



圓來如此

謝涓婷

學歷：國立屏東師範學院學士

現職：彰化縣大竹國小教師

經歷：夢一、夢二、夢 N 國小數學組講師

彰化縣 106 年度特殊優良教師銅質獎

活動單元

- 活動一 「圓」來在這裡
- 活動二 誰該淘汰？
- 活動三 糖果該放在哪裡？
- 活動四 直徑的祕密
- 活動五 直徑和半徑的關係
- 活動六 圓形噴水池怎麼蓋？

Chapter 2

教學對象：三年級

「圓」來如此

教學目標

- 一、認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。
- 二、了解「圓的半徑都一樣長」。
- 三、了解「直徑是半徑的兩倍」。
- 四、了解「直徑是圓內最長的直線」。

設計理念

對學生而言，「圓」是一個既熟悉又陌生的形狀，熟悉是因為生活中隨處可見；陌生則是因為對於數學名詞的文字定義理解困難。在低年級學生的眼中，只要不是方方正正、三角形或是有直線邊的形狀，都叫作「圓」，如：圓圓的臉、圓形的水果、圓形的餐具、圓形的帽子等，這些生活用語的「圓」，並不符合數學上對於圓的定義。到了中年級，孩子要學的是真正的「圓」，要認識圓的構成要素——圓周、圓心、直徑、半徑。依據學習原理，幾何教學，

須從具體操作入手，但只讓孩子找一找、折一折、畫一畫，就足夠了嗎？若只是要學生辨認出圓的構成要素（圓心、圓周、直徑、半徑）或許，只透過一些具體操作活動就可以達成。但是，若是要學生進一步了解以下概念：

1. 圓的半徑都一樣長
2. 直徑是半徑的兩倍
3. 直徑是圓內最長的直線
4. 判斷圓周上任意兩點所連成線段是否為直徑

除了具體操作外，更需要激發學生的「需求感」才能促動學生的認知需求，達成概念學習的目標，這也是本單元教學設計的核心理念。

三年級學生已經具備「視覺（Visualization）」的思考層次，本教學單元透過自編的繪本故事，希望學生閱讀後認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」，以及了解「圓的半徑都一樣長」、「直徑是半徑的兩倍」、「直徑是圓內最長的直線」三個特殊性質。本故事內容共有六個學習活動，每一個活動包含一至四個不等的學習目標。筆者結合故事情境，針對每個數學概念設計提問，讓學生模擬故事主角遭遇的問題，並透過個別操作或小組討論進行數學思考與對話，進而達成數學概念的學習。

這一天，

螞蟻國王請大臣在皇宮門口貼出了一張公告，

內容是這樣的……

徵才

近日想聘用一個工藝大師，

為皇宮設計一座以「圓」為主題的庭園造景，

如果你自認為是個「圓形高手」，

歡迎來挑戰。

誰是
圓
形
高
手

黑黑：
我有信心，一定可以順利過關！



學習點：辨識生活中的圓

活動一 「圓」來在這裡

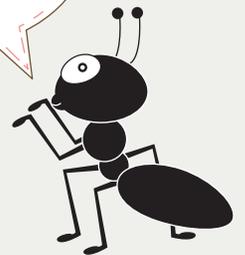
任務一 請找出六種生活中常見的圓形物品。

1. 螞蟻黑黑一下子就過關了，你知道他找了哪些東西嗎？

2. 小朋友，你也來找一找，說一說，我們教室中有哪些圓形物品？

3. 以下是螞蟻黑黑找到的，大家看一看，跟你找的東西一不一樣？

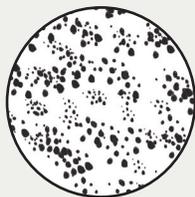
這實在
太容易了！



任務二 測驗一下，請問下面哪些圖案是圓形？



A



B



C



D



E

教學活動說明

活動一 任務一

利用故事，提高學生學習動機，讓學生模擬故事主角解決任務，找出教室中至少六種圓形的物品或圖案，並請學生描述或指出所找物品「圓形」的範圍和區域。最後再揭示投影片的答案，請全班學生一起檢視答案的正確與否。

生活中的圓隨處可見，學生一點都不陌生，此活動主要是喚起學生先備知識，因為問題較簡單，所以學生舉手發言相當踴躍，根

據實際教學結果，此活動的通過率百分之一百，但在批閱習作時，發現仍有少數幾位學生受到生活用語影響，認為看起來像圓形，或是有彎彎的線的形體就是圓形，因此建議教學時，教師要請學生「精準描述」或「直接指出」所找物品「圓形」的範圍和區域，來確認孩子對於「圓形」認知是否正確，而不是僅以學生說出一個「含圓形」的物品就認定答案正確。舉例來說：當學生答垃圾桶，教師要進一步請該生實際指出垃圾桶的「圓形」部份在哪裡？教師亦可以提出反例，如「農曆十三的月相」或是缺角的圓，來讓學生說明不是圓的理由。



活動一 任務二

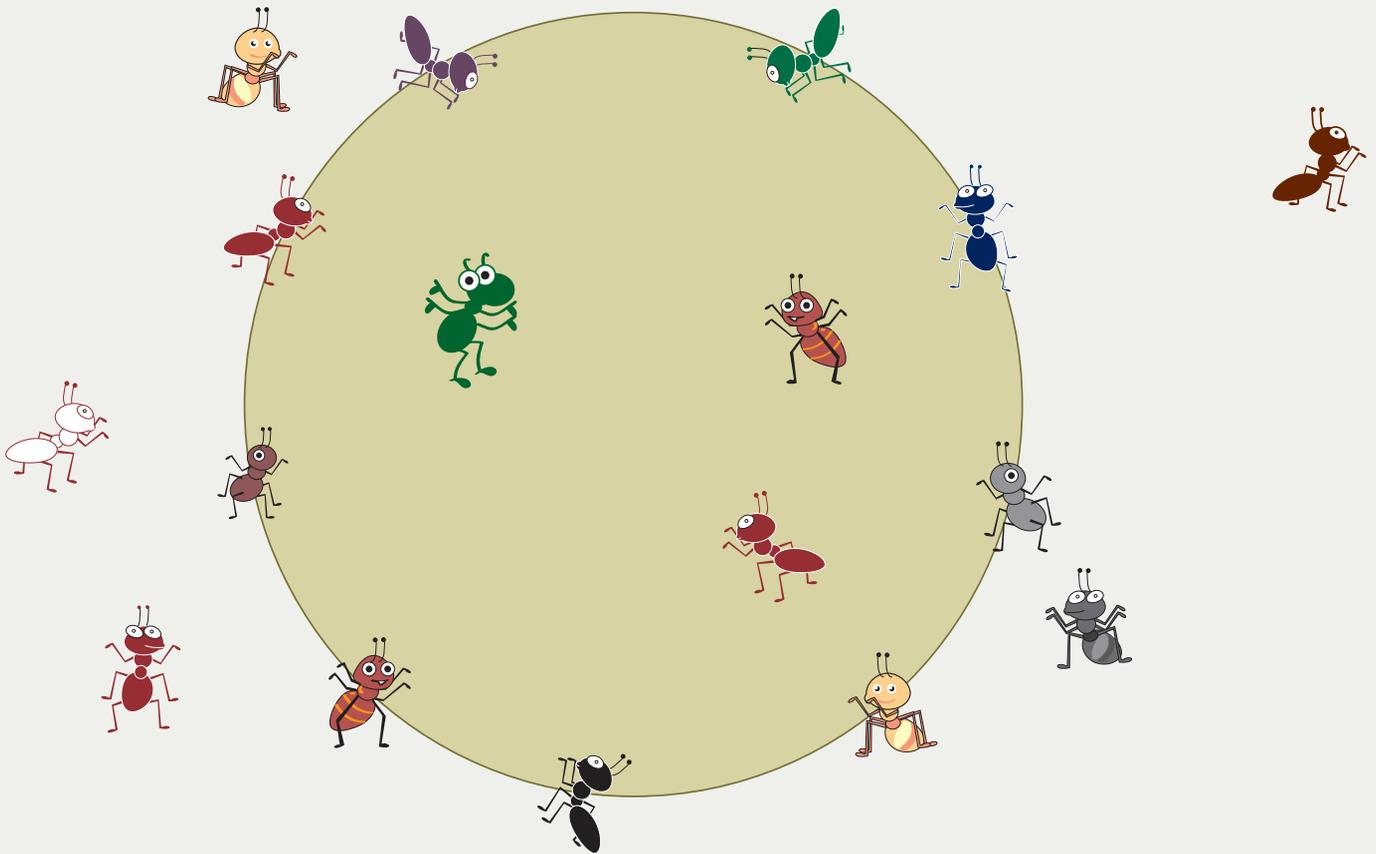
進一步測驗學生是否真正了解什麼是圓。根據試教結果，發現有些學生會認為有彎彎的線（曲線）的物品就是圓形，例如：A、E。或是在聆聽檢視同儕找出的圓形物品時，只關注物品名稱，沒有確認形狀，例如：C。利用 AEC 三個反例，讓學生說出不是「圓形」理由，以便確認學生對圓的認知是否正確。

