

2

因數分解與分數運算

2-1 質因數分解

2-2 公因數與公倍數

2-3 分數的四則運算

2-4 指數律



校慶話劇表演大賞

韓信帶兵幫朕
打敗項羽，在軍中聲望如
日中天，不知他是否有不臣
之心，會不會想取朕而代之，
這該如何是好呢？

啟稟陛下，
臣建議可將韓信傳喚
至宮中，再趁機將
他抓起來。

韓
信
點
兵



韓信進京



韓信到底帶了多少親衛兵？
學完本章，你就可以知道囉！



溫故啟思

大小相同的正方形磁磚若干片，可以緊密地排出不同形狀的長方形。若拿 6 塊，可排出兩種形狀，如右圖。

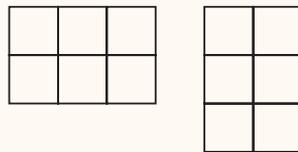
(1) 若小善拿 12 塊，請畫出 2 種可能排出的形狀。

(2) 若小鈞拿 13 塊，試問他可以排出幾種形狀？

第一種



第二種



(以上兩種情形視為同一種)

1 因數與倍數

小學時，我們學過一個正整數的因數與倍數。當正整數 a 除以正整數 b 的結果為正整數（即 a 可以被 b 整除）時，我們稱 a 是 b 的**倍數**， b 是 a 的**因數**。例如： $56 \div 7 = 8$ ，56 是 7 的倍數，7 是 56 的因數。



隨堂練習

- 1 判斷 180 顆蘋果是否能平分給 15 位學生。
- 2 判斷 180 是不是 15 的倍數。

由 $35 \div 7 = 5$ ，可知道 35 分別是 5、7 的倍數，5、7 是 35 的因數；可以發現 $35 = 5 \times 7$ ，那麼 35 是 5 和 7 的倍數，5 和 7 是 35 的因數。

一般而言，對於 a 、 b 、 c 三個正整數，如果 $a \div b = c$ ， $a \div c = b$ ，也就是 $a = b \times c$ ，那麼 a 是 b 、 c 的倍數，而 b 、 c 都是 a 的因數。

因數與倍數的概念可不可以延伸到負數呢？我們知道

$$8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = (-1) \times (-8) = (-2) \times (-4) ;$$

$$-8 = 1 \times (-8) = 2 \times (-4) = (-1) \times 8 = (-2) \times 4 .$$

也就是說 1、2、4、8 和 -1、-2、-4、-8 這些數，它們都是 8 的因數，而且也都是 -8 的因數。

由此可以知道，當 b 是 a 的因數時， b 的相反數 $-b$ 也是 a 的因數；當 a 是 b 的倍數時， a 的相反數 $-a$ 也是 b 的倍數。

若沒有特別說明，一般提到因數與倍數都是指正因數與正倍數。

由上述的因數與倍數說明，可以知道

關於 1 和 0 的因數與倍數：

- ① 當 a 是整數時，因為 $a \div 1 = a$ ，所以 1 是任意整數的因數，任意整數都是 1 的倍數。
- ② 當 a 是非零整數時，因為 $0 \div a = 0$ ，所以 0 是任意非零整數的倍數。



隨堂練習

寫出 18 的所有因數。

例 1 因數的應用

小亮拿了 M 塊大小相同的正方形磁磚，最多可以排出 4 種不同形狀的長方形，它的邊長由小到大分別為 1 、 2 、 a 、 b 、 6 、 c 、 12 、 M ，則 M 為多少？
 c 為多少？

解 因為 $1 \times M = 2 \times 12 = a \times c = b \times 6$ ，

所以 $M = 2 \times 12 = 24$ 。

又 24 的所有因數由小到大排列為

1 、 2 、 3 、 4 、 6 、 8 、 12 、 24 ，

故 $c = 8$ 。



1 、 2 、 a 、 b 、 6 、 c 、 12 、 M



隨堂練習

如果拿了 N 塊大小相同的正方形磁磚，最多可以排出 4 種不同形狀的長方形，它的邊長由小到大分別為 1 、 a 、 b 、 5 、 8 、 c 、 d 、 N ，則 N 為多少？
 a 、 b 、 c 、 d 各為多少？

