

2

指數、對數

2-1 指數

2-2 常用對數

國高中教材銜接分析

國中已學教材

N-7-6 指數的意義：

指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時， $a^0 = 1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。

N-7-7 指數律：

以數字例表示「同底數的乘法指數律」 $(a^m \times a^n = a^{m+n})$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中 m, n 為非負整數；以數字例表示「同底數的除法指數律」 $(a^m \div a^n = a^{m-n})$ ，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數。

N-7-8 科學記號：

以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。**註**：本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10^{-9} 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。

本章節教材

N-10-1 實數：

科學記號數字的運算。

N-10-3 指數：

非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的 x^y 鍵。

N-10-4 常用對數：

$\log$ 的意義，常用對數與科學記號連結，使用計算機的 10^x 鍵和 $\log$ 鍵。

N-10-5 數值計算的誤差：

認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。★

2-1 指數

主題一 整數指數與指數律

配合課本 P.54 ~ P.59

在國中階段，指數是相同數連乘的一種簡便表示法，例如 $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ ，因此指數被限定為正整數，再搭配指數律的運算，定義出 $a \neq 0$ 時， $a^0 = 1$ ；現在我們要將指數從非負整數推廣到整數、有理數與實數，使指數的運算與應用能更加完整。

1. 正整數指數：

設 a 為實數， n 為正整數，則定義 $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$ ，讀作「 a 的 n 次方」，其中 a 稱

為底數， n 稱為指數。特別地， a^2 與 a^3 通常讀作「 a 的平方」與「 a 的立方」。

2. 正整數指數律：

設 a 、 b 為實數，且 m 、 n 為正整數，則：

- (1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。
- (2) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。
- (3) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ 。

3. 整數指數的定義：

設 a 為不等於 0 的實數， n 為正整數，則：

- (1) $a^0 = 1$ 。
- (2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

說明 在定義一個數學符號的過程，通常要考慮後續所需滿足的運算性質，例如在定義 a^0 時，若指數律成立，則 $a^n \times a^0$ 與 a^{n+0} 必須相等，即 $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$ ，

因此，當 $a \neq 0$ 時，從上面的式子，可以得 $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$ ，

同理，為使 $a^n \times a^{-n}$ 與 $a^{n+(-n)}$ 相等，即 $a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ ，

我們會得到 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

4. 整數指數的指數律：

設 a 、 b 為不等於 0 的實數， m 、 n 為整數，則：

- (1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。
- (2) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。
- (3) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ 。
- (4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 。

5. 使用計算機求指數：

我們可以使用計算機中的 x^y 鍵計算指數。

例如：使用計算機計算 3^7 時，可依序按 **3**， **x^y** ，**7**，**=**，即可求得 $3^7 = 2187$ 。

例題 1 正整數的指數律

暖身題

試求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^5$ 。

(2) $\frac{(12^3)^2}{2^8 \times 3^4}$ 。

(3) $(\sqrt{5} - 2)^{10} (\sqrt{5} + 2)^{11}$ 。

解**類題**

試求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3})^7 \times (\sqrt{3})^3$ 。

(2) $\frac{3^4 \times 4^3}{2^2 \times 6^3}$ 。

(3) $(\sqrt{2} - 1)^3 (\sqrt{2} + 1)^5$ 。

解

例題 2 整數的指數律

配合課本例題 1

(1) 請將適當的數填入下列的空格：

① $\frac{1}{3^5} = 3^{\square}$ 。

② $5^{\square} = 1$ 。

③ $7^{-3} = \frac{1}{\square}$ 。

(2) 試求下列各式的值：

① $(2^{-2})^{-1} + 2^{-3} \times 2^4$ 。

② $\frac{(\sqrt{3}-1)^{-3}}{(\sqrt{3}+1)^4}$ 。

解**類題**

試求下列各式的值：

(1) $3^{-21} \times 3^{23}$ 。

(2) $5^{-4} \times 25^3 + (3^{-1})^{-2}$ 。

解

例題 3 指數的應用題(一)

