

2-2

根式的運算

1 根式運算的基本性質

2 根式的四則運算

主題 1 根式運算的基本性質

由 2-1 節知道 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $-\sqrt{5}$ 、……分別代表不同的數，這些帶有根號的數像整數、分數一樣，也能做加、減、乘、除的運算，而且滿足加法、乘法的交換律、結合律及分配律。

我們將含有根號的算式稱為**根式**，例如： $2+\sqrt{3}$ 、 $1\div\sqrt{5}$ 、 $3\times\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8}-1$ 等都是根式。接下來就來討論根式運算的基本性質。

✓ 根式的表示

在第一冊我們學過：

$$x+x+x \text{ 寫成 } 3 \cdot x \text{ 或 } 3x;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \text{ 寫成 } -\frac{1}{2}x \text{ 或 } -\frac{x}{2};$$

$$x \div 3 \text{ 寫成 } \frac{x}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3}x。$$

而根式也可以利用這種形式來表示：

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2} \text{ 寫成 } 3\times\sqrt{2} \text{ 或 } 3\sqrt{2};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{2} \text{ 寫成 } -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{5} \div 3 \text{ 寫成 } \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3}\sqrt{5}。$$

一般而言，若 $a \neq 0$ ， $b \geq 0$ ，則 $a \times \sqrt{b}$ 寫成 $a\sqrt{b}$ ；

$$\sqrt{b} \div a \text{ 寫成 } \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}。$$

根式也滿足乘法的交換律與結合律，我們來看下面的例題。

例 1

$a\sqrt{b} \times c$ 的運算

計算下列各式的值。

$$(1) (-2) \times 3\sqrt{5}$$

$$(2) 4\sqrt{2} \times \frac{1}{6}$$

$$(3) \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

解

$$(1) (-2) \times 3\sqrt{5}$$

$$= (-2) \times 3 \times \sqrt{5}$$

$$= -6 \times \sqrt{5}$$

$$= -6\sqrt{5}$$

$$(2) 4\sqrt{2} \times \frac{1}{6}$$

$$= 4 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{6}$$

$$= 4 \times \frac{1}{6} \times \sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{3} \times \sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$(3) <\text{方法一}>$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$<\text{方法二}>$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{3}}{3 \times 3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \frac{3}{5} \times 5\sqrt{2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{5}}{12} \times (-16)$$

$$(3) \frac{3\sqrt{7}}{4} \times \frac{1}{9}$$

✓ 根式的乘除運算

1. 根式的乘法運算

我們知道 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，那 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 呢？

根據平方根的意義：「若 $b^2 = a$ ，則 b 是 a 的平方根。」

因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = 2 \times 5$ ，

所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 是 2×5 的正平方根，又 $\sqrt{2 \times 5}$ 也是 2×5 的正平方根，

因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ 。事實上，若 $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。



我們也可以利用計算機來檢驗 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 與 $\sqrt{2 \times 5}$ 的值。

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} \rightarrow 2 \text{ [SHIFT] } [\sqrt{x^2}] \times 5 \text{ [SHIFT] } [\sqrt{x^2}] [=] \quad 3.16227766$$

$$\sqrt{2 \times 5} \rightarrow 2 \times 5 [=] \text{ [SHIFT] } [\sqrt{x^2}] [=] \quad 3.16227766$$

例 2

根式的乘法運算

計算下列各式的值。

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} \quad (2) \left(-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right) \times 4\sqrt{7} \quad (3) 7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$$

解

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

$$(2) \left(-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right) \times 4\sqrt{7} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \sqrt{5} \times 4 \times \sqrt{7}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right) \times 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} = -\frac{8}{3}\sqrt{35}$$

$$(3) 7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 7 \times \sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{2} = 7 \times 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 35 \times 2 = 70$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \sqrt{5} \times \sqrt{11} \quad (2) \frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right) \quad (3) 3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$$

2. 根式的除法運算

我們知道 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 5}$ 呢？
 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 的值可用 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 表示，因為 $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$ ，
 所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，又 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 也是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ 。
 事實上，若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$ 。