2 倍數的簡易判別法

國小時學過如何判別 2、5 的倍數，我們先復習這些判別法，並探索 4、9、3 和 11 的倍數判別法。

► 2、5 的倍數判別法



2 的倍數與 5 的倍數判別法

- (1) 如果一個正整數的個位數字是 0、2、4、6、8，則這個正整數一定是 2 的倍數，否則就不是 2 的倍數。
- (2) 如果一個正整數的個位數字是 0 或 5，那麼這個正整數就是 5 的倍數，否則就不是 5 的倍數。

例如：72、520、2024 是 2 的倍數，但 2023 不是 2 的倍數。

75、610 是 5 的倍數，但 221 不是 5 的倍數。

正整數中，我們稱 2 的倍數為**偶數**，
不是 2 的倍數為**奇數**。



$0=0 \times 2$ ，0 是 2 的倍數，
所以 0 也是偶數喔！

隨堂練習

- 1 如果四位數 $137\square$ 是 2 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
- 2 如果兩個三位數 279 及 $13\square$ 的和是 5 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
- 3 若五位數 $5432\square$ 是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則 $\square = ?$

 探索活動

4 的倍數判別法

- ① 小亮：「因為 114 的個位數字 4 是 4 的倍數，
所以 114 是 4 的倍數。」
請問小亮的說法對嗎？為什麼？

- ② 小善：「因為 100 是 4 的倍數，28 也是 4 的倍數，
所以 $128 = 100 + 28$ 是 4 的倍數。」
請問小善的說法對嗎？為什麼？

- ③ 從前面的臆測與檢驗，當 24 是 4 的倍數，請你說明
為何 $324 (= 300 + 24)$ 是 4 的倍數？



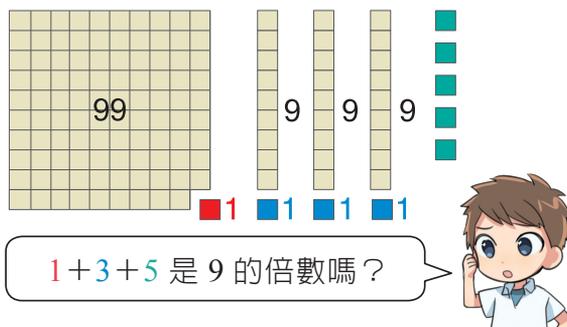
4 的倍數判別法

如果一個正整數的末兩位數是 4 的倍數或皆為 0，那麼這個正整數就是 4 的倍數，否則就不是 4 的倍數。

► 9 的倍數判別法

如何判斷一個數是否為 9 的倍數呢？以 135 為例，我們可以將 135 分成 1 堆 100、3 堆 10 和 5 堆 1，寫成：

$$\begin{aligned} 135 &= 1 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \\ &= 1 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 5 \\ &= 1 \times 99 + 1 + 3 \times 9 + 3 + 5 \\ &= 1 \times 99 + 3 \times 9 + (1 + 3 + 5) \end{aligned}$$



由於 99、9 都是 9 的倍數，因此只要看 135 的各個數字和 (1+3+5) 是否為 9 的倍數即可。因為 $1+3+5=9$ ，所以 135 是 9 的倍數。



9 的倍數判別法

如果一個正整數的各個數字和是 9 的倍數，那麼這個正整數就是 9 的倍數，否則就不是 9 的倍數。

例 2 判別 9 的倍數

判別 7893 與 10189 是否為 9 的倍數。

解

- (1) 7893 的各個數字和為 $7+8+9+3=27$ ，
因為 27 是 9 的倍數，所以 7893 是 9 的倍數。
- (2) 10189 的各個數字和為 $1+0+1+8+9=19$ ，
因為 19 不是 9 的倍數，所以 10189 不是 9 的倍數。