配合課本例題 2

在實驗室中有某種細菌，每經過一天，細菌在單位面積中的數量成長為前一天的 2 倍。現今細菌數量有 2000 個，試問：

- (1) 6 天後，細菌數量有_____個。
- (2) 3 天前，細菌數量有_____個。
- (3) 5 天前細菌數量的個數是 4 天後細菌數量的個數的_____倍。

解**類題**

放射性物質其質量衰變為原來的一半所需的時間稱為「半衰期」。若現今某放射性物質有 100 公克。

- (1) 如果此放射性物質經過了 4 個半衰期，它的質量會變成_____公克。
- (2) 此放射性物質經過了_____個半衰期，它的質量會剩下 $\frac{25}{128}$ 公克。

解

主題二 有理數指數與指數律

配合課本 P.60 ~ P.62

1. 有理數指數的定義：

設 a 為正實數， n 為正整數， m 為整數，則定義：

(1) $a^{\frac{1}{n}}$ 為滿足 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ 的唯一正數。

(2) $a^{\frac{m}{n}}$ 為滿足 $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ 的唯一正數。

2. 亦可將有理數指數以根號的形式表示如下：

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 。

(2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ 。

說明 對於任何一個正數 a 及正整數 n ，都有唯一的正數 x 滿足 $x^n = a$ ，
這唯一的正數 x 記為 $\sqrt[n]{a}$ ，稱為 a 的正 n 次方根。

又因為利用指數律可得 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ ，所以 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ 。

3. 有理數指數的指數律：

設 a 、 b 為正實數， r 、 s 為有理數，則：

(1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ 。

(2) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ 。

(3) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ 。

例題 4 有理數的指數律

配合課本例題 3

試求下列各式的值：

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ 。

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ 。

(3) $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[8]{9}$ 。

解

類題

試求下列各式的值：

(1) $8^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}}$ 。

(2) $(0.008)^{-\frac{1}{3}}$ 。

解

主題三 實數指數與指數律

配合課本 P.63 ~ P.65

1. $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ 為不循環的無限小數，用每次增加一位小數的方式取得一系列的有理數，即 1.4，1.41，1.414，1.4142，1.41421，1.414213，1.4142135，……；這一系列的有理數會逐漸逼近 $\sqrt{2}$ ，分別計算所對應的指數值，得到

$$\begin{aligned} 2^{1.4} &\approx 2.639015822, \\ 2^{1.41} &\approx 2.657371628, \\ 2^{1.414} &\approx 2.664749650, \\ 2^{1.4142} &\approx 2.665119089, \\ 2^{1.41421} &\approx 2.665137562, \\ 2^{1.414213} &\approx 2.665143104, \\ 2^{1.4142135} &\approx 2.665144027, \\ &\vdots \end{aligned}$$

這一系列的有理數指數所逐漸逼近的值，我們就定義為 $2^{\sqrt{2}}$ 。

2. 給一正實數 a 與無理數 u ，可以仿照上面的方式定義 a^u 的值。
3. 實數指數也會滿足指數律。

例題 5 實數的指數律

配合課本例題 4

請將適當的數填入下列的空格：

(1) $4^{\sqrt{2}} \times 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} = 2^{\square}$ 。

(2) $(5^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{3}})^2 = 10^{\square}$ 。

解

類題

試求出下列各式的值：

(1) $7^{\sqrt{3}} \times 49^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 。

(2) $(3^{\sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ 。

解

例題 6 指數律的運算

常見段考題

(1) 設 a 為正實數，且 $a^3=2$ ，若 $a^x=\frac{1}{8}$ ，試求 x 的值。

(2) 設 x 為實數，且 $3^x=4$ ，試求 $12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + \sqrt{9^x}$ 的值。

解

類題

(1) 設 a 為正實數，且 $a^5=4$ ，若 $a^x=\frac{1}{16}$ ，試求 x 的值。

(2) 設 x 為實數，且 $4^x=5$ ，試求 $50 \times \left(\frac{1}{16}\right)^x + 64^x$ 的值。

解

例題 7 指數運算與乘法公式

常見段考題

若 $3^{\sqrt{2}} + 3^{-\sqrt{2}} = a$ ，試以 a 表示下列各式：

(1) $9^{\sqrt{2}} + 9^{-\sqrt{2}}$ 。

(2) $27^{\sqrt{2}} + 27^{-\sqrt{2}}$ 。

解**類題**

設 a 為正實數且 $a + a^{-1} = 3$ ，試求下列各式的值：

(1) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ 。

(2) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$ 。

解

例題 8 指數的應用題 (二)

