



1-2 對數函數

主題 1 常用對數與對數基本公式複習

1. 對數的定義

若 $b > 0$ 時， $10^x = b$ 有唯一實數解，記作 $\log_{10} b$ ，即 $x = \log_{10} b$ 。

$\log_{10} b$ 稱為「以 10 為底數時 b 的對數」，其中 b 稱為**真數**，10 稱為**底數**。

2. 基本公式

$$(1) \log_{10} 1 = 0; \log_{10} 10 = 1。$$

$$(2) \log_{10} 10^x = x。$$

$$(3) 10^{\log_{10} b} = b。$$

$$(4) (10^m)^{\log_{10} b} = b^m。$$

習慣上，以 10 為底數的對數 $\log_{10} b$ 會將底數省略，寫成 $\log b$ 。



例題 1

對數的複習

試求出下列各式的值： (1) $\log_{10} 1$ 。 (2) $\log_{10} 1000$ 。 (3) $10^{\log 3}$ 。

解

$$(1) \log_{10} 1 = 0$$

$$(2) \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

$$(3) \text{由 } 10^{\log b} = b, \text{ 可知 } 10^{\log 3} = 3$$



練習 1

試求出下列各式的值： (1) $\log_{10} 10$ 。 (2) $\log_{10} \frac{1}{10}$ 。 (3) $10^{\log 5}$ 。

解

$$(1) \log_{10} 10 = 1$$

$$(2) \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$$

$$(3) \text{由 } 10^{\log b} = b \text{ 可知 } 10^{\log 5} = 5$$



主題 2 對數與對數基本公式

1. 對數的定義

若 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時， $a^x = b$ 有唯一實數解，記作 $\log_a b$ ，即 $x = \log_a b$ 。

$\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時 b 的對數」，其中 a 稱為**底數**， b 稱為**真數**。

2. 基本公式

$$(1) \log_a 1 = 0; \log_a a = 1。$$

$$(2) \log_a a^x = x; a^{\log_a b} = b。$$



例題 2

對數的基本求值

配合課本例題 1

試求下列各對數的值：

$$(1) \log_2 1。 \quad (2) \log_3 27。 \quad (3) \log_5 \frac{1}{25}。 \quad (4) \log_7 \sqrt{7}。 \quad (5) 2^{\log_2 3}。$$

解

$$(1) \log_2 1 = 0$$

$$(2) \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

$$(3) \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$(4) \log_7 \sqrt{7} = \log_7 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \text{由 } a^{\log_a b} = b \text{ 可知 } 2^{\log_2 3} = 3$$



練習 2

試求下列各對數的值：

$$(1) \log_7 7。 \quad (2) \log_5 625。 \quad (3) \log_3 \frac{1}{81}。 \quad (4) \log_2 2\sqrt{2}。 \quad (5) 3^{\log_3 10}。$$

解

$$(1) \log_7 7 = 1$$

$$(2) \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$$

$$(3) \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$$

$$(4) \log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$(5) \text{由 } a^{\log_a b} = b \text{ 可知 } 3^{\log_3 10} = 10$$



三民

僅供教學使用



主題 3 對數的定義限制與對數律

1. 對數的定義限制

當 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時，對數 $\log_a b$ 才有意義。

2. 對數律

設 x 與 y 都是正數， a 是不為 1 的正數， k 為實數，則

$$(1) \log_a x = \frac{\log x}{\log a} \text{ (換底公式)}$$

$$(2) \log xy = \log x + \log y$$

$$(3) \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$(4) \log x^k = k \log x$$



例題 3

對數的定義限制

試求下列各對數何者有意義：

$$(1) \log_{(-2)}(-2) \quad (2) \log_1 1 \quad (3) \log_2 2 \quad (4) \log_2 1 \quad (5) \log_2(-1)$$

解

當 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時，對數 $\log_a b$ 才有意義

(1) 因為 $a < 0$ 且 $b < 0$ ，所以 $\log_a b$ 無意義 (2) 因為 $a = 1$ ，所以 $\log_a b$ 無意義

(3) $\log_2 2 = 1$ 有意義 (4) $\log_2 1 = 0$ 有意義 (5) 因為 $b < 0$ ，所以 $\log_a b$ 無意義

所以(3)(4)有意義



練習 3

試求下列各對數何者有意義：

$$(1) \log_{10} 3 \quad (2) \log_1 2 \quad (3) \log_2 0 \quad (4) \log_2(-2) \quad (5) \log_{(-3)} 3$$