我們也可以利用計算機來檢驗 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 與 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 的值。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \rightarrow 2 \text{ [SHIFT] } [\sqrt{x^2}] \div 5 \text{ [SHIFT] } [\sqrt{x^2}] [=] \quad 0.632455532$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \rightarrow 2 \div 5 [=] \text{ [SHIFT] } [\sqrt{x^2}] [=] \quad 0.632455532$$

例 3

根式的除法運算

計算下列各式的值。

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{5} \quad (2) (-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3}) \quad (3) \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

解

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{5} = \sqrt{35 \div 5} = \sqrt{7}$$

$$(2) (-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3}) = -\frac{12\sqrt{6}}{8\sqrt{3}} = -\frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{6}{3}} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \div \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \div \frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}$$

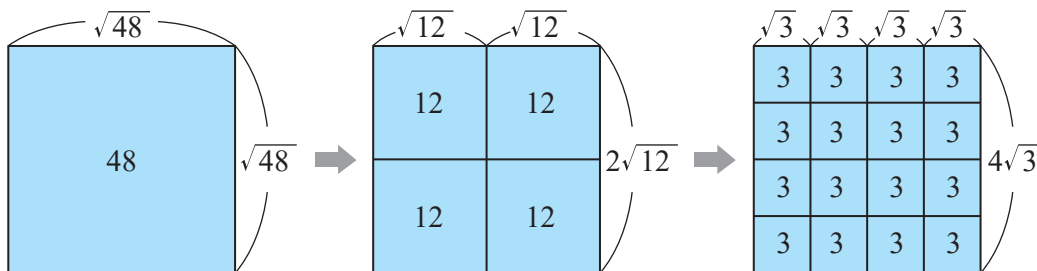
隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \sqrt{98} \div \sqrt{14} \quad (2) 9\sqrt{35} \div (-3\sqrt{7}) \quad (3) \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}} \div \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{21}}$$

✓ 最簡根式與有理化

我們可以將一個面積為 48 的大正方形切成 4 個面積為 12 的中正方形，也可以切成 16 個面積為 3 的小正方形，如下圖。



由圖可知，三個大正方形的邊長分別會是 $\sqrt{48}$ 、 $2\sqrt{12}$ 、 $4\sqrt{3}$ 。又因為大正方形的面積都相等，所以它們的邊長也會相等，即 $\sqrt{48} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ 。

圖解筆記

最簡根式：
整數、分數、小數

$a\sqrt{b}$

- ① 正整數
- ② 標準分解式中，質因數次數都是 1

這些根式看起來雖然不一樣，但它們的值都相等，因此在數學上，我們可以將根式化簡成 $a\sqrt{b}$ 的形式，其中 a 為整數、分數或小數， b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，此時我們稱 $a\sqrt{b}$ 為**最簡根式**，所以 $4\sqrt{3}$ 是最簡根式， $3\sqrt{2}$ 、 $-7\sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{2}\sqrt{15}$ 等也都是最簡根式。

若有下列幾種情形，就不是最簡根式：

- (1) 根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1。

例如： $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3}$ 、 $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$ 。

- (2) 分數的分母含有根式。例如： $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $-\frac{9}{\sqrt{6}}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。

- (3) 根號內的數為分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 、 $-\sqrt{0.1}$ 。

隨堂練習

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$$\sqrt{2.7} \quad \sqrt{18} \quad -\sqrt{42} \quad \frac{8}{3}\sqrt{15} \quad \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{\frac{6}{11}} \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$$

第 77 頁提到的三種不是最簡根式的情形，又該如何化簡呢？

1. 當根號內的數，其標準分解式中質因數的次數大於 1：

可以針對完全平方的因數先做處理，讓根式變成最簡根式。

例 4

化為最簡根式

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{5^3}$

(2) $\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{8} \times \sqrt{45}$

(4) $\sqrt{4 \times 3 \times 18}$

解

$$(1) \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \times 5} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$(2) \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt{8} \times \sqrt{45} &= \sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{3^2 \times 5} \\ &= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{4 \times 3 \times 18} &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} \times \sqrt{18} \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