整個活動一的設計主要是透過故事模擬，讓學生產生解決任務的需求，以檢視學生是否能夠精準描述「圓形」的範圍和區域，並作出正確判別。此活動目的是培養學生思辨分析、與後設思考素養。

學習點：圓周的命名

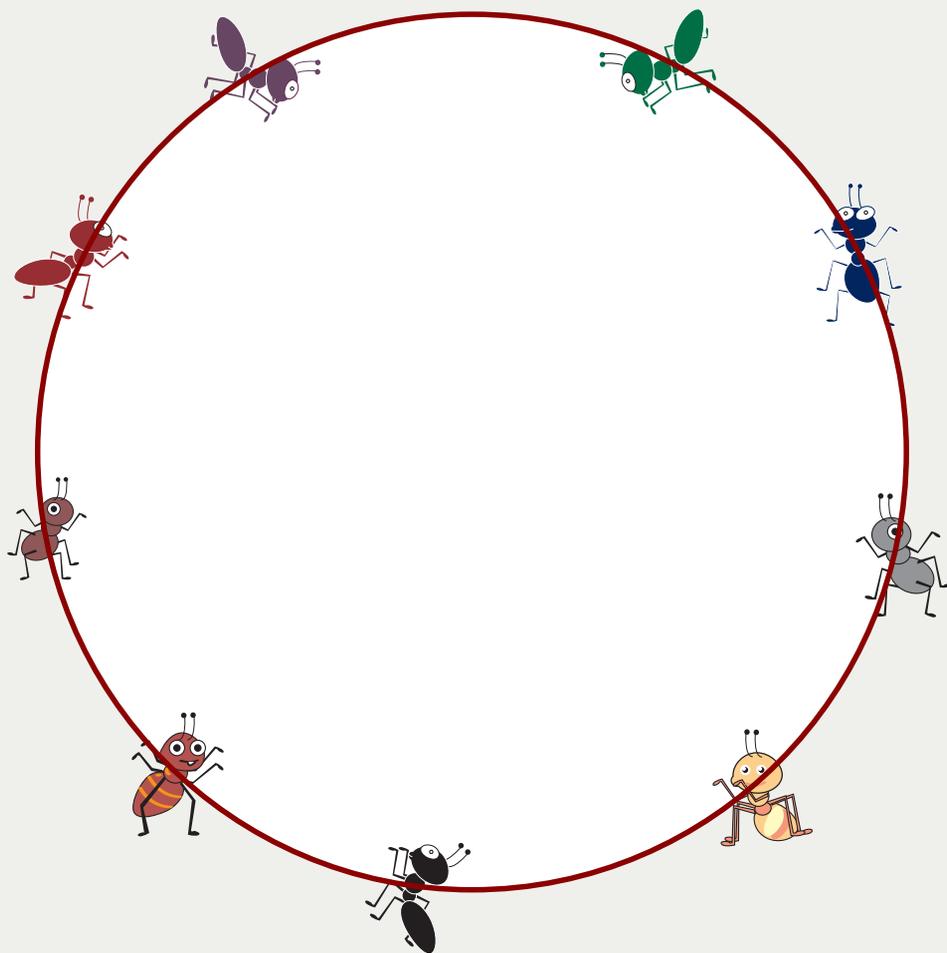
活動二 誰該淘汰？

任務一 主考官請參賽者用最快速度站在圓形競技場的周界上。預備~起，54321 停！



1. 喔喔！有些螞蟻跑太慢了，有些螞蟻又衝過頭了，牠們都沒有完成這項任務，請問哪些螞蟻應該淘汰？
2. 小朋友，請各組討論一下，究竟哪些螞蟻會被淘汰？

任務二 小朋友，黑黑和其他幾隻螞蟻都站在圓形的周界上，他們都過關了。



對於「圓形的周界」，有一個更簡明的說法：



圓的周界我們稱作「**圓周**」

教學活動說明

活動二 任務一

學生要以「在周界外」、「在周界內」回答，若有學生一邊指，一邊說「這隻、這隻、這隻、……」，教師要引導將學生說出「周界」這個概念，如：你指的這些螞蟻都站在哪裡呢？請你用我們教過的數學名詞再說一遍。若學生說「裡面的和外面的都要淘汰。」教師便要追問：「你說的裡面和外面，是什麼的裡面？什麼的外面？」讓學生具體說出：「周界的裡面和外面都要淘汰。」

本活動是利用提問賦予學生擔任裁判的角色，提高學習專注力。接著讓學生透過討論，判斷出哪些螞蟻該被淘汰，以便確認學生對於圖形周界的認知是否正確。

活動二 任務二

歸納學生說法，並以精簡用詞解說「圓周」一詞。透過繪本一頁一頁呈現，學生會依序看見圓周外和圓周內的螞蟻消失不見，最後再以紅色圓形標示強調圓形的周界，並歸納宣告圓形的周界在數學上的說法叫「圓周」。

