



二次方根的意義

翰林版(一)2-1

單	元	內	容
1根號的意義 n如果 $x \geq 0$，且 $x^2 = a$，則 x 可以表示為 $\sqrt{a}$，讀作根號 a。 n$\sqrt{a}$ 可視為$\sqrt[2]{a}$，用指數來表示可寫為$a^{\frac{1}{2}}$。 【說明】一正方形的面積為 16 平方公分，則邊長可以表示為$\sqrt{16} = 4$ 公分。 【說明】一正方形的邊長為$\sqrt{7}$ 公分，則面積為$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = (\sqrt{7})^2 = 7$ 平方公分。			
2平方根的意義 n如果 $a \geq 0$，當 $x^2 = a$ 時，則 x 稱為 a 的平方根。 ※ 正數的平方根都有兩個，0 的平方根是 0，負數沒有平方根。 【說明】 $(-2)^2 = 4$ 所以 2 是 4 的平方根。 $(2)^2 = 4$ 所以 2 是 4 的平方根。 故 ± 2 都是 4 的平方根。 【說明】 (1).4 的平方根依前述的定義是 $x^2 = 4$ 的解，也就是 $\pm\sqrt{4} = \pm 2$。 (2).$\sqrt{4}$ 常稱作 4 開根號或開方是運算中的一種，只有一個結果，即$\sqrt{4} = 2$。			
範	例	講	解
Ex1. (1).正方形面積為 121，則其邊長為【 】。 (2).正方形面積為 19，則其邊長為【 】。 (3).正方形面積為 a，則其邊長為【 】。		Hw1. (1).正方形面積為 19600，則其邊長為【 】。 (2).正方形的面積為 361，則其周長為【 】。 (3).正方形面積為 $a^2(a>0)$，則其周長為【 】。	
Ex2. (1).若 $x^2 = 169$，則 $x =$【 】。 (2).若 $m^2 = 23$，且 $m < 0$，則 $m =$【 】。		Hw2. (1).若甲數 < 0，且（甲數）$^2 = 19$，則甲數 $=$【 】。 (2). 若 $m^2 = 17$，且 $m > 0$，則 $m =$【 】。	

Ex3. (1). $\sqrt{8}$ 的相反數為【 】。 (2). $-\sqrt{13}$ 的相反數為【 】。 (3). 若甲數 + 乙數 = 0，且甲數 = $\sqrt{5}$，則乙數 = 【 】。	Hw3. (1). $\sqrt{3}$ 的相反數為【 】。 (2). $-\sqrt{10}$ 的相反數為【 】。 (3). 若甲數 + 乙數 = 0，且甲數 = $\sqrt{7}$，則乙數 = 【 】。
Ex4.請將「>、=、<」填入下列空格中： (1). $\sqrt{8}$ 【 】 3 (2). $\sqrt{50}$ 【 】 7 (3). $\sqrt{150}$ 【 】 13 (4). $\sqrt{841}$ 【 】 29	Hw4.請將「>、=、<」填入空格中： (1). $\sqrt{143}$ 【 】 12。 (2). $\sqrt{160}$ 【 】 13。 (3). $\sqrt{48}$ 【 】 7。 (4). 11 【 】 $\sqrt{120}$。
Ex5.介於$\sqrt{20}$與$\sqrt{50}$之間的整數有哪些？	Hw5. $\sqrt{165}$、$\sqrt{167}$、$\sqrt{171}$、$\sqrt{179}$、$\sqrt{181}$、 $\sqrt{183}$、$\sqrt{189}$、$\sqrt{195}$、$\sqrt{198}$、$\sqrt{203}$ 上 列 10 個數中，介於 13 與 14 之間的有幾個？
Ex6.求下列各數的平方根： (1). 1 (2). 6 (3). 144 (4). $\frac{49}{16}$ (5). 6.76	Hw6.求下列各數的平方根： (1). 64 (2). 1225 (3). $\frac{27}{75}$ (4). 1.5 (5). -25