Hint

根式相乘時，可先將根號內的數相乘之後再化簡，也可以先各自化簡之後再相乘。

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{2^5}$

(2) $\sqrt{80}$

(3) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$

(4) $\sqrt{6 \times 9 \times 121}$

2. 當分數的分母含有根式：

可以利用擴分將分子、分母同乘以某數，讓此分數變成最簡根式。

將分母化為不帶有根號的過程，稱為**分母有理化**。

例 5

利用分母有理化化為最簡根式

將下列根式化為最簡根式。

$$(1) \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$(2) \frac{5}{\sqrt{12}}$$

解

$$(1) \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5}$$

分母有理化

$$(2) \frac{5}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2^2 \times 3}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

分母有理化

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

$$(1) \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$(2) \frac{3}{\sqrt{32}}$$

3. 當根號內的數為分數或小數：

可以先將小數化為分數，再利用分母有理化，讓根式變成最簡根式。

例 6

化為最簡根式

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{0.8}$

(2) $\sqrt{\frac{5}{27}}$

解

$$\begin{aligned}(1) \sqrt{0.8} &= \sqrt{\frac{8}{10}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{4 \times 5}{5 \times 5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{或 } \sqrt{0.8} &= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \sqrt{\frac{5}{27}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{3 \times 3} = \frac{\sqrt{15}}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{或 } \sqrt{\frac{5}{27}} &= \sqrt{\frac{5 \times 3}{27 \times 3}} = \sqrt{\frac{15}{81}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{9}\end{aligned}$$

Hint

若將 $\sqrt{\frac{5}{27}}$ 寫成 $\sqrt{\frac{5 \times 27}{27 \times 27}}$ ，也可將分母有理化，但數字較大不好計算。

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{7.2}$

(2) $\sqrt{\frac{3}{28}}$

主題 2 根式的四則運算

✓ 同類方根

當兩個或兩個以上的根式分別化為形如 $a\sqrt{b}$ 的最簡根式後，若根號內的數 b 相同，就稱它們是**同類方根**。

例如： $2\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $-3\sqrt{2}$ 是 $\sqrt{2}$ 的同類方根；

$-3\sqrt{10}$ 、 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 是 $\sqrt{10}$ 的同類方根。

✎ 隨堂練習

圈圈看，下列哪些是 $\sqrt{6}$ 的同類方根？

$$\sqrt{12} \quad \sqrt{24} \quad \sqrt{16} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \sqrt{0.06}$$

數

學

好

好

玩

易根玉米

玉米是世界上最重要的糧食作物之一，富有相當高的營養價值，也可製成可分解的環保餐具。請翻到書末 P.[4]「易根玉米」，根據同類方根與根式的化簡，動手種出自己獨一無二的「易根玉米」吧！

✓ 根式的加減運算

在第二冊學習二元一次式時，我們知道，

(1) 同類項能合併化簡，例如： $2x+3x=5x$ 、 $4y-3y=y$ 。

(2) 不同類項則不能合併化簡，例如： $x+3y$ 。

同樣的，**根式的加減運算是將同類方根合併化簡，不同類方根則不能合併化簡**。我們用下面的例題說明。

例 7

同類方根的加減運算

化簡下列各式。

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

(2) $4\sqrt{6}-3\sqrt{6}$

(3) $5\sqrt{10}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}+4\sqrt{5}$

解

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(2) $4\sqrt{6}-3\sqrt{6}=(4-3)\times\sqrt{6}=\sqrt{6}$

(3) 因為 $5\sqrt{10}$ 和 $-2\sqrt{10}$ 是同類方根，

$-3\sqrt{5}$ 和 $4\sqrt{5}$ 是同類方根，

$$\begin{aligned} \text{所以 } & 5\sqrt{10}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}+4\sqrt{5} \\ &= (5\sqrt{10}-2\sqrt{10})+(-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{10}+\sqrt{5} \end{aligned}$$