解

當 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時，對數 $\log_a b$ 才有意義

(1) 因為 $a > 1$ 、 $b > 0$ ，則 $\log_{10} 3$ 有意義 (2) 因為 $a = 1$ ，所以 $\log_a b$ 無意義

(3) 因為 $b = 0$ ，所以 $\log_a b$ 無意義 (4) 因為 $b < 0$ ，所以 $\log_a b$ 無意義

(5) 因為 $a < 0$ ，所以 $\log_a b$ 無意義

所以(1)有意義



**例題 4****對數律的計算 1**

配合課本例題 2、3、4

試求下列各式的值：

(1) $\log 250 + \log 4$ 。 (2) $2\log 30 - \log 9$ 。 (3) $\log_8 3 \times \log_3 4$ 。 (4) $\log_8 9 \times \log_3 16$ 。

解

(1) $\log 250 + \log 4 = \log(250 \times 4) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

(性質(2))

(2) $2\log 30 - \log 9 = 2\log(2 \times 3 \times 5) - \log 3^2 = \log(2 \times 3 \times 5)^2 - \log 3^2$

(性質(4))

$$= \log(2^2 \times 3^2 \times 5^2) - \log 3^2 = \log \frac{(2^2 \times 3^2 \times 5^2)}{3^2} = \log(2^2 \times 5^2) = \log 10^2 = 2$$

(性質(3))

(3) $\log_8 3 \times \log_3 4 = \frac{\log 3}{\log 8} \times \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 3}{3\log 2} \times \frac{2\log 2}{\log 3} = \frac{2}{3}$

(性質(1))

(性質(4))

(4) $\log_8 9 \times \log_3 16 = \frac{\log 9}{\log 8} \times \frac{\log 16}{\log 3} = \frac{2\log 3}{3\log 2} \times \frac{4\log 2}{\log 3} = \frac{8}{3}$

(性質(1))

(性質(4))

**練習 4**

試求下列各式的值：

(1) $\log 625 + \log 16$ 。 (2) $3\log 20 + \log 15 - \log 12$ 。 (3) $\log_2 5 \times \log_5 8$ 。 (4) $\log_9 8 \times \log_4 27$ 。

解

(1) $\log 625 + \log 16 = \log(625 \times 16) = \log(5^4 \times 2^4) = \log 10^4 = 4$

(性質(2))

(2) $3\log 20 + \log 15 - \log 12 = 3\log(2^2 \times 5) + \log(3 \times 5) - \log(2^2 \times 3)$

$$= \log(2^2 \times 5)^3 + \log(3 \times 5) - \log(2^2 \times 3) = \log \frac{(2^6 \times 5^3) \times (3 \times 5)}{2^2 \times 3}$$

(性質(4))

(性質(2)與(3))

$$= \log(2^4 \times 5^4) = \log 10^4 = 4$$

(3) $\log_2 5 \times \log_5 8 = \frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{3\log 2}{\log 5} = 3$

(性質(1))

(性質(4))

(4) $\log_9 8 \times \log_4 27 = \frac{\log 8}{\log 9} \times \frac{\log 27}{\log 4} = \frac{3\log 2}{2\log 3} \times \frac{3\log 3}{2\log 2} = \frac{9}{4}$

(性質(1))

(性質(4))