活動二的設計主要是透過觀察圖示，找出圓的周界並命名。此活動目的是要培養學生和他人溝通協調，並合作解決問題的素養。

學習點：找圓心、發現半徑

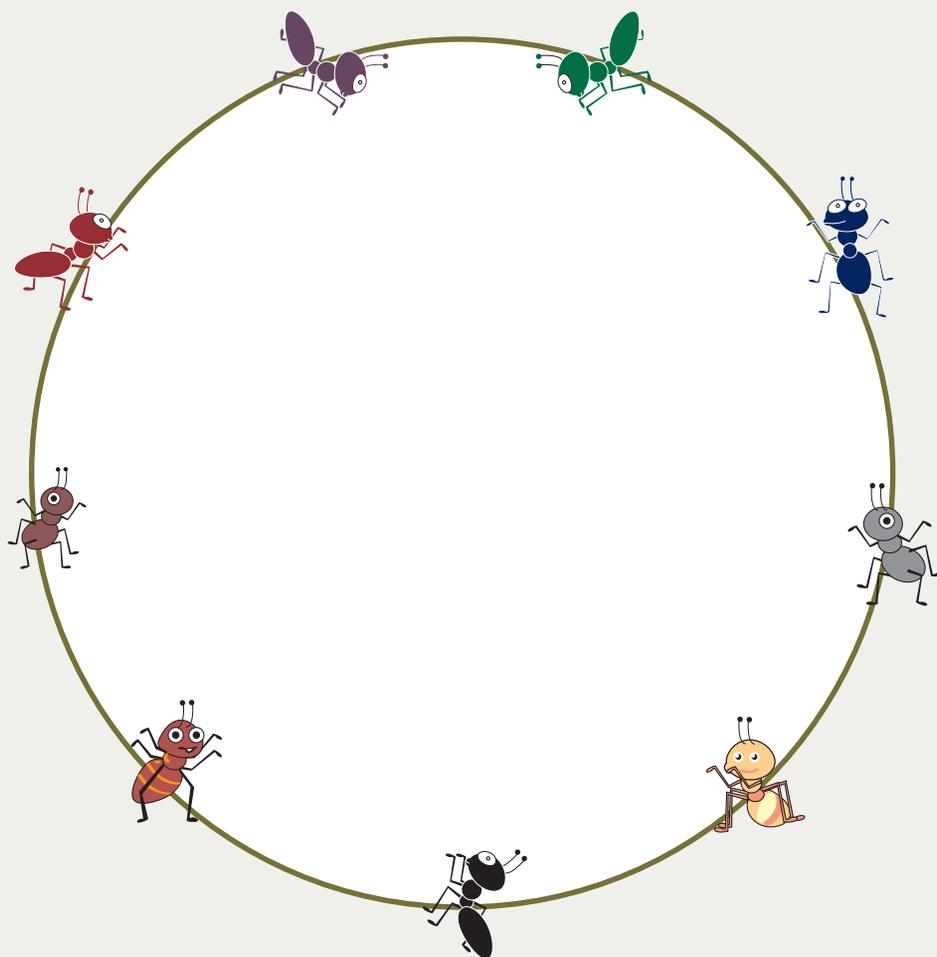
活動三 糖果該放在哪裡？

任務一 主考官在圓形競技場內放一顆糖果，並說：「誰先搶到這顆糖果，就可以進入下一關。」



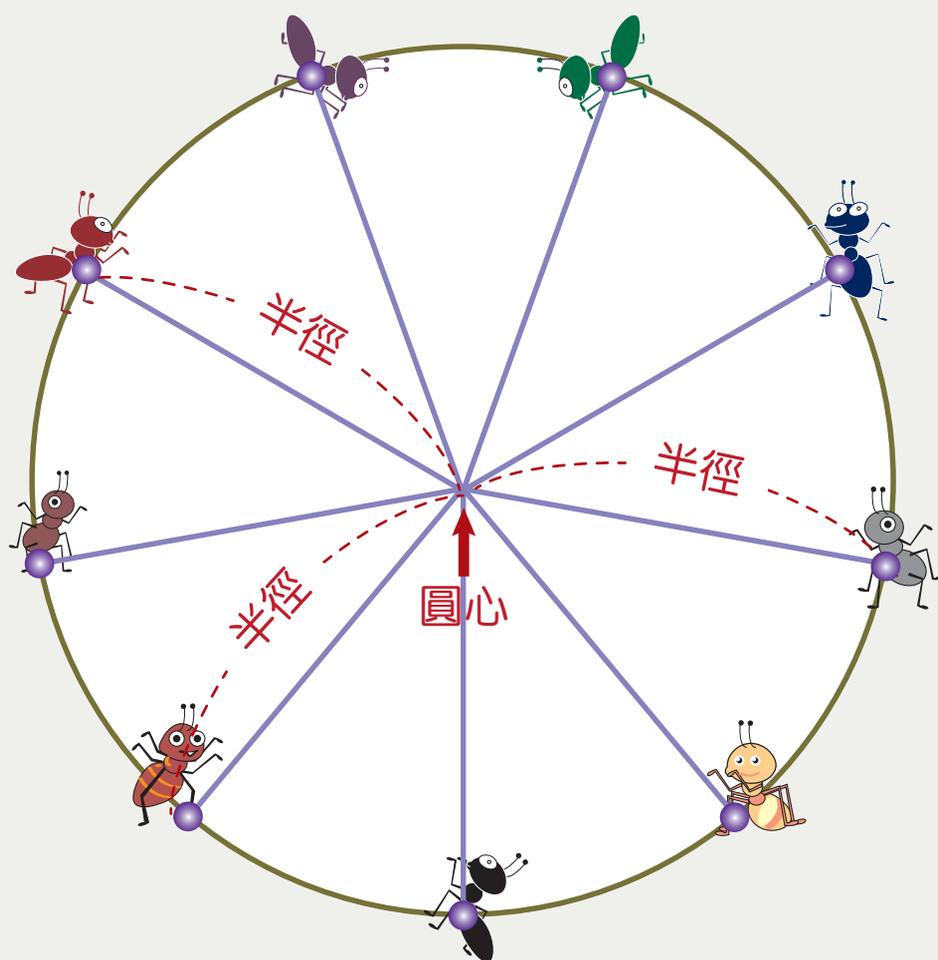
1. 小朋友，想一想，為什麼黑黑說這樣的比賽不公平？

任務二 聽了黑黑說的話，主考官面有難色，開始思考糖果要放在哪裡才公平？



小朋友，請你幫主考官的忙，在上面的圓形競技場中找出糖果放的位置，讓每一隻螞蟻到糖果的距離都一樣吧！

任務三 大家是不是都找到糖果放的位置了呢？我們一起來看看糖果放的位置和這個圓形競技場有什麼關係吧！



糖果放的位置就是這個圓的中心，圓的中心叫做**圓心**，從糖果到每一隻螞蟻的距離就是**圓心**到**圓周**的距離，這段距離叫做**半徑**，圓上的每一條半徑都一樣長。



教學活動說明

在競賽中要求公平，是人類的本能，本活動是以一個不公平的競賽情境，請學生思考「糖果放在哪裡才公平」，進而引出「圓心」的概念。

活動三 任務一

主要是希望學生理解並說出「從糖果到每隻螞蟻的距離不一樣」。根據實際教學的結果，學生很清楚不公平的原因，但學生會以「有的螞蟻離糖果比較遠，有的螞蟻離糖果比較近」描述，此時教師應追問：「螞蟻到糖果的什麼比較遠？螞蟻到糖果的什麼比較近？」讓學生說出「距離」一詞，這樣在下一個活動「找圓心 & 畫半徑」時會比較容易溝通。

活動三 任務二

主要是在促使學生找圓心，進行此活動時，教師先提問：「糖果要放在哪裡才公平？」實際教學結果，學生的答案有：放在中間、放在圓形競技場的中央、放在圓形競技場的正中心幾種說法，因為此活動以能溝通就好，所以無須要求學生一定得用「圓心」一詞回答。

當「糖果要放在圓形競技場的中央才公平」成為學生的共識後，教師便進一步請學生在課本上點出糖果的位置，教學時建議可用小組合作進行此活動，但記得提醒學生不能憑感覺點一個位置就

說是「圓形競技場的中央」，必須要讓人很明確看出並認同所點的位置無誤才行。

活動中，學生透過直尺測量並畫線標示長度（允許 2mm 的誤差），此時「圓的半徑」會自然呈現。在試教的過程中，有兩組的學生提出可不可以用對折的方法找圓心，因為此活動的重點是要讓學生找到圓心，並檢驗圓心到圓周的距離是不是一樣長，以便讓學生了解圓上的每條半徑都等長這個概念，所以用「圓形競技場無法對折」為由，請學生利用測量的方式找出圓心和半徑。

進行此活動時，建議教師可以刻意將圓放在偏離紙張的中央，如果學生真的要用對折的方式，這樣便可以檢視出學生是「對折紙張」還是「對折圓」。

活動三 任務三

主要在歸納說明「圓心」和「半徑」的概念。當各組都完成找圓心的任務後，在黑板揭示各組答案，並請學生評析哪一組找的位置最準確，最後教師再以圖解說明「圓心」和「半徑」的概念。