配合課本例題 5

藥物的半衰期是指藥物在血液中的濃度經過代謝後降低到原來一半所消耗的時間。已知 A 藥物的半衰期為 3 小時，現在血液中藥物的濃度為 80 %，經過 12 小時後，血液中藥物的濃度為 _____ %。

解**類題**

某放射性物質的半衰期為 5 年，現在此放射性物質為 360 公克，如果再經過 30 年，此放射性物質會剩下 _____ 公克。

解**主題四 科學記號與有效數字**

配合課本 P.65 ~ P.67

科學記號：

- (1) 任何正實數 a 都可以寫成： $a = b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 是整數。
稱為 a 的科學記號表示法，其中 b 稱為係數， n 稱為指數。
例如： $152000000 = 1.52 \times 10^8$ ， $0.0010246 = 1.0246 \times 10^{-3}$ 。
 - (2) 把測量結果寫成科學記號 $b \times 10^n$ 時，其中係數 b 的位數稱為有效數字的位數。
 - (3) 在數字的計算中，會適當規範有效數字的位數。當位數超過時，通常以四捨五入的原則處理。
-

例題 9 科學記號的運算

配合課本例題 6

計算下列各小題的值，並將答案以科學記號表示且係數部分取兩位有效數字。

(1) $7.3 \times 10^3 + 4.5 \times 10^3$ 。

(2) $4.3 \times 10^4 - 7.1 \times 10^3$ 。

(3) $(2.1 \times 10^{-5}) \div (7.0 \times 10^{-7})$ 。

(4) $(4.0 \times 10^{-2}) \times (5.3 \times 10^4)$ 。

解**類題**

計算下列各小題的值，並將答案以科學記號表示且係數部分取兩位有效數字。

(1) $3.2 \times 10^7 + 6.5 \times 10^5$ 。

(2) $8.9 \times 10^6 - 3.1 \times 10^5$ 。

(3) $(2.7 \times 10^7) \div (9.0 \times 10^{-2})$ 。

(4) $(4.1 \times 10^{-5}) \times (3.0 \times 10^{-3})$ 。

解

例題 10 指數的應用題 (三)

配合課本例題 7

翰翰從甲地開車前往乙地時速為 1.08×10^5 公尺，行駛了 11 小時，又從乙地開車前往丙地時速為 1.05×10^5 公尺，行駛了 9 小時，則翰翰共行駛了_____公尺。(將答案用科學記號表示且係數部分取三位有效數字)

解**類題**

承例題 10，翰翰從甲地到丙地的平均時速為_____公尺。(將答案用科學記號表示且係數部分取三位有效數字)

解

2-1 實力演練

基礎題

1. 化簡 $(\sqrt{3}-2)^{-6}(\sqrt{3}+2)^{-8} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

主題一

2. 試估算 $2^{\frac{3}{5}}$ 最接近下列何數？（單選）

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 2

(E) $\frac{5}{2}$

主題二

3. 若 a 為正實數，且 $\sqrt[6]{a^5} \times (\sqrt[12]{a})^{14} = a^x$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

主題二

4. 用計算機按 **3** 和 **√** **√** **√** **√**，若結果為 $3^{\frac{1}{n}}$ 的近似值，則整數 n 為_____。

主題二

5. $\left(\frac{81}{25}\right)^{0.5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \times (0.09)^{-0.5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

主題二

6. 設服用止痛藥經過 x 小時後，殘留在身體裡的量為原來的 y 倍，其中 x 與 y 的關係式可表示為： $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$ ，已知仔仔於今天服用一顆 8 毫克的止痛藥，則兩天後殘留在仔仔身體的止痛藥為_____毫克。

〔豐原高中〕 主題二

7. 放射性物質其重量衰變為原來的一半所需的時間稱為半衰期，已知某放射性物質在 20 天前原有 1024 公克，經過若干次的半衰期後只剩下 32 公克，則此放射性物質的半衰期為_____天。

