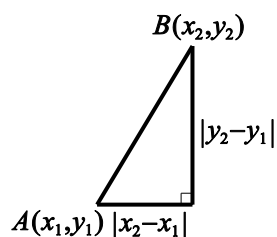


3-1 圓方程式

銜接 123 平面上兩點之距離公式

坐標平面上兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 之距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

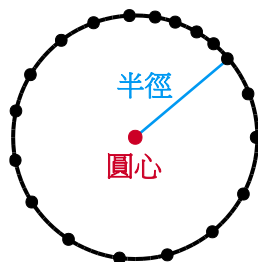


銜接 Q&A

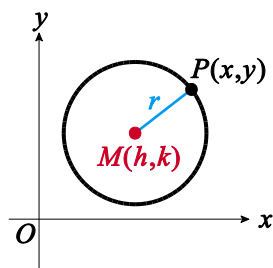
1. 坐標平面上，求 $A(0, 0)$ 、 $B(3, 4)$ 兩點的距離為_____。
2. 坐標平面上，求 $A(-2, -7)$ 、 $B(3, 5)$ 兩點的距離為_____。

重點 1 圓方程式

1. 定義：在同一平面上與一定點等距離之所有點所成的圖形，稱為圓。此定點稱為圓心，圓心與圓上任一點的距離稱為半徑。



2. 圓的標準式：已知圓上任一點 $P(x, y)$ ，若以 $M(h, k)$ 為圓心， r 為半徑，則 $\overline{MP} = r$
 $\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$ ，故圓方程式為 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 。



例 已知圓心為 $M(1, 2)$ ，半徑為 3，則圓方程式為 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ ，
即 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 。

配合課本例 2

試求以 $(-3, 4)$ 為圓心，半徑為 5 的圓方程式。

試求以 $(5, 2)$ 為圓心，半徑為 8 的圓方程式。

類題



- (1) 試求以 $(-4, 3)$ 為圓心，2 為半徑的圓方程式為_____。 [松山工農]
- (2) 龔同學想要求出一個圓方程式的圓心與直徑，但他將方程式中 x 誤看成 y ， y 誤看成 x ，結果得到圓心坐標為 $(1, 2)$ ，直徑為 4。試問原本题目的圓方程式為何？
- (A) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ (C) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
- (D) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 。答_____ [112(B)] 答對率 31.02%

配合課本例 1

根據下列各圓的方程式，試求該圓的圓心和半徑。

(1) $x^2 + y^2 = 9$ 。

(2) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ 。

根據下列各圓的方程式，試求該圓的圓心和半徑。

(1) $x^2 + y^2 = 16$ 。

(2) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 49$ 。

類題



- (1) 圓的方程式 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$ ，試求該圓的圓心為_____。 [新民高中]

(2) 圓方程式 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 3$ ，若此圓圓心 (a, b) ，半徑 c ，則 $a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[高雄高商]

3

老師講解

求圓的方程式

學生練習

配合課本例 3

設平面上兩點 $A(3, 6)$ 、 $B(-1, 2)$ ，試求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式。

設平面上兩點 $A(3, 4)$ 、 $B(1, 2)$ ，試求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式。

類題



(1) 已知坐標平面上兩點 $A(4, 0)$ 、 $B(0, -6)$ ，求出以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式

 。(寫成標準式)

[南港高工]

(2) 設 $A(5, 2)$ 與 $B(-1, -6)$ 為平面上兩點。若 $\overline{AB}$ 為圓 C 的直徑，則圓 C 的方程式為何？

(A) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 100$ (B) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$ (C) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 100$

(D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$ 。答

[109(A)] 答對率 33.89%

重點 **2** 圓的一般式

1. 二元二次方程式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，利用配方法化簡可得

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}}{2}\right)^2.$$

2. 圓的判別式： $D = d^2 + e^2 - 4f$

(1) $D = d^2 + e^2 - 4f > 0$

$\Rightarrow$ 圖形為一圓，圓心 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$

半徑 $r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$ 。

(2) $D = d^2 + e^2 - 4f = 0$

$\Rightarrow$ 圖形為一點

即點 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ 。

(3) $D = d^2 + e^2 - 4f < 0$

$\Rightarrow$ 沒有圖形。

例 圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 中，

因為 $d = -2$ ， $e = 4$ ，

所以圓心為 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right) = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$ 。

4

老師講解

一般式求圓心與半徑

學生練習

已知一圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ ，
試求圓 C 的圓心坐標及半徑。

已知一圓 $C: x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ ，
試求圓 C 的圓心坐標及半徑。



數學停看聽

1. 注意：使用公式圓心 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ ，半徑 $r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$ 時，圓方程式 x^2 的係數需為 1。

2. 我們可以展開 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

即 $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

對照 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

得 $\begin{cases} -2h = d \\ -2k = e \\ h^2 + k^2 - r^2 = f \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} \text{圓心 } (h, k) = \left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right) \\ \text{半徑 } r^2 = h^2 + k^2 - f \end{cases}$ 。



類題

- (1) 試求圓方程式 $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 15 = 0$ 的半徑為_____。 [松山家商]
 (2) 若圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ ，則圓 C 之直徑為何？ (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12。

答 _____

[110(B)] 答對率 48.73%

5

老師講解

圓的判別式

學生練習

已知方程式 $x^2 + y^2 + 2x + ky + 5 = 0$ 的圖形為一圓，試求 k 的範圍。

已知方程式 $x^2 + y^2 + 4x + 4y + k = 0$ 的圖形為一圓，試求 k 的範圍。



類題

- (1) 若方程式 $x^2 + y^2 + x + 4y - \frac{3}{4}a = 0$ ，表示為一點，則 $a =$ _____。 [臺中高工]
 (2) 若 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k + 1 = 0$ 表示一圓，則 k 的範圍為何？ (A) $2 < k < 4$ (B) $0 < k < 3$
 (C) $k < 2$ 或 $k > 3$ (D) $k < 0$ 或 $k > 4$ 。**答** _____ [107(B)] 答對率 33.73%



回家作業



對應範例

- ① 1. 圓心為 $(7, 3)$ ，半徑為 $\sqrt{5}$ 的圓方程式為_____。
- ② 2. 圓 $C: (x+6)^2 + (y-8)^2 = 10$ 的圓心為_____，半徑為_____。
- ③ 3. 以 $M(4, -2)$ 為圓心，且過點 $P(3, 5)$ 的圓方程式為_____。
- ④ 4. 圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$ 的圓心為_____，半徑為_____。
- ⑤ 5. 設 $C: x^2 + y^2 + 4x - 4y + k + 2 = 0$ ，若 C 表一圓，則 k 的範圍為_____。