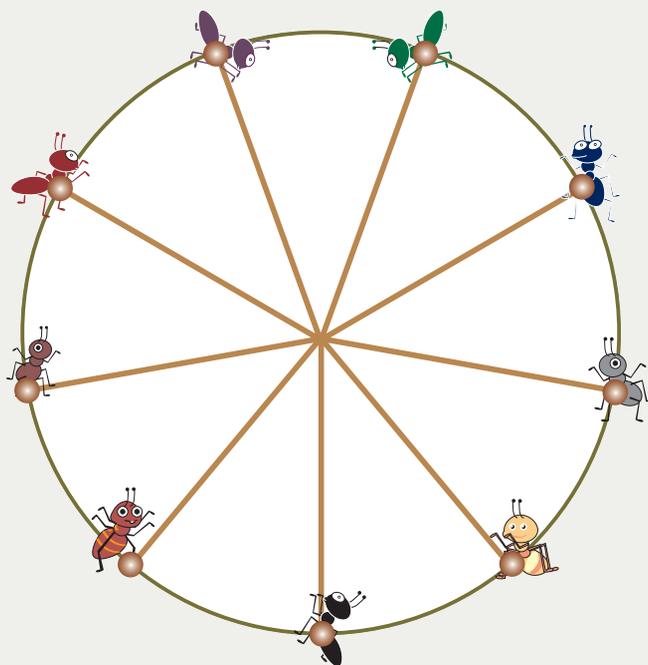
在活動三中包括兩個學習點：找圓心和發現半徑。雖然有兩個學習點，但它們是同時發生，因為圓心是立基於半徑等長的條件下才確定的。而這樣的活動設計是希望透過製造需求感和實作，讓學生找到圓心且發現半徑。此活動目的是要培養學生探索、擬定與執行解決問題計畫的素養。

學習點：直徑的特性

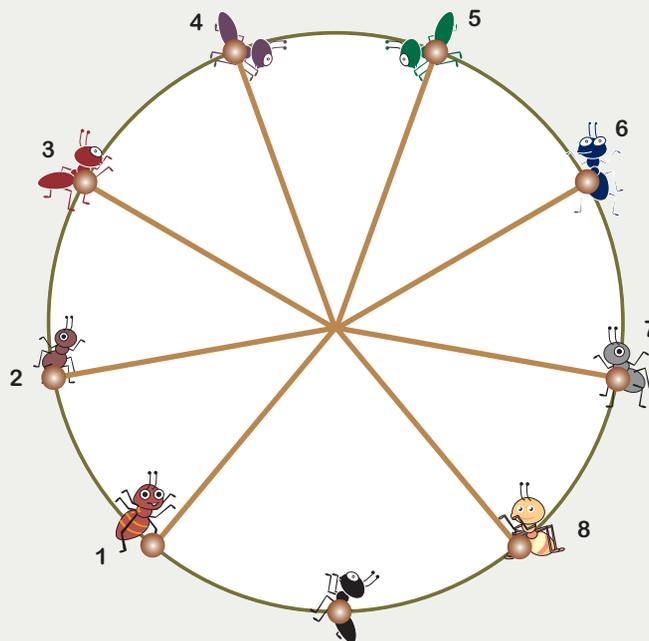
活動四 直徑的祕密

任務一 小朋友，主考官也找到糖果放的位置了，他用的方法和大家不一樣，我們一起來看看吧！

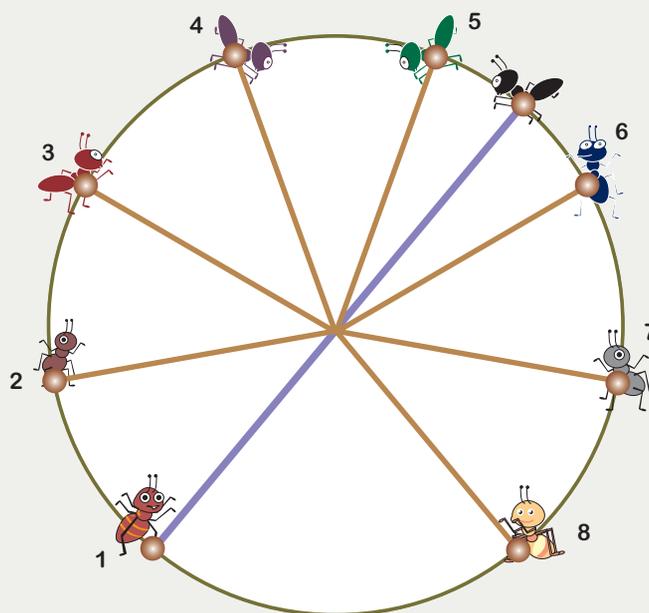
1. 主考官找來 9 條標有刻度的繩子，把繩子的一端綁在一起，請螞蟻們抓住繩子上刻度相同的位置，幾次調整後，螞蟻手中的繩子就成了以下的模樣。



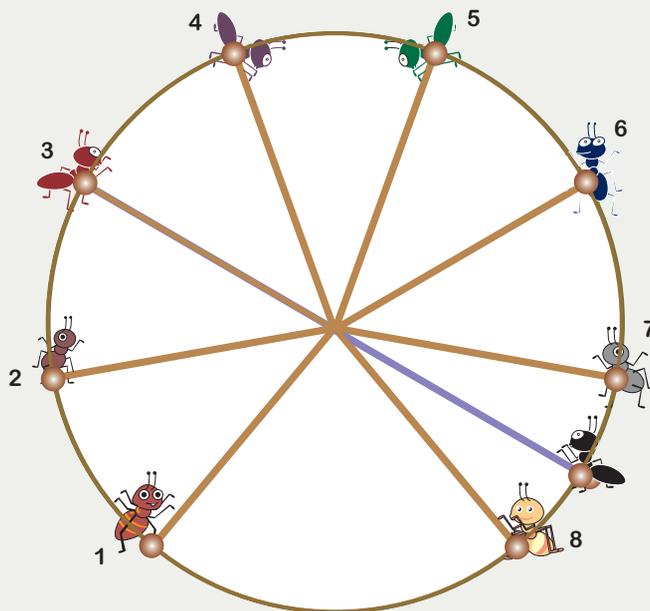
2. 但是，螞蟻黑黑不相信每隻螞蟻手中的繩子都一樣長，他決定一個一個檢驗，於是，他拿著自己手中的繩子，開始沿著圓周跑。



3. 黑黑依序跑到第 1 隻、第 2 隻、第 3 隻、第 4 隻、第 5 隻螞蟻的位置，確認繩子真的都一樣長，當他繼續往第 6 隻螞蟻位置跑時，正好跑到第 1 隻螞蟻的正對面，而且發現自己手中的繩子……。



4. 黑黑繼續往第 7 隻、第 8 隻以及剛才檢驗過的那幾隻螞蟻跑時，都發現相同的情形。



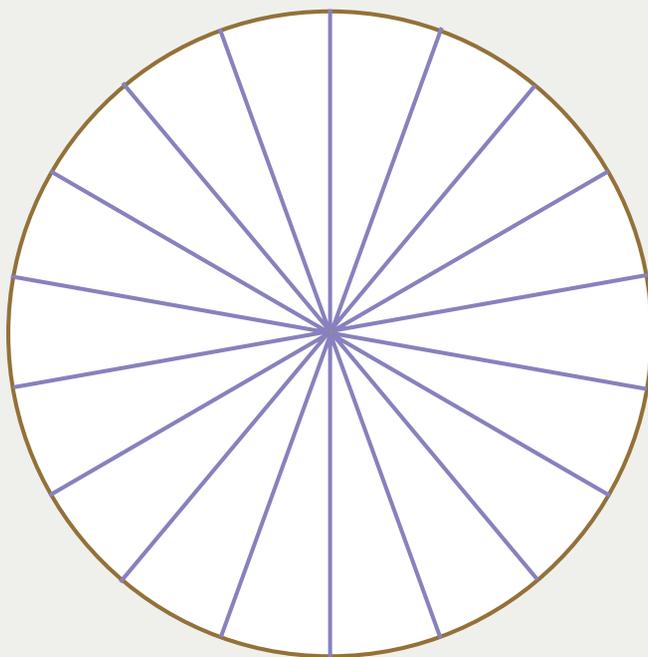
5. 黑黑立刻向主考官說出自己的發現，主考官聽完後，就宣佈牠過關了，小朋友，你知道黑黑發現了什麼嗎？請小組討論。