✎ 隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $7\sqrt{13}-4\sqrt{13}$

(2) $5\sqrt{11}-3\sqrt{7}-2\sqrt{11}+4\sqrt{7}$

計算根式的加減時，通常會先將各項化為最簡根式，再進行運算。

例 8

先化為最簡根式再做運算

化簡下列各式。

$$(1) 3\sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$(2) \sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{4\frac{25}{36}}$$

$$(3) \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$(4) 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - (\sqrt{12} - \sqrt{45})$$

解 (1) $3\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$$(2) \sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{4\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{25}{16}} + \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{5}{4} + \frac{13}{6} = \frac{41}{12} \text{ (或 } 3\frac{5}{12} \text{)}$$

$$(3) \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{所以 } \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{6} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)\sqrt{6} = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} (4) 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - (\sqrt{12} - \sqrt{45}) &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\ &= \sqrt{3} + 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

隨堂練習

化簡下列各式。

$$(1) 4\sqrt{3} - \sqrt{12}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{18}$$

$$(3) \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{27} + \sqrt{50}$$



1. $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$ 是否成立？

2. $\sqrt{4\frac{25}{36}} = 2\frac{5}{6}$ 是否成立？

✓ 根式的四則運算

根式也可以像數一樣進行四則運算，我們來看下面的例題。

例 9

根式的四則運算

化簡下列各式。

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{5}} \div \sqrt{\frac{1}{6}}$

(2) $(-4\sqrt{15}) \times (-\sqrt{\frac{1}{3}}) - 4\sqrt{5}$

解

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{5}} \div \sqrt{\frac{1}{6}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \div \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{6}{1}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \times 5}{5 \times 5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

(2) $(-4\sqrt{15}) \times (-\sqrt{\frac{1}{3}}) - 4\sqrt{5}$

$$= 4 \times \sqrt{15 \times \frac{1}{3}} - 4\sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$$

$$= 0$$

隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{\frac{1}{3}} \div (2\sqrt{2})$

(2) $(-\sqrt{1\frac{2}{3}}) \times (-\sqrt{\frac{3}{10}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}$

例 10

根式的四則運算

化簡下列各式。

(1) $2\sqrt{3} \times (\sqrt{12} - \sqrt{2})$

(2) $(-3\sqrt{2} + \sqrt{15}) \div \sqrt{3}$

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - 1)$

解

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 2\sqrt{3} \times (\sqrt{12} - \sqrt{2}) &= 2\sqrt{3} \times (2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\
 &= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} \\
 &= 12 - 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (-3\sqrt{2} + \sqrt{15}) \div \sqrt{3} &= \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{15}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{-3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} + \sqrt{\frac{15}{3}} \\
 &= -\sqrt{6} + \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - 1) &= \sqrt{3} \times \sqrt{6} - \sqrt{3} \times 1 + \sqrt{2} \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times 1 \\
 &= \sqrt{18} - \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{2} \\
 &= 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \\
 &= 2\sqrt{2} + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $(\sqrt{24} - 2\sqrt{3} + \sqrt{15}) \div \sqrt{12}$

(2) $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

例 11

利用乘法公式進行根式運算

利用乘法公式化簡下列各式。

$$(1) (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \qquad (2) (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2$$

學習時光機

1. 和的平方公式
 $(a+b)^2$
 $=a^2+2ab+b^2$
2. 差的平方公式
 $(a-b)^2$
 $=a^2-2ab+b^2$
3. 平方差公式
 $(a+b)(a-b)$
 $=a^2-b^2$

解

$$(1) \text{ 利用乘法公式 } (a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

$$\begin{aligned} \text{得 } (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 8 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 利用乘法公式 } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$\begin{aligned} \text{得 } (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2 &= (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 \\ &= 3 + 4\sqrt{6} + 8 \\ &= 11 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