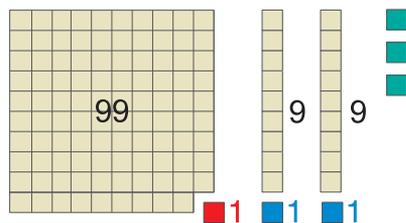
隨堂練習

- 1 45678 與 234567 是否為 9 的倍數？
- 2 如果三位數 $5\square 5$ 是 9 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？

► 3 的倍數判別法

我們也可以利用 9 的倍數判別法來了解一個數是否為 3 的倍數。例如：

$$\begin{aligned} 123 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \\ &= 1 \times (99 + 1) + 2 \times (9 + 1) + 3 \\ &= 1 \times 99 + 1 + 2 \times 9 + 2 + 3 \\ &= 1 \times 99 + 2 \times 9 + (1 + 2 + 3) \end{aligned}$$



$1 + 2 + 3$ 是 3 的倍數嗎？



由於 99、9 都是 3 的倍數，因此只要看 123 的各個數字和 ($1 + 2 + 3$) 是否為 3 的倍數即可。因為 $1 + 2 + 3 = 6$ ，所以 123 是 3 的倍數。



3 的倍數判別法

如果一個正整數的各個數字和是 3 的倍數，那麼這個正整數就是 3 的倍數，否則就不是 3 的倍數。

例 3 判別 3 的倍數

判別 2018 與 2019 是否為 3 的倍數。

解

- (1) 2018 的各個數字和為 $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ ，
因為 11 不是 3 的倍數，所以 2018 不是 3 的倍數。
- (2) 2019 的各個數字和為 $2 + 0 + 1 + 9 = 12$ ，
因為 12 是 3 的倍數，所以 2019 是 3 的倍數。



隨堂練習

- 1 2020 是否為 3 的倍數？
- 2 如果五位數 $6521\square$ 是 3 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？

► 11 的倍數判別法

當我們想知道 1936 是否為 11 的倍數時，可利用 $1936 \div 11$ 的結果。

- 1 如果 1936 可以被 11 整除，那麼 1936 是 11 的倍數。
- 2 如果 1936 不能被 11 整除，那麼 1936 就不是 11 的倍數。

如何判斷一個數是否為 11 的倍數呢？有其他更方便的方法嗎？

看看下面的方法：

$$\begin{aligned}
 1936 &= 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 3 \times 10 + 6 \\
 &= 1 \times (1001 - 1) + 9 \times (99 + 1) + 3 \times (11 - 1) + 6 \\
 &= 1 \times 1001 - 1 + 9 \times 99 + 9 + 3 \times 11 - 3 + 6 \\
 &= \underbrace{1 \times 1001 + 9 \times 99 + 3 \times 11}_{11 \text{ 的倍數}} + (9 + 6) - (1 + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1001 &= 7 \times 11 \times 13
 \end{aligned}$$



由於 1001、99、11 都是 11 的倍數，因此要判斷 1936 是否為 11 的倍數時，只要看 1936 的奇數位數字和 (9+6) 與偶數位數字和 (1+3) 的差是否為 11 的倍數或是 0 即可。因為 $(9+6) - (1+3) = 11$ 是 11 的倍數，所以 1936 是 11 的倍數。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{奇數位數字和 } 9+6=15 & & & & \\
 & \text{1} & \text{9} & \text{3} & \text{6} & \text{兩者的差} & = 15 - 4 = 11 \\
 & \underbrace{\hspace{2em}} & & & & & \\
 & \text{偶數位數字和 } 1+3=4 & & & & &
 \end{array}$$