黑黑發現自己手中的繩子剛好都和對面螞蟻手中的繩子連成一條通過圓心的直線，而且這條直線的長度是半徑的兩倍。

任務二

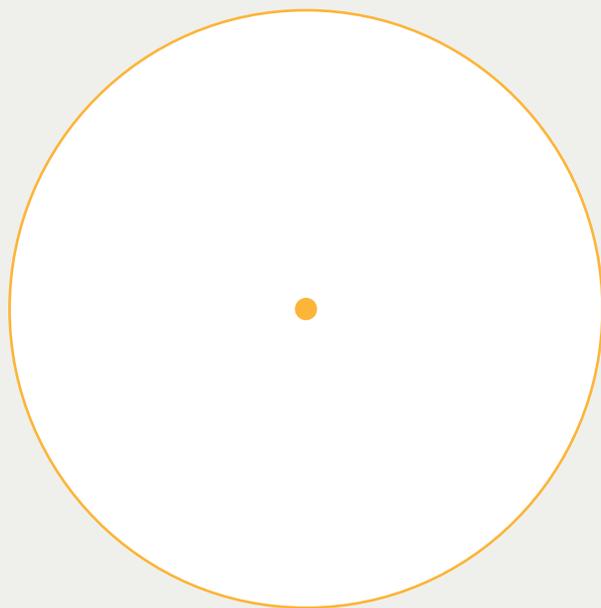
小朋友，如果請你將通過圓心，且兩端在圓周上的這些直線取一個名字，你想叫它們什麼？你知道以前的數學家們最後決定叫它什麼嗎？



通過**圓心**，
且**兩端**在**圓周**上的直線，
叫作**直徑**。



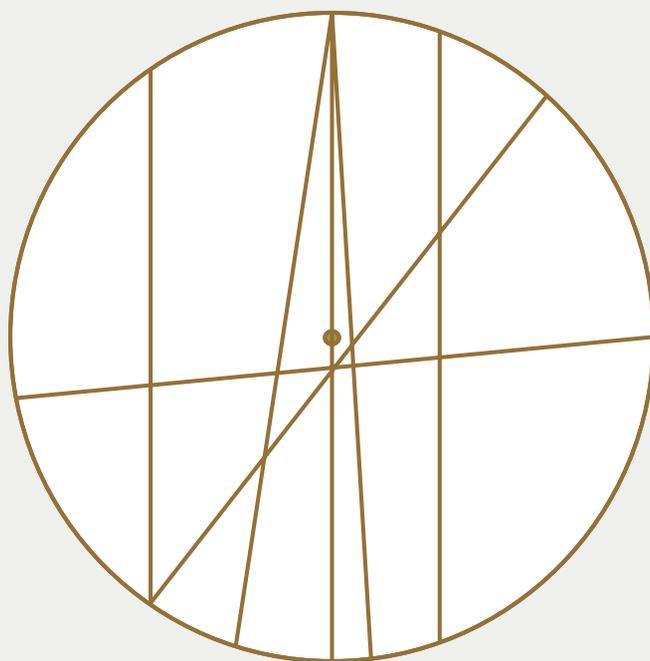
任務三 小朋友，請你在下面的圓上練習畫直徑，請問你最多可以畫出幾條直徑？



任務四 接著，主考官拿來一個上了鎖的寶盒，並告訴所有的參賽者：「進入下一關的通關卡，就放在盒子裡，競技場上的每一條繩子都綁著一把鑰匙，但是，只有綁在最長的那一條繩子的鑰匙，才能夠打開寶盒，請大家利用下面這張競技場的藏寶圖，用最快的速度拿回鑰匙。」

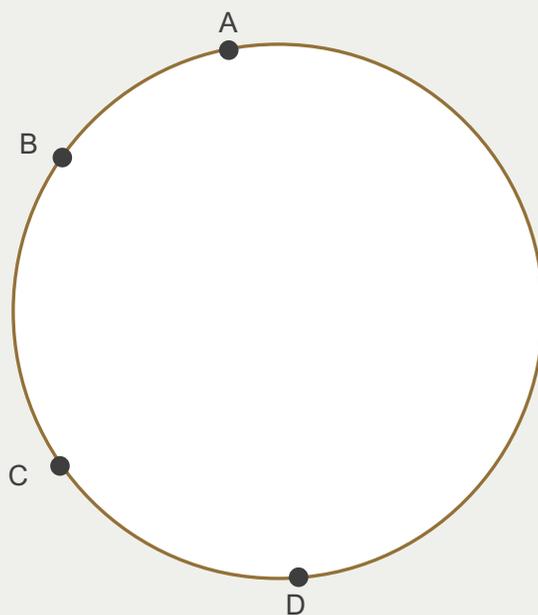


正當其他參賽者還在確認哪一條繩子最長時，黑黑已經拿回鑰匙，成功打開寶盒，取得過關卡。小朋友，你知道黑黑是在哪一條繩子拿到鑰匙的嗎？

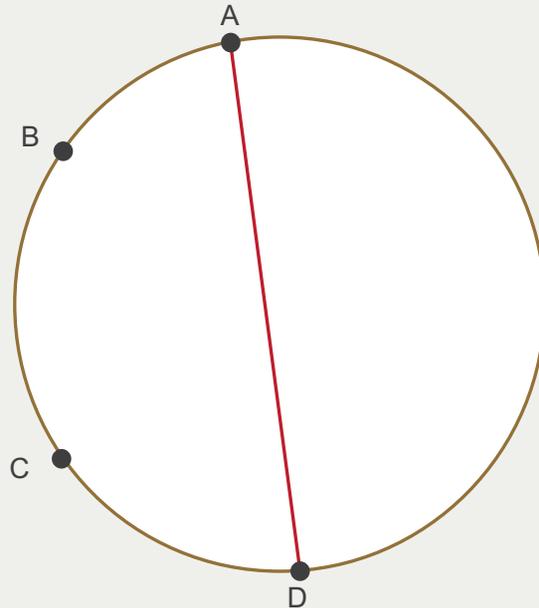


任務五 小朋友，我們來探究一下黑黑可以這麼快找到正確鑰匙的原因吧！

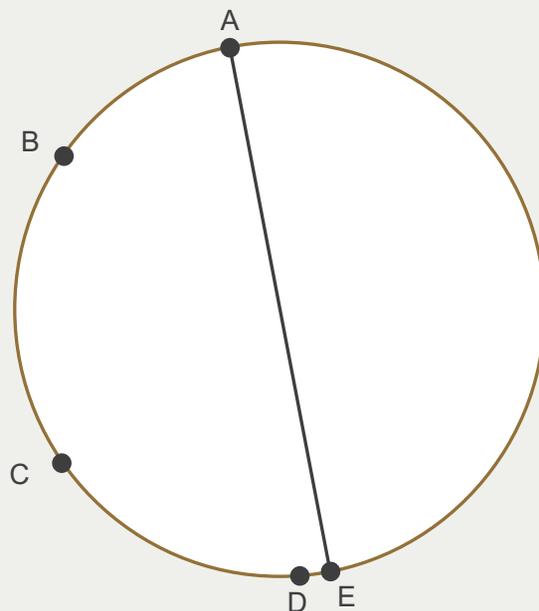
1. 首先，在圓上畫一點 A，再點 B、C 和 D，請問 AB 線段、AC 線段和 AD 線段誰比較長？（請在圖上畫出此三線段）