三民

僅供教學使用



例題 5

對數律的計算 2



若已知 $\log 2 = a$ 、 $\log 3 = b$ ，試將下列各式以 a 、 b 表示：

- (1) $\log 4$ 。 (2) $\log 5$ 。 (3) $\log 6$ 。 (4) $\log_2 6$ 。

解

$$(1) \log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 = 2a$$

$$(2) \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$$

$$(3) \log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$$

$$(4) \log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{a + b}{a}$$



練習 5

若已知 $\log 2 = a$ 、 $\log 3 = b$ ，試將下列各式以 a 、 b 表示：

- (1) $\log 8$ 。 (2) $\log \frac{9}{2}$ 。 (3) $\log 18$ 。 (4) $\log_3 12$ 。

解

$$(1) \log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3a$$

$$(2) \log \frac{9}{2} = \log 9 - \log 2 = \log 3^2 - \log 2 = 2\log 3 - \log 2 = 2b - a$$

$$(3) \log 18 = \log(2 \times 3^2) = \log 2 + 2\log 3 = a + 2b$$

$$(4) \log_3 12 = \frac{\log 12}{\log 3} = \frac{\log(2^2 \times 3)}{\log 3} = \frac{2\log 2 + \log 3}{b} = \frac{2a + b}{b}$$

主題 4 對數函數

1. 對數函數的定義

設 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ ， x 是任意正實數，則稱函數 $f(x) = \log_a x$ 是以 a 為底數的**對數函數**。

當底數為 e 時，此時函數 $y = \log_e x$ 稱為**自然對數函數**，簡記為 $y = \ln x$ 。

2. 對數函數 $y = \log x$ 的圖形有以下特性：

(1) 過定點 $(1, 0)$ 。

(2) 圖形皆在 y 軸右方，即 $x > 0$ 。

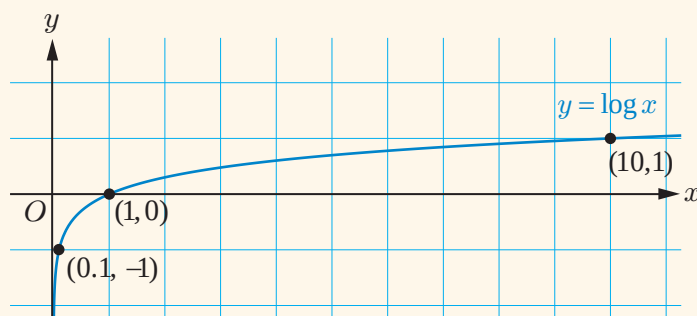
(3) $y = \log x$ 為嚴格遞增函數，
即 $x_1 < x_2$ ，則 $\log x_1 < \log x_2$ ，
圖形由左往右逐漸上升。

(4) 圖形有漸近線 $x = 0$ 。

(5) 圖形凹口向下。

(6) 任一直線和圖形最多有 2 個交點，水平線和圖形恰有 1 個交點。

自然對數函數 $y = \ln x$ 其圖形也都具有上述這些特徵。



例題 6

對數函數的性質

配合課本例題 5

下列關於函數 $y = \log x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A) 圖形與 y 軸交於 $(0, 1)$ (B) 圖形均在 x 軸的上方 (C) 圖形由左向右逐漸遞增
(D) 圖形與 x 軸恰有一個交點 (E) 若 $(\frac{1}{3}, k)$ 為函數 $y = \log x$ 圖形上一點，則 $k < 0$

解

(A) 函數 $y = \log x$ 圖形與 y 軸無交點， $x = 0$ ， $y = \log x$ 無意義

(B) 函數 $y = \log x$ 圖形均在 y 軸的右方，經過第一與第四象限

(C) $y = \log x$ 為嚴格遞增函數，圖形由左向右逐漸遞增

(D) 圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ 恰有一個交點

(E) $(\frac{1}{3}, k)$ 為函數 $y = \log x$ 圖形上一點，即 $k = \log \frac{1}{3} = -\log 3 < 0$

故選(C)(D)(E)



練習 6

下列關於函數 $y = \log x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A) 圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$ (B) 圖形均在 y 軸的右方 (C) 圖形與 $x = 3$ 恰有一個交點
 (D) 圖形與 $y = -\frac{1}{2}$ 恰有一個交點 (E) 若 $(h, \frac{1}{3})$ 為函數 $y = \log x$ 圖形上一點，則 $h < 0$

解 (A) 函數 $y = \log x$ 圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$

(B) 函數 $y = \log x$ 圖形均在 y 軸的右方

(C) $y = \log x$ 為嚴格遞增函數，故與 $x = 3$ 恰有一個交點 $(3, \log 3)$

(D) 函數 $y = \log x$ 圖形與 $y = -\frac{1}{2}$ 交於 $(x, -\frac{1}{2})$ ，則 $\log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

