

3-1 積 分

1. 反導函數

(1) 若函數 $F(x)$ 滿足 $F'(x) = f(x)$ ，則稱 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數。

(2) 設 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數，且以符號 $\int f(x)dx$ 表示所有 $f(x)$ 的反導函數，則有 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，其中 C 為任意實數

2. 反導函數的運算性質

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為連續函數。

(1) $\int (kf(x))dx = k \int f(x)dx$ ，其中 k 為一常數。

(2) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ 。

(3) $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ 。

3. 定積分

若 $F(x)$ 為函數 $f(x)$ 的一個反導函數，則 $F(x)$ 從 a 到 b 的變化量 $F(b) - F(a)$ 稱為 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 的定積分，記作 $\int_a^b f(x)dx$ ，即 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

其中 a 和 b 分別稱為此定積分的下限和上限。

通常將 $F(b) - F(a)$ 以符號 $F(x)\Big|_a^b$ 表示，即 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

練習題

1. 設函數 $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ ：

(1) 試求 $\int f(x)dx$ 。(4 分)

(2) 已知 $F(x)$ 為函數 $f(x)$ 的一個反導函數，且 $F(1) = 6$ ，試求 $F(x)$ 。(4 分)

[配合 3-1.1]

2. 已知 $\int_1^3 (2x+b)dx = 4$ 且 $\int_2^6 (ax+b)dx = 24$ ，試求實數 a 、 b 之值。(8 分)

[配合例題 5]

3. 試求 $\int_{-1}^3 (x-2)^3 dx$ 。(8 分)

[配合例題 4]

4. 試根據函數圖形，求下列的積分的值：

(1) $\int_{-4}^0 \sqrt{16-x^2} dx$ 。(5 分) (2) $\int_{-2}^1 |x-1| dx$ 。(5 分)

5. 設 $\int_1^2 f(x)dx = -7$ 、 $\int_1^5 f(x)dx = 9$ 、 $\int_2^5 g(x)dx = 11$ ，試求：

(1) $\int_2^5 f(x)dx$ 。(5 分) (2) $\int_3^5 [3f(x) - 5g(x)]dx$ 。

6. 已知 $\int_1^a (2x-1)dx = 20$ ，試求 a 之值。(8 分)

[配合例題 5]

7. 試求函數 $f(x) = -x^2 + x + 2$ 的圖形與 x 軸及直線 $x = 0$ 、 $x = 3$ 所圍成區域的面積。(8 分)

[配合例題 9]