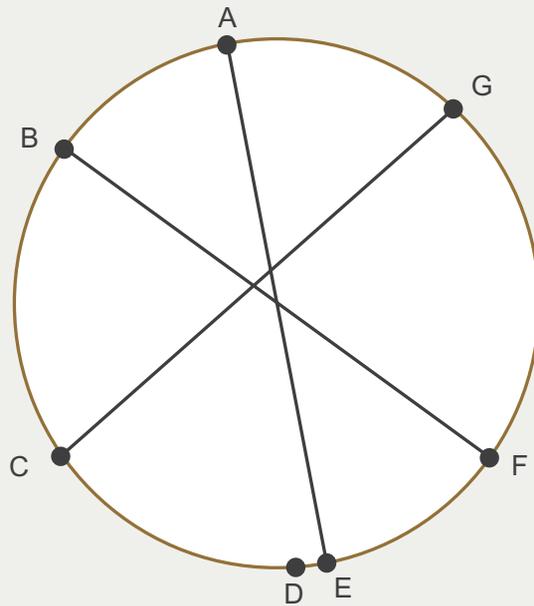
2. 試著在圓上找其他點，標上 E，使 AE 線段比 AD 更長，或甚至是最長。(請在圖上畫出 AE 線段)



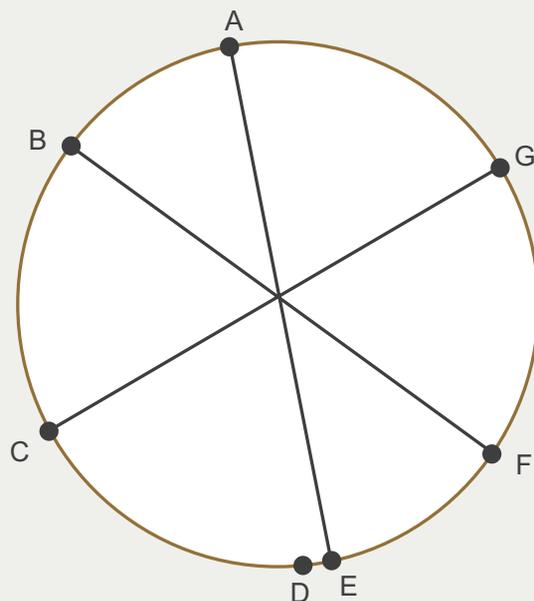
3. 恭喜你，找到 E 點。接下來，練習一下。在圓上找到一點 F，使 BF 線段是最長的那一條；在圓上找到一點 G，使 CG 線段是最長的那一條。(請在圖上畫出 BF 和 CG 線段)



4. 恭喜你，完成了。但老師看到有人畫出來的圖是這樣，感覺有點問題，請問，圖上的 CG 線段是最長嗎？你怎麼判斷的，請說說看。



5. 原來圓上最長的線段都會一樣長，所以 G 點應該怎麼修正呢？請用紅筆在上圖畫出正確的 CG 線段。
6. 小朋友，你修正後的 G 點，是不是和下圖一樣呢？現在請你細觀察下圖，並說說看圓上這些最長的線段有什麼特點？



7. 圓上這些最長的線段有許多特點，我們來聽聽睿恩、韶恩、秉澤的說法！



睿恩說：
這些線段會交於同一點，而且這一點就是圓心。



秉澤說：
每一個線段都會把這個圓平分成兩半。



韶恩說：
每一個線段都是這個圓的直徑。



通過圓心且兩端都在圓周上的直線最長，這條線就是直徑。

8. 小朋友，既然每條直徑都會通過圓心且把圓平分成兩半，那有什麼辦法可以快速找到直徑和圓心，以便解決我們在活動三找圓心費時不便的困擾？請說說看。

POINT

1. 太棒了！原來用對折的方法就可以快速找到這個圓的直徑，現在請你用對折的方式，找出DH這條直徑吧！（配合附件1）
2. 只要將圓對折兩次，折出兩條不重疊的直徑，它們相交的點就是圓心，現在請你練習用對折的方式找圓心吧！（配合附件2）



教學活動說明

透過小組討論和嘗試錯誤，在活動三我們已經找到糖果應該擺放的位置，在活動四中，主考官後來也用他的方法，找出了糖果應該放的位置，正當主考官以為問題已經解決了，螞蟻黑黑卻提出要檢驗大家手中繩子是不是一樣長，沒想到在驗證的過程中，除了確認每隻螞蟻手中的繩子都一樣長，他竟然有另外的發現，而且這個新發現，還是另一個圓的構成要素——直徑。

本活動搭配投影片動畫，請學生觀察動畫所透露出來的訊息，為避免有的學生無法理解訊息要表達的概念，以及觀察的重點過於枝微末節，無法看到真正的重點，建議在課堂實施可先請小組討論後再各組派一人發表。根據筆者試教三個班級的結果，各班學生都能找到「藍色的線是半徑的兩倍」、「藍色的線通過圓心」兩個特性，有一班學生甚至還找到了「藍色的線把圓平分成兩半」，接下來就是歸納學生的說法並為這條藍色的線命名，至此，便完成了活動四的第一個課程重點。

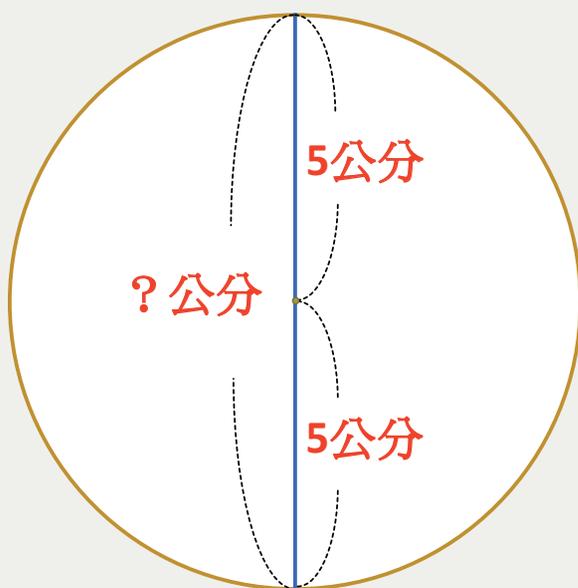
緊接著，小螞蟻黑黑接到了下一個考驗，他又再次順利過關，而任務五的課程設計，是要探究小螞蟻黑黑快速過關的原因，讓學生從嘗試錯誤的實作過程，找到「圓上最長的線段」。過程中，老師技巧性提出錯誤作法的困擾，引導學生思考找出修正方法並畫出正確的線段，目的是要學生透過畫出「圓上最長的線段」的過程，發現這些線段都會交於同一點，進而歸納出圓上最長的線段相交的這一點就是圓心，這些最長的線段就是直徑，呼應了本活動的第一個課程重點——所有的直徑都通過圓心這個概念，最後更以「有效率」為需求，請學生快速找出圓的直徑和圓心，解決了活動三找圓心費時不便的困擾。