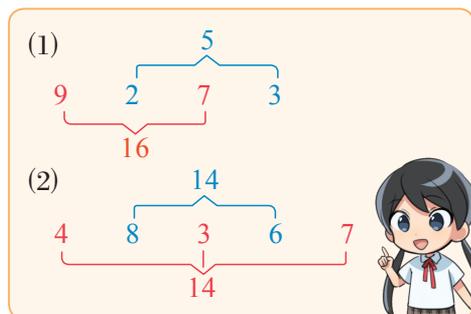
11 的倍數判別法

如果一個正整數的奇數位數字和與偶數位數字和的差是 11 的倍數或是 0，那麼這個正整數就是 11 的倍數，否則就不是 11 的倍數。

例 4 判別 11 的倍數

判別 9273 與 48367 是否為 11 的倍數。

- 解**
- (1) 9273 的奇數位數字和為 $2 + 3 = 5$ ，
 偶數位數字和為 $9 + 7 = 16$ 。
 因為 $16 - 5 = 11$ 是 11 的倍數，
 所以 9273 是 11 的倍數。
- (2) 48367 的奇數位數字和為 $4 + 3 + 7 = 14$ ，
 偶數位數字和為 $8 + 6 = 14$ 。
 因為 $14 - 14 = 0$ ，
 所以 48367 是 11 的倍數。



隨堂練習

- 下列各數中，哪些是 11 的倍數？
333、7777、61482、91938
- 如果四位數 $79\square 6$ 是 11 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？

3 質數與合數



質數與合數

一個大於 1 的整數，

如果除了 1 和本身以外，沒有其他因數，這樣的整數稱為**質數**；

如果除了 1 和本身以外，還有其他因數，這樣的整數稱為**合數**。

例如：

- ① 因為 2 只有 1、2 兩個因數，所以 2 是質數。
- ② 因為 3 只有 1、3 兩個因數，所以 3 是質數。
- ③ 4 除了因數 1、4 以外，還有因數 2，故 4 是合數。

而 1 不是質數，也不是合數。2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

例 5 判別質數與合數

判別 17 和 27 是質數還是合數。

解 17 除了 1 和本身以外，沒有其他的因數，故 17 是質數。
27 除了 1 和本身以外，還有因數 3 和 9，故 27 是合數。

隨堂練習

- ① 判別 50 和 51 是質數還是合數。
- ② 請將下表的質數圈出來。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