主題三

8. 關於指數的敘述，下列哪些選項是正確的？（多選）

(A) $(-2)^3 \times (-2)^5 = 2^8$

(B) $[(-2)^{\frac{2}{3}}]^3 = (-2)^2$

(C) $(\sqrt{3})^{-1} = -\sqrt{3}$

(D) $(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}$

(E) $(\sqrt{3})^3 = 3^{\sqrt{3}}$

〔安康高中〕 主題三

9. 設 a 為正實數，且 $a^{-3} = 5$ ，若 $a^n = 0.04$ ，則 n 值為_____。

主題三

10. 莫耳是科學上用來表示化學物質所含基本實體個數的單位，已知 1 莫耳 $= 6 \times 10^{23}$ 個，若桌上的一杯純水含有水分子 2.4×10^{27} 個，則此杯純水含氫原子_____莫耳。

主題四

註：1 個水分子 (H_2O) 含有 2 個氫原子

進階題

11. 在地球人口議題中，現在的人口數 $\times (1 + \text{年成長率}) = \text{明年的人口數}$ ，據統計 2010 年的總人口數為 69.6 億人，在 2000 年到 2020 年，假設每年的成長率皆為 1.2%，試求 2000 年的總人口數為_____億人。(以億人為單位，四捨五入至整數位)
(參考數據： $1.012^{10} \approx 1.13$ ， $1.012^{-10} \approx 0.89$)

主題一

12. 設 a 為正實數，若 $a^1 - a^{-1} = \sqrt{5}$ ，下列哪些選項是正確的？(多選)
- (A) $a^1 + a^{-1} = 3$ (B) $a^2 + a^{-2} = 7$ (C) $a^4 + a^{-4} = 45$
(D) $a^2 - a^{-2} = 3\sqrt{5}$ (E) $a^3 + a^{-3} = 18$

主題一

13. 已知 $\frac{2}{10^{12}} < \frac{1}{6^{15}} < \frac{3}{10^{12}}$ ，若將 6^{30} 以科學記號記做 $a \times 10^n$ ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

主題四

14. 數線上 A 點代表 10^{-7} ， B 點代表 10^{-9} ， P 點在 $\overline{AB}$ 上且 $3\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 。若 P 點在數線上代表的數以科學記號表示為 $k \times 10^n$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

主題四

混合題

15. 養養多飲料公司研發一種新的飲料，並於飲料中添加有益人體的乳酸菌，已知乳酸菌的數量每一天都會增長為前一天的 a 倍。已知在開始培養的 3 天後，乳酸菌的數量變為 10^5 個，6 天後數量變為 6.4×10^6 個。試問：

(1) a 的值為何？(單選)

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

主題一

(2) 至少需要培養多少天，乳酸菌的數量才會超過 10^8 個？(取到整數)

〔竹東高中〕

主題四



大考實戰題

16. 若在計算器中鍵入某正整數 N ，接著連按「 $\sqrt{\hspace{0.5cm}}$ 」鍵(取正平方根)3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？(單選)

(A) 2^3 (B) 2^4 (C) 2^6 (D) 2^8 (E) 2^{12}

〔112 學測 A〕

主題二



17. 某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X 、 Y 。已知甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，例如 15 點時甲的數量為 $2X$ 。乙的數量每 2 小時成長為原來的 2 倍，例如 14 點時乙的數量為 $2Y$ 、16 點時乙的數量為 $4Y$ ，測量所得結果部分記錄於下表。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。(多選)

時刻(點)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$									
乙數量	Y		$2Y$		$4Y$								

- (A) $X > Y$ (B) 在 13 點時，甲的數量為 $\frac{4}{3}X$
 (C) 在 15 點時，乙的數量為 $3Y$ (D) 在 19 點時，乙的數量為甲的 1.5 倍
 (E) 在 24 點時，乙的數量為甲的 2 倍

〔112 學測 B〕

主題二



18. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？(單選)

- (A) 8 小時 (B) 10 小時 (C) 12 小時
 (D) 15 小時 (E) 20 小時

〔105 學測〕

主題三