活動四是以數學實驗的方式進行，這樣的設計有兩個目的，其一是要培養學生的好奇心並能觀察規律進而推論的能力；其二是要培養學生實作、修正、歸納、應用的能力。

學習點：用算式表示直徑和半徑的關係

活動五 直徑和半徑的關係

任務一 小朋友，想想看，這個圓的直徑是多少？
請小組討論一下。

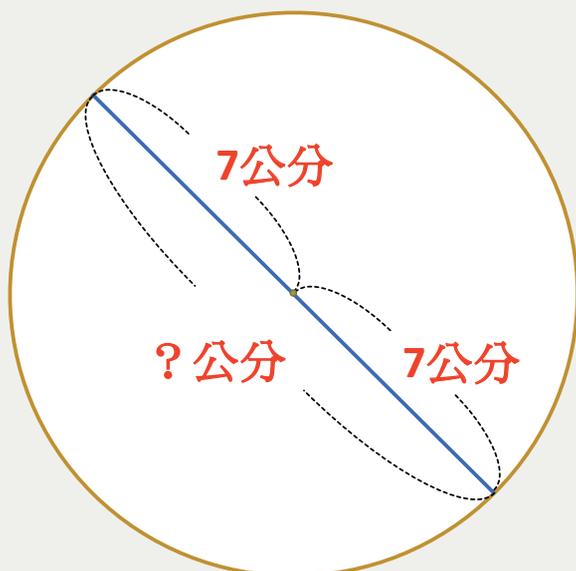


根據剛剛的討論結果，我們可以用算式表示直徑和半徑的關係：

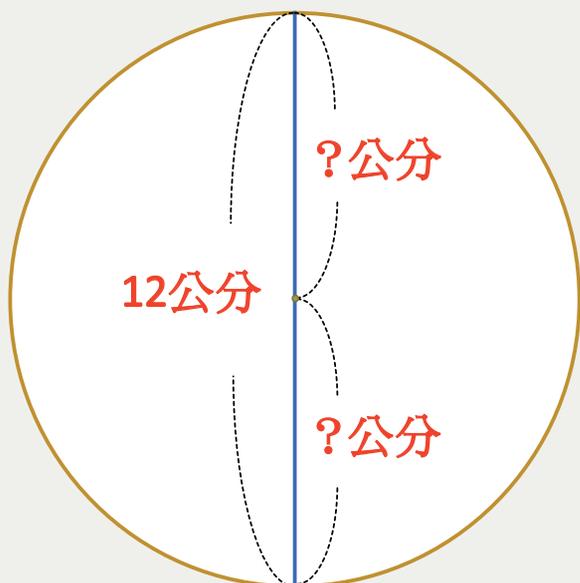
$$\text{半徑} + \text{半徑} = \text{直徑}$$

$$\text{半徑} \times 2 = \text{直徑}$$

1. 練習一下，請算出下面這個圓的直徑是多少？



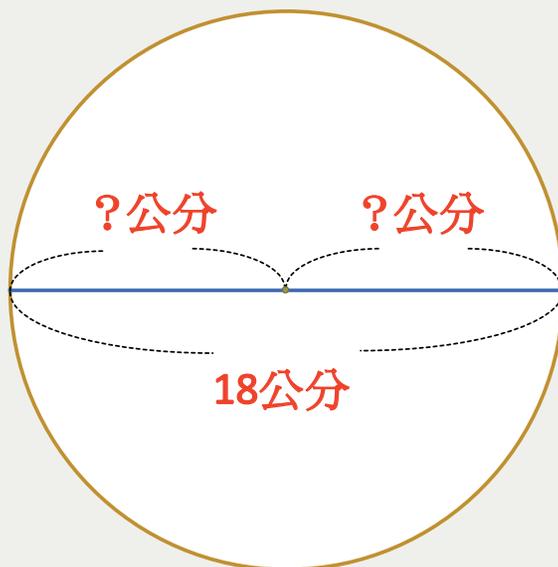
任務二 小朋友，想想看，這個圓的半徑是多少？
請小組討論一下。



根據剛剛的討論結果，我們可以用算式表示直徑和半徑的關係：

$$\text{直徑} \div 2 = \text{半徑}$$

1. 練習一下，請算出下面這個圓的直徑是多少？



教學活動說明

筆者曾擔任高年級導師十年，當教到「圓的周長與面積」單元時，常常發現學生對於直徑和半徑的定義及兩者的關係，總是混淆不清，甚至有一種完全沒上過「圓」課程的錯覺。因此，特別設計

了活動五，希望以解題為訴求，讓學生透過小組討論並發表作法，再以學生的答案歸納出解題策略，進而找出直徑和半徑的關係式。

在教學的過程中，發現三個班級的共同現象都是，若不強求用算式表徵，學生的通過率百分之百，但是若規定用算式表示，學生在「已知半徑求直徑」的解題表現，加法算式和乘法算式的比例是 1:1，這結果顯示了雖然學生知道直徑是半徑的 2 倍，但是在解題上，仍有一半的學生習慣用加法解題，還沒進階到用乘法表示「倍」的關係。

學生在「已知直徑求半徑」的解題表現，減法算式和除法算式的使用比例是 2:1，再進一步詢問學生用減法解題的原因，學生都說因為 $6 + 6 = 12$ ，所以 $12 - 6 = 6$ ，這結果顯示了學生用「加減互逆」的概念解題，而三個班級的學生雖然都有三分之一的組別寫出除法算式，但是再次追問學生後，發現因為是小組討論，多數學生只是順從了這個答案，並不知為何可以用除法解題，這結果顯示了學生還沒有「乘除互逆」和「用除法表示平分的結果」兩個概念。實際上，真正能用除法算式表示直徑和半徑的關係，各班約莫都只有五分之一的學生。這樣的試教結果，或許可以提供老師在命題或批改時的參考。

此活動目的是要培養學生具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力。

學習點：畫圓工具的使用

活動六 圓形噴水池怎麼蓋？

任務一

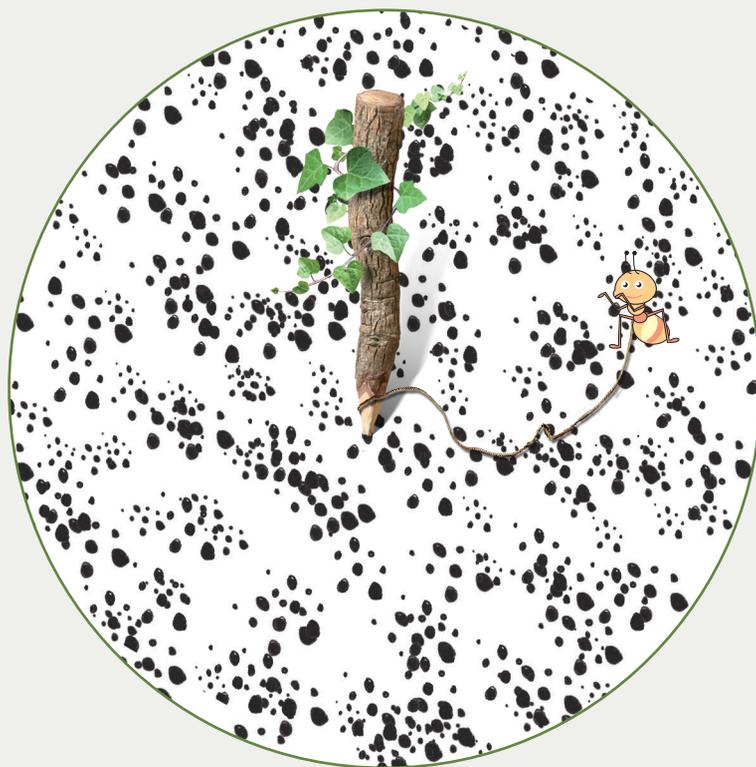
全部的小螞蟻，只有黑黑到達最後一關。主考官這次出的考題是，要在新皇宮庭院裡的指定位置擺一座 3 公尺高的噴水柱，然後以噴水柱為正中心，蓋一座直徑 20 公尺的圓形水池。

黑黑煩惱著這麼大的噴水柱和圓形水池該怎麼蓋？於是在城堡各地四處逛逛，想找出可行的辦法。

走著走著，黑黑看見一隻螞蟻被綁在木樁上，原來牠跑到黑色墨水池玩水，把整個城堡內搞得髒亂不已，所以被國王處罰綁在木樁上，不准亂跑。



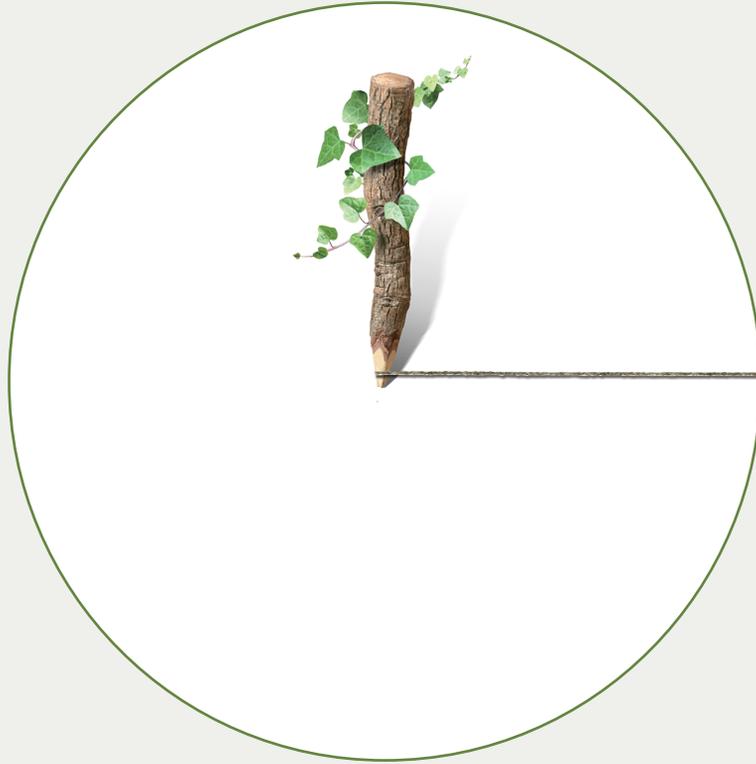
1. 黑黑看著被綁住的小螞蟻一直繞著木樁跑來跑去，最後竟然出現了一個神奇的圖案。小朋友，你知道是什麼神奇圖案嗎？