解謎三角

如果 a 是 3 的倍數，那 a 也是 9 的倍數嗎？

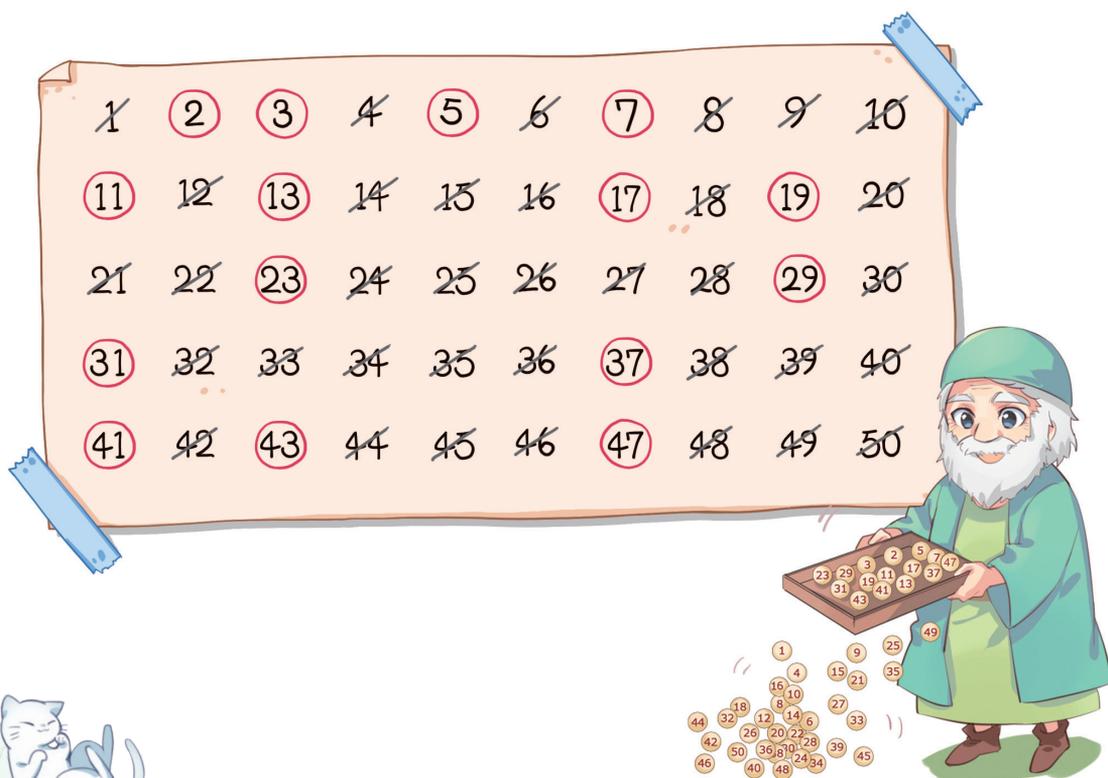
質數篩檢法

在兩千多年前，古希臘數學家埃拉托賽尼（*Eratosthenes*，約西元前 276 年～西元前 194 年）曾提出一種篩檢法，用來找出小於某個正整數的所有質數。接著我們來說明此篩檢法如何篩選 1 到 50 之間的所有質數。

首先列出 1 到 50 之間的所有整數，並依照下列步驟進行：

- ❶ 1 不是質數，故刪去 1。
- ❷ 2 是質數，故圈出 2，並刪去其餘 2 的倍數。
- ❸ 下一個沒有被刪去最小的數是 3，圈出 3，並刪去其餘 3 的倍數。
- ❹ 下一個沒有被刪去最小的數是 5，圈出 5，並刪去其餘 5 的倍數。
- ❺ 下一個沒有被刪去最小的數是 7，圈出 7，並刪去其餘 7 的倍數。

完成步驟 ❶～步驟 ❺ 的操作後，將剩下的 11、13、17、19、…… 圈起來，這些被圈出來的數就是 50 以內的質數。



解
不一定。
例如 12 是 3
的倍數，但
12 不是 9 的
倍數。



隨堂練習

請在下表圈出 51 到 100 之間的質數。

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4 標準分解式

如果一個正整數的因數也是質數，我們稱這個因數是這個正整數的**質因數**。
例如：20 的因數有 1、2、4、5、10、20，其中 2、5 是質數，因此我們說 2、5 是 20 的質因數。

例 6 找出質因數

寫出 36 的因數及其質因數。

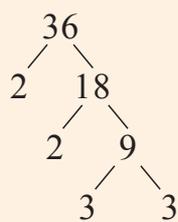
解 因為 $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ ，
所以 36 的因數有 1、2、3、4、6、9、12、18、36，
其中 2、3 是質數，因此 36 的質因數為 2、3。

隨堂練習

分別將整數 51、52 的因數填入下表，並將它們的質因數找出來。

整數	因數	質因數
51		
52		

在例題 6 中，用列出所有因數的方法找出 36 的質因數；在國小時我們學過，用樹狀圖或短除法也可以將一個正整數分解，並寫成質因數的乘積。

樹狀圖	短除法	因數分解
	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ \underline{2} \\ 2 \overline{) 18} \\ \underline{6} \\ 3 \overline{) 9} \\ \underline{3} \\ 3 \end{array}$	$\begin{aligned} 36 &= 2 \times 18 \\ &= 2 \times 2 \times 9 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \end{aligned}$
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 質因數 2、3	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 質因數 2、3	質因數 2、3

