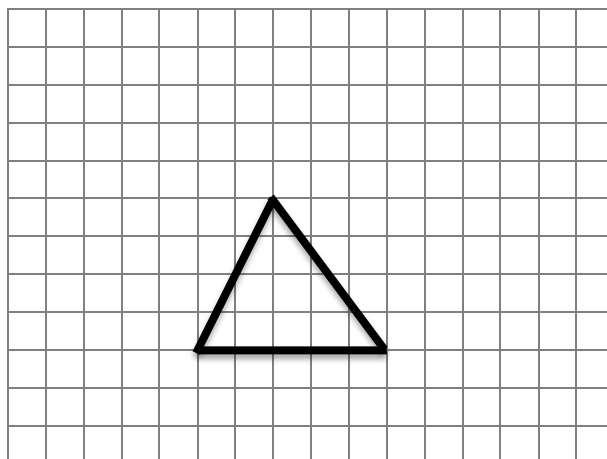
畫出以 O_2 為中心，將 $\overline{CD}$ 縮放 3 倍後的圖形。



答案：略

3. 圖形的縮放：

縮放中心可在圖形的_____、_____、頂點上、邊上。

(一) 縮放中心在內部**(二) 縮放中心在外部****(三) 縮放中心在頂點上****(四) 縮放中心在邊上**

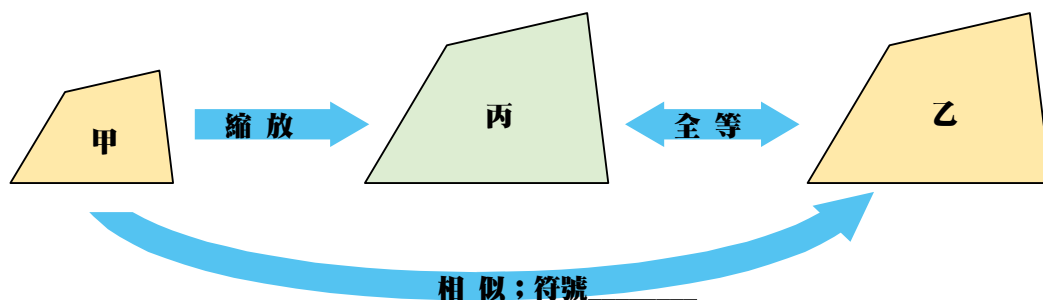
由以上的縮放圖形可知：

1. 一線段經過縮放 r 倍形成的圖形仍然是線段，且縮放後的線段與原線段_____ (或兩線段在同一直線上)，長度為原來的_____倍。
2. 一個角經過縮放之後，角的度數_____。
3. 一多邊形經過縮放後的縮放圖形會與原圖形對應邊成比例，對應角相等。
4. 縮放中心不論在那一個地方，均不會影響圖形的縮放，且縮放後的圖形是全等的。



相似多邊形

1. 對兩個邊數相同的多邊形甲、乙而言，如果甲經過縮放後的多邊形丙會與乙全等，此時甲與乙相似，而且它們的對應邊_____，對應角_____。



由上面的定義，我們可以知道

(1) 兩個圖形中，如果其中一個經過縮放後，會與另一個全等，我們就稱這兩個圖形相似。

(2) 兩個相似的多邊形，對應邊會_____，對應角會_____。

而對應邊成比例的寫法可為下列這三種寫法：

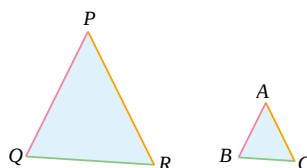
多邊形對應邊成比例的寫法

若 $\triangle PQR \sim \triangle ABC$

1. 方法一：_____

2. 方法二：將方法一改成比值

3. 方法三：寫成連比_____



範例解說 1

- 有兩個相似四邊形，其中一個邊長為 3、5、8、 x ，另一個的對應邊長依序為 9、 y 、 z 、27，則 $x+y+z=?$
- 已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ，且 $A、B、C、D$ 四點的對應點依序為 $P、Q、R、S$ ，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 2$ ， $\angle D = 60^\circ$ ，則 $\angle R = ?$

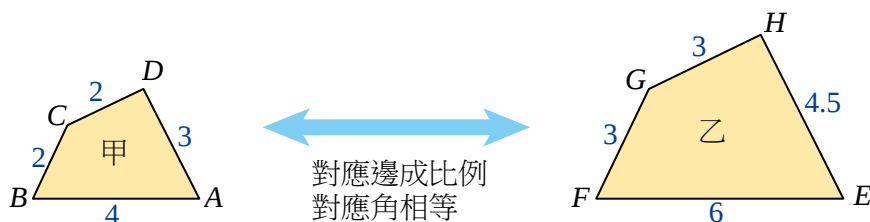
類題：

已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ，且 $A、B、C、D$ 四點的對應點依序為 $P、Q、R、S$ ，若 $\overline{AB} = x-1$ ， $\overline{BC} = 20$ ， $\overline{CD} = 2x-6$ ， $\overline{PQ} = 2x+6$ ， $\overline{RS} = 4x$ ，則 $x = ?$

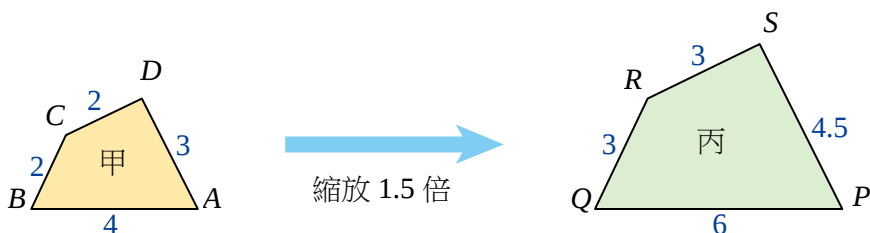
答案：5

2. 如何確定兩多邊形為相似形？

例：甲和乙的對應邊成比例，對應角相等，且乙的邊長都是甲對應邊長的 1.5 倍



此時，我們可以將甲縮放 1.5 倍



此時，乙和丙這 2 個四邊形的對應邊相等、對應角也相等，所以乙_____丙，又甲和丙相似，所以甲和乙_____。

所以由上可知，如果兩個邊數相同的多邊形對_____，_____，則這兩個多邊形相似。



注意：(1)兩多邊形只符合對應邊成比例，則兩多邊形_____相似，如_____。

(2)兩多邊形只符合對應角相等，則兩多邊形_____相似，如_____。

3. 兩個邊數相等的正多邊形一定會_____。

範例解說 1

兩個五邊形甲與乙，其中 $\angle A = \angle F$ 、 $\angle B = \angle G$ 、 $\angle C = \angle H$ 、 $\angle D = \angle I$ 、 $\angle E = \angle J$ ，且各邊長度如圖所示。

求：(1)甲與乙的對應邊是否成比例？對應角是否相等？

(2)甲與乙是否相似？