3 十分逼近法

n 十分逼近法求 $\sqrt{n}$ 的近似值：

1. 先確認 $\sqrt{n}$ 在那 a、b 兩個整數之間，可以求得整數部分。
2. 將 a、b 間分成十等分，並計算每個數的平方值。
3. 找出 n 介於那兩個十等分點之間，可以求得十分位部分。
4. 再將此兩點間的十分位分成十等

【說明】求 $\sqrt{5}$ 到小數第一位的近似值。

1. $(\sqrt{5})^2=5$ $2^2=4$ $3^2=9$
 $\therefore 2 < \sqrt{5} < 3$ 即 $\sqrt{5}=2.\dots\dots$
2. 將 2 和 3 之間分成十等分 2、2.1、2.2、2.3、2.4、2.5、2.6、2.7、2.8、2.9、3

$$2^2=4$$

$$2.6^2=6.76$$

分，並計算每個數的平方值。

5. 找出 n 介於那兩個十等分點之間，可以求得百分位部分。
6. 重複前述步驟，可以上依實際需要求到必需的精確小數。

$$\begin{array}{ll} 2.1^2=4.41 & 2.7^2=7.29 \\ 2.2^2=4.84 & 2.8^2=7.84 \\ 2.3^2=5.29 & 2.9^2=8.41 \\ 2.4^2=5.76 & 3^2=9 \\ 2.5^2=6.25 & \end{array}$$

$(\sqrt{5})^2$ 在 4.84 和 5.29 之間

$$\therefore 2.2 < \sqrt{5} < 2.3 \text{ 即 } \sqrt{5} = 2.6\cdots$$

3. 將 2.2 和 2.3 之間分成十等分

$$\begin{array}{l} 2.2^2=4.84 \\ 2.21^2=4.8841 \\ 2.22^2=4.9284 \\ 2.23^2=4.9729 \\ 2.24^2=5.0176 \end{array}$$

$(\sqrt{5})^2$ 在 4.9729 和 5.0176 之間

$$\therefore 2.23 < \sqrt{5} < 2.24 \text{ 即 } \sqrt{5} = 2.23\cdots$$

四捨五入可得到 $\sqrt{5} \approx 2.2$

4 乘方開方表

- n** 乘方開方表的用法： N 行代表要查的數值，向右可以查出 N^2 、 $\sqrt{N}$ 、 $\sqrt{10N}$ 。

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
1	1	1.000 000	3.162 278
2	4	1.414 214	4.472 136
3	9	1.732 051	5.477 226
4	16	2.000 000	6.324 555
5	25	2.236 068	7.071 068
6	36	2.449 490	7.745 967
7	49	2.645 751	8.366 602
8	64	2.828 427	8.944 272
9	81	3.000 000	9.486 833
10	100	3.162 278	10.000 000

【說明】如果要查 $\sqrt{5}$ ，先找到 $N=5$ 再對到 $\sqrt{N}$ 可以找到 $\sqrt{5} \approx 2.236068$ 。

【說明】如果要查 $\sqrt{50}$ ，先找到 $N=5$ 再對到 $\sqrt{10N}$ 可以找到 $\sqrt{50} \approx 7.071068$ 。

範

例

講

解

Ex7.以十分逼近法求 $\sqrt{11}$ 的近似值到小數第一位時，請依下列各小題所提供的數據，按步驟回答下列問題：

(1). 因為 $1^2=1$ ， $2^2=4$ ， $3^2=9$ ， $4^2=16$ ，所

Hw7.利用電器算估算 $\sqrt{15}$ 的值在哪兩個數之間？

(1). 因為 $1^2=1$ ， $2^2=4$ ， $3^2=9$ ， $4^2=16$ ， $5^2=25$ ， $6^2=36$ ，所以 $[\quad] < \sqrt{15} < [\quad]$ 。(整數)