由上面的三種方式將一個大於 1 的整數分解成質數的乘積，就是對此整數做**質因數分解**。

例 7 質因數分解求相異質因數

將 540 做質因數分解，並寫出 540 的相異質因數。

解

短除法

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 540} \\ \underline{2} \\ 2 \overline{) 270} \\ \underline{6} \\ 3 \overline{) 135} \\ \underline{9} \\ 3 \overline{) 45} \\ \underline{15} \\ 3 \overline{) 15} \\ \underline{15} \\ 5 \end{array}$$

$$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

相異質因數為 2、3、5。

因數分解

$$\begin{aligned} 540 &= 2 \times 270 \\ &= 2 \times (2 \times 135) \\ &= 2 \times 2 \times (3 \times 45) \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times (3 \times 15) \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times (3 \times 5) \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

相異質因數為 2、3、5。

隨堂練習

將 680 做質因數分解，並寫出 680 的相異質因數。

將質因數分解依質因數由小到大排序，再將相同的質因數乘積寫成乘方的型式，我們稱這樣的表示法為**標準分解式**。例如： $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ 。

例 8 求標準分解式

① 求 300 的標準分解式。

② 求 855 的標準分解式。

解

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 300} \\ 2 \overline{) 150} \\ 3 \overline{) 75} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 855} \\ 3 \overline{) 171} \\ 3 \overline{) 57} \\ 19 \end{array}$$

短除法不一定要從最小的質因數開始分解。



$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$855 = 3 \times 3 \times 5 \times 19 = 3^2 \times 5 \times 19$$

故 300 的標準分解式為 $2^2 \times 3 \times 5^2$ 。

故 855 的標準分解式是 $3^2 \times 5 \times 19$ 。

隨堂練習

① 求 112 的標準分解式。

② 求 780 的標準分解式。

例 9 短除法與標準分解式

小善利用短除法將正整數 a 分解成質因數乘積，計算過程如右圖。請將 a 、 d 用標準分解式表示。

$$\begin{array}{r|l} 2 & a \\ \hline 2 & b \\ \hline 3 & c \\ \hline 5 & d \\ \hline & 7 \end{array}$$

解

$$d = 5 \times 7、$$

$$c = 3 \times 5 \times 7、$$

$$b = 2 \times 3 \times 5 \times 7、$$

$$a = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7。$$

$$\text{故 } a = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7、d = 5 \times 7。$$

隨堂練習

如右圖，將 a 用標準分解式表示後可得 $2^p \times 3 \times q^2 \times r$ ，則 $p + q + r = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2 & a \\ \hline 3 & b \\ \hline 7 & c \\ \hline 7 & d \\ \hline & 11 \end{array}$$



數養時光機

質數找得完嗎？

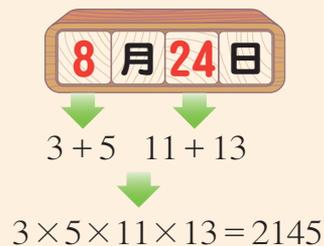
無論世界上有幾個質數，歐幾里德說只要把它們相乘再加 1，就可以找出新質數。例如世界上只有 3 個質數甲、乙、丙，假設丁 = 甲 × 乙 × 丙 + 1。

- ① 如果丁是質數，因為比甲、乙、丙都要大，所以是一個新質數。
- ② 如果丁是合數，它會有比自己小的質因數，可是丁除以甲、乙、丙都餘 1，所以必有一個跟甲、乙、丙都不一樣的質數戊可以整除了。

例 10 標準分解式的應用

如右圖，小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，他分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼。

若小明以相同方式得到的密碼為 2030，則小明的生日是幾月幾日？



解 因為 $2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 29$ ，

所以四個質數為 2、5、7、29。

又月分不會超過 12，日期不會超過 31，

故 $5 + 7 = 12$ ， $2 + 29 = 31$ ，

因此小明的生日是 12 月 31 日。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2030} \\
 \underline{5} \\
 5 \overline{) 1015} \\
 \underline{7} \\
 7 \overline{) 203} \\
 \underline{29}
 \end{array}$$