故恰有一個交點 $(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{2})$

(E) $(h, \frac{1}{3})$ 為函數 $y = \log x$ 圖形上一點，即 $\frac{1}{3} = \log h$ ， $h = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} > 1$

故選(A)(B)(C)(D)



例題 7

函數 $y = \log x$ 的凹向性

配合課本例題 6

已知 $y = \log x$ 的圖形上兩點 $A(3, \log 3)$ 、 $B(5, \log 5)$ ，試利用圖形的性質來比較 $a = \log 4$ 、 $b = \frac{\log 3 + \log 5}{2}$ 的大小關係。

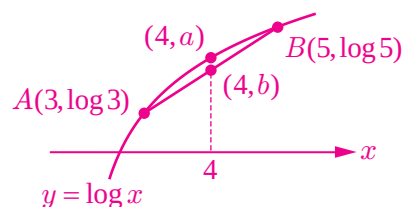
解 $\overline{AB}$ 的中點為 $(\frac{3+5}{2}, \frac{\log 3 + \log 5}{2}) = (4, b)$

又當 $x = 4$ 時，函數 $y = \log x$ 圖形上的點為 $(4, \log 4) = (4, a)$

如圖所示，由對數函數 $y = \log x$ 圖形凹口向下的特性知 $a > b$

〔另解〕

$$\begin{aligned} b &= \frac{\log 3 + \log 5}{2} = \frac{1}{2} \log(3 \times 5) = \frac{1}{2} \log 15 \\ &= \log 15^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{15} < \log \sqrt{16} = \log 4 = a \end{aligned}$$



練習 7

若 $a > b$ ，試比較 $\ln \frac{a+b}{2}$ 、 $\frac{\ln a + \ln b}{2}$ 的大小關係。

解 取 $y = \ln x$ 圖形上兩點 $A(a, \ln a)$ 、 $B(b, \ln b)$ ， $\overline{AB}$ 中點為 $(\frac{a+b}{2}, \frac{\ln a + \ln b}{2})$

當 $x = \frac{a+b}{2}$ 時，函數圖形上的點為 $(\frac{a+b}{2}, \ln \frac{a+b}{2})$

如圖所示，由對數函數 $y = \ln x$ 圖形凹口向下的特性知 $\ln \frac{a+b}{2} > \frac{\ln a + \ln b}{2}$

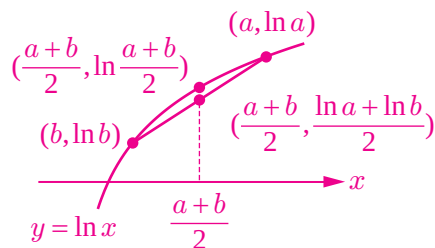
〔另解〕

由算幾不等式知 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ （因為 $a > b$ 所以等號不會成立）

故 $\ln \frac{a+b}{2} > \ln \sqrt{ab}$ （ $y = \ln x$ 為嚴格遞增函數）

$$\begin{aligned} \text{而 } \ln \sqrt{ab} &= \ln(ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(a \times b) = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) \\ &= \frac{\ln a + \ln b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \ln \frac{a+b}{2} > \frac{\ln a + \ln b}{2}$$



配合課本 P.41

主題 5 指數函數與對數函數的圖形關係

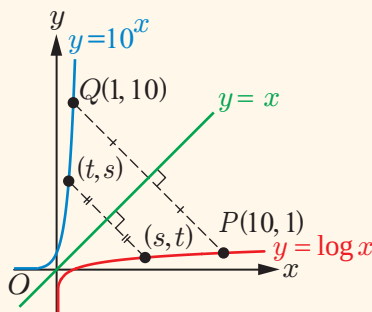
1. 指數函數與對數函數圖形的對稱性

$y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 兩函數圖形對稱於直線 $y = x$ 。

2. 對數函數的圖形特性（補充）

當 $a > 1$ 時，對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形有以下特性：

- (1) 過定點 $(1, 0)$ 。
- (2) 圖形皆在 y 軸右方，即 $x > 0$ 。
- (3) $y = \log_a x$ 為嚴格遞增函數，即 $x_1 < x_2$ ，則 $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ，圖形由左往右逐漸上升。
- (4) 圖形有漸近線 $x = 0$ 。
- (5) 圖形凹口向下。
- (6) 任一直線和圖形最多有 2 個交點，水平線和圖形恰有 1 個交點。
- (7) $y = \log_a x$ 與 $y = a^x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。