以 $\sqrt{11}$ 在哪兩個連續整數之間？

答：[] $< \sqrt{11} <$ []。

(2).因為 $(3.1)^2 = 9.61$ ， $(3.2)^2 = 10.24$ ， $(3.3)^2 = 10.89$ ， $(3.4)^2 = 11.56$ ，所以 $\sqrt{11}$ 在哪兩個連續一位小數之間？

答：[] $< \sqrt{11} <$ []。

(3).因為 $(3.31)^2 = 10.9561$ ， $(3.32)^2 = 11.0224$ ， $(3.33)^2 = 11.0889$ ，所以 $\sqrt{11}$ 在哪兩個連續二位小數之間？

答：[] $< \sqrt{11} <$ []。

(4).以四捨五入法取 $\sqrt{11}$ 的近似值到小數第一位得 []。

(2).因為 $(3.1)^2 = []$ ， $(3.2)^2 = []$ ， $(3.3)^2 = []$ ， $(3.4)^2 = []$ ， $(3.5)^2 = []$ ， $(3.6)^2 = []$ ， $(3.7)^2 = []$ ， $(3.8)^2 = []$ ， $(3.9)^2 = []$ ，所以 [] $< \sqrt{15} <$ []。(小數第一位)

(3).因為 $(3.81)^2 = []$ ， $(3.82)^2 = []$ ， $(3.83)^2 = []$ ， $(3.84)^2 = []$ ， $(3.85)^2 = []$ ， $(3.86)^2 = []$ ， $(3.87)^2 = []$ ， $(3.88)^2 = []$ ， $(3.89)^2 = []$ ，所以 [] $< \sqrt{15} <$ []。(小數第二位)

(4). $\sqrt{15}$ 的近似值為 []。(四捨五入到小數第一位)

Ex8.利用附表查出下列各數的近似值：

N	N ²	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
18	324	4.242	13.416
23	529	4.795	15.165
29	841	5.385	17.029

(1). $\sqrt{230} \div ?$

(2). $\sqrt{18} \div ?$

Hw8.利用附表查出下列各數的近似值：

N	N ²	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
18	324	4.242	13.416
23	529	4.795	15.165
29	841	5.385	17.029

(1). $\sqrt{290} \div ?$

(2). $\sqrt{23} \div ?$

5 有理數的意義

n 如果一個數(實數)可以寫成 $\frac{q}{p}$ 的分數型態，其中p和q都必需是整數，這樣的數就稱為有理數；反之如果一個數(實數)不可以寫成 $\frac{q}{p}$ 的分數型態則稱為無理數。