任務二

這個圖案給了黑黑靈感，牠立刻找來一根木樁和一條繩子，並成功在新皇宮的庭院中，畫出了這座圓形噴水池的施工範圍，順利將圓形噴水池建造完成。

1. 小朋友，下面是黑黑畫出的圓形噴水池施工範圍，請問，木樁的位置以及繩子，和這個圓形有什麼關係？請小組討論一下。



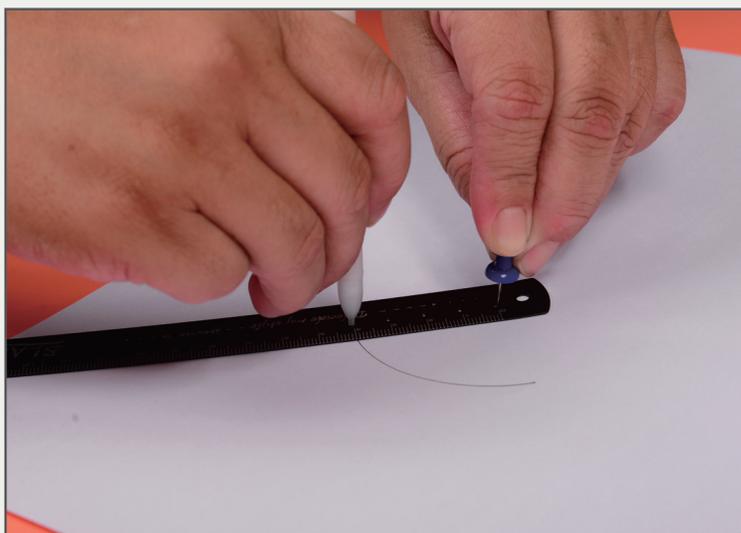
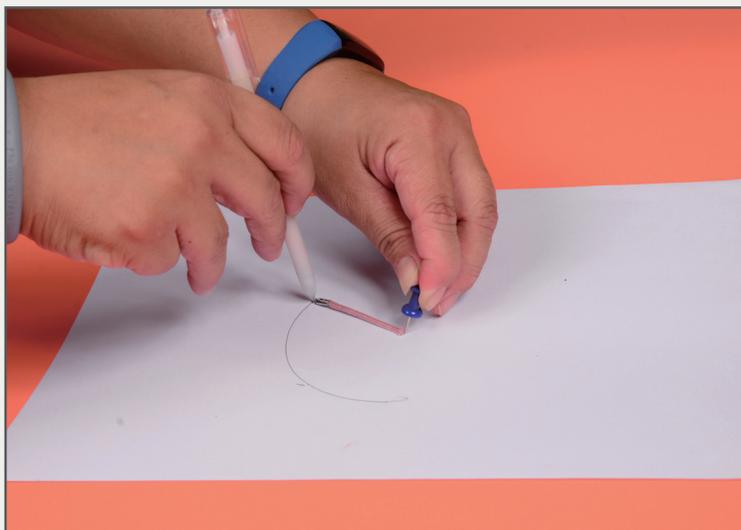
POINT

根據討論的結果，我們可以知道：

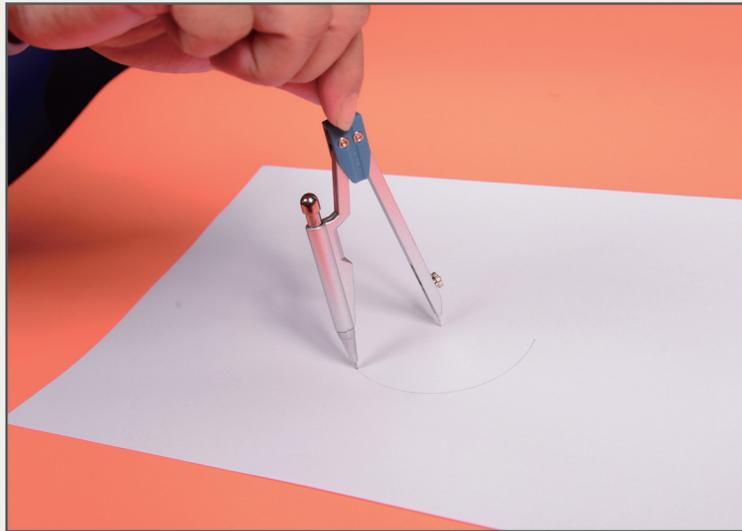
1. 木樁的位置就這個圓的圓心，繩子就是這個圓的半徑。
2. 將繩子拉直，繞著木樁走一圈，就可以畫出一個圓。



2. 老師準備了兩種不同的畫圓工具，請各組練習畫圓吧！



3. 前面兩種工具雖然都可以畫圓，但是一個人不好操作，所以後來就發明了圓規。現在請你仔細觀察下面的圖片，並回答問題。



- (1) 圓規的針尖的位置是圓的什麼？
(2) 打開圓規，針尖到鉛筆的直線距離是圓的什麼？

POINT

用圓規畫圓的步驟：

步驟一：張開圓規，在尺上量出半徑長。

步驟二：固定有針的一腳當圓心。

步驟三：轉動有筆的一腳畫圓。

注意：轉動的過程，圓規張開的角度都不能改變。



教學活動說明

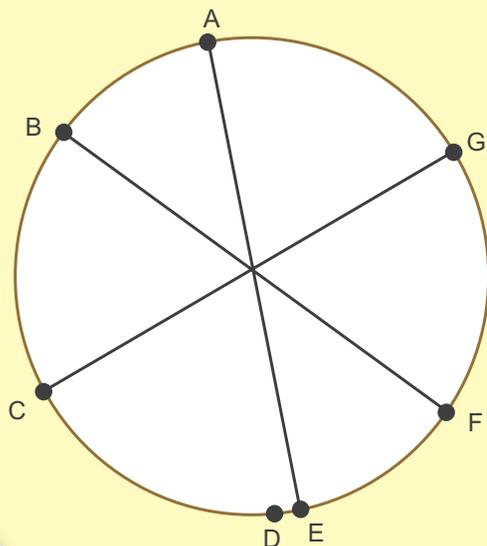
活動六的設計，希望透過故事隱喻，鋪陳畫圓的工具的由來，接著利用施工圖讓學生討論木樁、繩子和圓的關係，並歸納出圓的畫法和操作型定義，最後是畫圓工具的練習。此活動目的是要培養學生使用工具，進而具備感受藝術作品中的數學形體或式樣的素養。

數學小知識

國小必備的圓規，也是發明於羅馬時代，更被收藏於大英博物館，最初兩端都是鋒利狀，容易刮傷紙而不易繪畫，直到 18 世紀將另一端改成鉛筆，才更加便利。材料有黃銅，鍍銀，鋁，鋼，木材等，更有些圓規上還有特殊裝飾，非常有趣。

(內容取自 http://taiwan.sharelife.tw/article_aid-3110.html)

附件 1



附件 2