隨堂練習

承例題 10，若小丘以相同方式得到的密碼為 2618，則小丘的生日是幾月幾日？





2-1 重點整理

1 因數、倍數

設 a 、 b 、 c 是三個正整數，如果 $a = b \times c$ ，
那麼 a 是 b 、 c 的倍數， b 、 c 是 a 的因數。

2 倍數判別法

2 的倍數判別法：個位數字是 0、2、4、6、8。 例 10、32。

5 的倍數判別法：個位數字是 0 或 5。 例 50、85。

4 的倍數判別法：末兩位數是 4 的倍數或皆為 0。 例 128、200。

9 的倍數判別法：各個數字和是 9 的倍數。 例 171。

3 的倍數判別法：各個數字和是 3 的倍數。 例 123。

11 的倍數判別法：奇數位數字和與偶數位數字和的差是 11 的倍數
或是 0。 例 319、4334。

3 質數、合數

(1) 質數：一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，沒有其他因數。

(2) 合數：一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，還有其他因數。

4 質因數分解

將一個大於 1 的整數分解成質數的乘積，這種分解過程稱為質因數分解。

例 $12 = 2 \times 2 \times 3$ ，12 的質因數為 2、3。

5 標準分解式

如果我們把一個大於 1 的整數做質因數分解後，將比較小的質因數寫在前面，比較大的質因數寫在後面，並將相同的質因數乘積寫成乘方的型式，我們稱這樣的表示法為該整數的標準分解式。

例 $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$ ，故 20 的標準分解式為 $2^2 \times 5$ 。



2-1 自我評量

P.83 課文

1 下列敘述中，正確的請打「○」，錯誤的請打「×」：

- () (1) 因為 $12 = 3 \times 4$ ，所以 4 是 12 的因數。
- () (2) 因為 $8 = 1.6 \times 5$ ，所以 5 是 8 的因數。
- () (3) 1 是 17 的因數。
- () (4) 3 是 1 的倍數。
- () (5) 因為 $12 = 3 \times 4$ ，所以 12 的因數只有 3 和 4。

P.83 課文

2 若 63 可分解為 $a \times b$ ，其中 a 、 b 均為正整數，請寫出 $a + b$ 可能的值。

P.85 ~ 90 課文、隨堂

3 已知 7529□ 是五位數，依照下列各題的條件，分別寫出 □ 中可能的數字。

- (1) 5 的倍數：□ = _____。
- (2) 3 的倍數：□ = _____。
- (3) 既是 2 的倍數，又是 3 的倍數：□ = _____。
- (4) 4 的倍數：□ = _____。
- (5) 9 的倍數：□ = _____。
- (6) 11 的倍數：□ = _____。

P.92 課文

- 4 將右表的質數圈出來，恰好可形成一個英文字母，試問這個英文字母是什麼呢？

7	12	63	1	67
13	41	77	91	2
19	81	3	85	5
31	14	27	43	59
47	26	51	10	23

P.94 例 7 P.95 例 8

- 5 求以下各數的標準分解式，並寫出這些數的相異質因數。

(1) 42

(2) 234

(3) 980

(4) 504

P.82 課文 P.95 課文

- 6 請圈出 $2 \times 3^4 \times 5^2$ 的因數。

$$2、4、5、9、2 \times 3、2 \times 7、5^3、3 \times 5^2$$

P.97 例 10

- 7 小真的電腦密碼有四碼 $abcd$ ，分別隱藏在 600 的標準分解式 $2^a \times b \times c^d$ 中，試問此密碼為何？



✘ 錯誤診療

以下是小丞利用短除法求 546 的標準分解式。

請問小丞的解法是否正確？

若不正確，請標出發生錯誤的地方，並寫出正確解法。



2	546	步驟一
3	273	步驟二
	91	步驟三

所以標準分解式

$546 = 2 \times 3 \times 91$ 步驟四