例題 8

指數與對數函數的性質



下列關於函數 $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A)兩圖形均與 y 軸交於 $(0, 1)$ (B)兩圖形均在 x 軸的上方
(C)兩圖形均由左向右逐漸遞增 (D)兩圖形均會與任一鉛直線交於一點

解

- (A) $y = 10^x$ 與 y 軸交於 $(0, 1)$ ，而 $y = \log x$ 與 y 軸不相交
(B) $y = 10^x$ 在 x 軸的上方，而 $y = \log x$ 通過一、四象限
(C)兩圖形均由左向右逐漸遞增
(D) $y = 10^x$ 與任一鉛直線交於一點，而 $y = \log x$ 與任一 x 坐標大於 0 的鉛直線交於一點
故選(C)



練習 8

下列關於函數 $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 圖形的敘述，試選出正確的選項。

- (A)兩圖形均有漸近線 (B)兩圖形均凹口向上
(C)兩圖形均會與任一水平線交於一點 (D)兩圖形對稱於直線 $y = x$

解

- (A) $y = 10^x$ 有漸近線 $y = 0$ ，而 $y = \log x$ 有漸近線 $x = 0$
(B) $y = 10^x$ 凹口向上而 $y = \log x$ 凹口向下
(C) $y = 10^x$ 與任一 y 坐標大於 0 的水平線交於一點，而 $y = \log x$ 與任一水平線交於一點
(D)兩圖形對稱於直線 $y = x$
故選(A)(D)

配合課本 P.42-P.45

主題 6 對數的應用

七二法則

設本金為 P ，利率為 $r\%$ ，複利計算，期數為 n 。當 n 、 r 滿足 $n \times r = 72$ 時，則 n 年後的本利和約為 $2P$ 。當 $2 \leq r \leq 18$ 時，估計效果較佳。

例如：當年利率為 4% 時， $n = \frac{72}{4} = 18$ ，即 18 年後本利和約為原來的 2 倍。





例題 9

對數的應用 1

配合課本例題 7

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量；當測得的聲音強度為 $I(\text{W}/\text{m}^2)$ 時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10 \times \log \frac{I}{10^{-12}}$ 。若汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 80 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 $10^{-3}(\text{W}/\text{m}^2)$ ，試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？

解

$$d(10^{-3}) = 10 \times \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \times \log 10^9 = 10 \times 9 = 90$$

此聲音強度產生的噪音為 90 分貝



練習 9

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量；當測得的聲音強度為 $I(\text{W}/\text{m}^2)$ 時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10 \times \log \frac{I}{10^{-12}}$ 。若小張有聽力障礙，需聽到噪音 90 分貝方能被吵醒。而一支瓦斯氣笛獨鳴時，測得的噪音為 70 分貝，試問 10 支瓦斯氣笛同時同地合鳴時，被測得的噪音大約為多少分貝？能否吵醒小張？

解

設一支瓦斯氣笛獨鳴時聲音強度為 x ，即 $10 \times \log \frac{x}{10^{-12}} = 70$

則 10 支瓦斯氣笛同時同地合鳴時聲音強度為 $10x$ ，即

$$10 \times \log \frac{10x}{10^{-12}} = 10 \times (\log 10 + \log \frac{x}{10^{-12}}) = 10 \times \log 10 + 10 \times \log \frac{x}{10^{-12}} = 10 \times 1 + 70 = 80 < 90$$

約 80 分貝，故無法吵醒小張



例題 10

對數的應用 2

配合課本例題 8

目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設 $E(r)$ （單位：焦耳）為地震規模 r 時，震央所釋放的能量，其關係約為 $\log E(r) = 5.24 + 1.44r$ ，試問：