隨堂練習

利用乘法公式化簡下列各式。

$$(1) (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$$

$$(2) (\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$$

如果分母是兩個根式相加（減），就可利用乘法公式，將分母有理化。

例 12

利用乘法公式將分母有理化

將下列各式的分母有理化。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

解 (1) 要將分母有理化，可利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ，

$$\text{即 } (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{1 \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \\ &= \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3} \times (3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{6}-6}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{6}-6}{18-12} = \frac{3\sqrt{6}-6}{6} \\ &= \frac{\sqrt{6}-2}{2} \quad (\text{或 } \frac{\sqrt{6}}{2}-1) \end{aligned}$$

隨堂練習

將下列各式的分母有理化。

$$(1) \frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$$



1 根式的表示

若 $a \neq 0$ 、 $b \geq 0$ ，則 $a \times \sqrt{b}$ 寫成 $a\sqrt{b}$ ； $\sqrt{b} \div a$ 寫成 $\frac{\sqrt{b}}{a}$ 或 $\frac{1}{a}\sqrt{b}$ 。

例 $5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ； $\sqrt{7} \div 2 = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ 。

2 根式的乘除運算

(1) 若 $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ 。

(2) 若 $a \geq 0$ 、 $b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ， $\sqrt{35} \div \sqrt{5} = \sqrt{35 \div 5} = \sqrt{7}$ 。

3 最簡根式

若一個根式為 $a\sqrt{b}$ ，其中 a 為整數、分數或小數， b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，我們稱 $a\sqrt{b}$ 為最簡根式。

例 $3\sqrt{2}$ 、 $-7\sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ 都是最簡根式。

4 分母有理化

將分母化為不帶有根號的過程，稱為分母有理化。

例 $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

5 同類方根

當兩個或兩個以上的根式分別化為形如 $a\sqrt{b}$ 的最簡根式後，若根號內的數 b 相同，就稱它們是同類方根。

例 $\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$ 是同類方根； $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $-\sqrt{5}$ 是同類方根。

6 根式的加減運算

根式的加減運算是將同類方根合併化簡，不同類則不能合併化簡。

例 $2\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) + (4\sqrt{6} - 3\sqrt{6}) = 5\sqrt{3} + \sqrt{6}$ 。



1 下列何者是最簡根式？答：_____。

P.77 隨堂

(A) $\sqrt{75}$

(B) $\frac{2}{9}\sqrt{7}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

(D) $\sqrt{\frac{5}{19}}$

2 下列何者不是 $\sqrt{3}$ 的同類方根？答：_____。

P.81 隨堂

(A) $\sqrt{12}$

(B) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

(C) $\frac{1}{3}\sqrt{24}$

(D) $\sqrt{16\frac{1}{3}}$

3 計算下列各式的值，並化為最簡根式。

(1) $(-3\sqrt{3}) \times 4\sqrt{5}$

P.75 例 2

(2) $\sqrt{\frac{5}{6}} \div \sqrt{2\frac{1}{2}}$

P.76 例 3

P.80 例 6

(3) $4 + 6\sqrt{2} - (5\sqrt{2} - 3)$

P.82 例 7

(4) $\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16}$

P.83 例 8

(5) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10}) \div \sqrt{15}$

P.85 例 10

(6) $(1 + \sqrt{12}) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})$

P.85 例 10

4 若 $a=2\sqrt{5}$ 、 $b=3\sqrt{2}$ ，利用乘法公式計算下列各式的值，並化為最簡根式。

(1) $(a+b)(a-b)$

(2) $(a+b)^2$

P.86 例 11

5 將 $\frac{2}{\sqrt{6}-2}$ 化為最簡根式。

P.87 例 12

挑錯題

以下是小翊和小妍「計算 $\sqrt{16\frac{1}{9}} - \sqrt{4\frac{1}{9}}$ 」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊： $\begin{aligned} & \sqrt{16\frac{1}{9}} - \sqrt{4\frac{1}{9}} \\ &= 4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$	小妍： $\begin{aligned} & \sqrt{16\frac{1}{9}} - \sqrt{4\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt{16\frac{1}{9} - 4\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$
---	---