【說明】

$\frac{1}{3}$ 、0.3、-2、0 都是有理數。

π 、 $\sqrt{7}$ 、 $-\sqrt{5}$ 都是無理數。

6 根號的化簡

n 如果 $a \geq 0$，則 $\sqrt{a^2} = a$。 n 如果 $a \geq 0$，則 $(\sqrt{a})^2 = a$。	【說明】 $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ $(\sqrt{2})^2 = 2$
範 例	講 解
Ex9. 求下列各數的值： (1). $\sqrt{25} = ?$ (2). $\sqrt{529} = ?$ (3). $\sqrt{0.36} = ?$ (4). $\sqrt{\frac{196}{225}} = ?$ (5). $\sqrt{5\frac{4}{9}} = ?$ (6). $\sqrt{\frac{27}{12}} = ?$	Hw9. 計算下列各數： (1). $\sqrt{64} = ?$ (2). $\sqrt{484} = ?$ (3). $\sqrt{3.61} = ?$ (4). $\sqrt{\frac{16}{121}} = ?$ (5). $\sqrt{1\frac{11}{25}} = ?$ (6). $\sqrt{\frac{72}{50}} = ?$
Ex10. 在下列空格中填入適當的數： (1). $(-\sqrt{18})^2 = ?$ (2). $(\sqrt{\frac{3}{5}})^2 = ?$ (3). $(\sqrt{16})^2 = ?$ (4). $(-\sqrt{1.3})^2 = ?$ (5). $-(\sqrt{10})^2 = ?$	Hw10. 在下列空格中填入適當的數： (1). $(-\sqrt{6})^2 = ?$ (2). $(\sqrt{\frac{2}{3}})^2 = ?$ (3). $(\sqrt{17})^2 = ?$ (4). $(-\sqrt{0.25})^2 = ?$ (5). $-(\sqrt{2.6})^2 = ?$
Ex11. 在下列各數中那些是無理數： 0、$\sqrt{12}$、$-\frac{3}{5}$、$\frac{\sqrt{5}}{2}$、$\frac{1}{\sqrt{7}}$	Hw11. 下列各數：$\sqrt{6}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{16}$、$\sqrt{20}$、 $\sqrt{25}$、$\sqrt{30}$、$\sqrt{36}$、$\sqrt{40}$ 共有幾個是有理數？
綜 合	應 用
Ex12. (1). 求 $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = ?$ (2). 若 $2 < x < 3$，則 $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = ?$	Hw12. (1). 求 $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$ (2). 設 $4 < x < 10$，且 $\sqrt{(x-12)^2} + \sqrt{(2x-7)^2} = 10$，則 $x = ?$
Ex13. 根據下表，求下列各數的值：$\sqrt{25600}$、$\sqrt{0.0256}$	Hw13. 根據此表：求 $\sqrt{3.61 \times 10^8} = ?$；$\sqrt{\frac{1.96}{10000}} = ?$

N	11	12	13	14	15	16
N ²	121	144	169	196	225	256
N	17	18	19	20	21	22
N ²	289	324	361	400	441	484

N	11	12	13	14	15	16
N ²	121	144	169	196	225	256
N	17	18	19	20	21	22
N ²	289	324	361	400	441	484

Ex14. $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$,
試比較 a 、 b 、 c 三數的大小關係。

Hw14. 若 $a = 2\sqrt{15}$, $b = 3\sqrt{7}$, $c = 4\sqrt{3}$, 試比較 a 、 b 、 c 的大小關係。

Ex15

- (1). 若 $2x+4$ 的負平方根是 -4 , 求 x 之值。
- (2). 若 $x+y$ 的負平方根是 -2 , 且 $x-y$ 的正平方根是 4 , 求 x 與 y 的值。
- (3). 求 $\sqrt{625}$ 的平方根。
- (4). 若 $(3x+2)^2$ 的平方根為 ± 13 , 則 $x = ?$

Hw15.

- (1). -5 是 $9+2x$ 的一個平方根 , 則 : $x = ?$
 $3x+1$ 的平方根是多少?
- (2). 若 -2 是 $3x+2y$ 的一個平方根 ; 且 $2x-y+4$ 的平方根為 ± 3 , 求 : $x = ?$ $y = ?$
- (3). 求 $\sqrt{81}$ 的平方根。
- (4). 若 $(4x+3)^2$ 的平方根是 ± 11 , 求 $x = ?$

Ex16. 若 $\sqrt{350} : 18.7$, 欲使 $\sqrt{350a}$, $\sqrt{\frac{350}{b}}$,
 $\sqrt{350+c}$, $\sqrt{350-d}$ 均為正整數 , 當 a ,
 b , c , d 均為最小正整數時 , 則 $a+b+c+d = ?$

Hw16. 設 a , b , c , d 均為正整數 , 若 $\sqrt{720} : 26.8$, 欲使 $\sqrt{720 \times a}$, $\sqrt{\frac{720}{b}}$,
 $\sqrt{720+c}$, $\sqrt{720-d}$ 均為正整數 , 當 a ,
 b , c , d 均為最小時 , 求 $a+b+c+d = ?$

Ex17. 求 $\sqrt{64} - \sqrt{49} + (-\sqrt{81}) - (-\sqrt{100})$ 的值。

Hw17. $\sqrt{729} - \{ \sqrt{529} + (-\sqrt{225}) \times (-\sqrt{64}) - (-\sqrt{484}) \times \sqrt{196} \} = ?$