- (1) 某次地震的芮氏規模為 4，試問其震央釋放出來的能量 $E(4)$ 為多少焦耳？
- (2) 芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放出來的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放出來的能量的多少倍？（四捨五入到整數位，已知 $10^{1.44} = 27.54$ ）

1

解

$$(1) \log E(4) = 5.24 + 1.44 \times 4 = 11, E(4) = 10^{11} \text{ (焦耳)}$$

$$(2) \log E(6) = 5.24 + 1.44 \times 6, \log E(4) = 5.24 + 1.44 \times 4, \text{ 故 } \log E(6) - \log E(4) = 1.44 \times 2$$

$$\text{而 } \log \frac{E(6)}{E(4)} = \log E(6) - \log E(4) = 1.44 \times 2 \Rightarrow \frac{E(6)}{E(4)} = 10^{1.44 \times 2} = (10^{1.44})^2 = (27.54)^2 \approx 758$$

即芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放出來的能量 $E(6)$ 是芮氏規模 4 的地震震央所釋放出來的能量 $E(4)$ 的 758 倍



練習 10

目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設 $E(r)$ （單位：焦耳）為地震規模 r 時，震央所釋放的能量，其關係約為 $\log E(r) = 5.24 + 1.44r$ ，而西元 1999 年的集集大地震的規模為 7.3，2004 年的印尼大地震的規模為 9.0，其震央所釋放出來的能量是集集大地震震央所釋放出來的能量的多少倍？（四捨五入到整數位，已知 $\log 2.805 = 0.448$ ）

解

$$\log E(9.0) = 5.24 + 1.44 \times 9, \log E(7.3) = 5.24 + 1.44 \times 7.3$$

$$\text{故 } \log E(9.0) - \log E(7.3) = 1.44 \times (9 - 7.3)$$

$$\text{而 } \log \frac{E(9.0)}{E(7.3)} = \log E(9.0) - \log E(7.3) = 1.44 \times 1.7 = 2.448 = 2 + 0.448$$

$$= \log 100 + \log 2.805 = \log 280.5$$

$$\frac{E(9.0)}{E(7.3)} = 280.5 \approx 281$$

2004 年的印尼大地震的規模為 9.0，其震央所釋放出來的能量 $E(9.0)$ 是集集大地震震央所釋放出來的能量 $E(7.3)$ 的 281 倍



例題 11

對數的應用 3

配合課本例題 9

小華實業年營收為 1 億元，若以平均年成長率 4% 計算，試問多少年後年營收達 2 億元？

($\log 1.04 = 0.0170$ 、 $\log 2 = 0.3010$)

解

設 n 年後年營收達 2 億元，即 $2 = 1 \times (1 + 4\%)^n$ ，亦即 $2 = (1.04)^n$

將方程式兩邊取常用對數得

$$\log 2 = \log(1.04)^n = n \log(1.04) \Rightarrow 0.3010 = n \times 0.0170 \Rightarrow n = \frac{0.3010}{0.0170} \approx 17.7$$

故 18 年後年收營收達 2 億元

〔另解〕

設 n 年後年收營收達 2 億元

利用七二法則可得 $4 \times n = 72 \Rightarrow n = 18$ ，故約 18 年後年營收達 2 億元



練習 11

小華實業年營收為 1 億元，倘若公司希望在 9 年後年營收達 2 億元，試問所需平均年成長率約為何？

解

設所需平均年成長率為 $r\%$

若 9 年後營收翻倍，則 $2 = 1 \times (1 + r\%)^9 \Rightarrow 2 = (1 + \frac{r}{100})^9$

將方程式兩邊取常用對數得

$$\log 2 = \log(1 + \frac{r}{100})^9 = 9 \log(1 + \frac{r}{100})$$

$$\Rightarrow 0.3010 = 9 \times \log(1 + \frac{r}{100}) \Rightarrow \log(1 + \frac{r}{100}) = \frac{0.3010}{9} \approx 0.03344$$

由計算機計算得 $1 + \frac{r}{100} = 10^{0.03344} \approx 1.08 \Rightarrow r = 8$ ，所需平均年成長率約為 8%

〔另解〕

設所需平均年成長率為 $r\%$

利用七二法則可得 $r \times 9 = 72 \Rightarrow r = 8$ ，故所需平均年成長率約為 8%