

5 比和比值

教學說明



學習表現

n-III-9 理解比例關係的意義，並能據以觀察、表述、計算與解題，如比率、比例尺、速度、基準量等。

學習內容

N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。（目標 1、2、3、4、5）

教學目標

- ① 認識比的意義與表示法。
 - 1-1 在生活情境中，認識比的意義。
 - 1-2 在生活情境中，認識比的記法以及前項、後項。
- ② 認識比值的意義和除法的關係。
 - 2-1 在生活情境中，認識比值與除法的關係。
 - 2-2 在生活情境中，認識比值的意義。
- ③ 了解比的相等關係。
 - 3-1 藉由比值相等，理解相等的比並能用等號記錄相等的比。
 - 3-2 藉由等值分數，認識相等的比。
- ④ 認識最簡單整數比。
 - 4-1 藉由相等的比中，前項與後項互質，認識最簡單整數比。
 - 4-2 將整數的比化為最簡單整數比。
 - 4-3 將小數的比化為最簡單整數比。
 - 4-4 將分數的比化為最簡單整數比。
- ⑤ 運用比和比值解決有關的問題。
 - 5-1 運用相等的比解決生活中有關的問題。
 - 5-2 運用比率解決總量與部分量的問題。

教學節數與重點

第一節 活動 1 比。(課本 P72)

1-1 在生活情境中，認識比的意義。

1-2 在生活情境中，認識比的記法以及前項、後項。

活動 2 比值。(課本 P73、P74)

2-1 在生活情境中，認識比值與除法的關係。

2-2 在生活情境中，認識比值的意義。

第二節 活動 3 相等的比。(課本 P75、P76)

3-1 藉由比值相等，理解相等的比並能用等號記錄相等的比。

3-2 藉由等值分數，認識相等的比。

第三節 活動 4 最簡單整數比。(課本 P76、P77)

4-1 藉由相等的比中，前項與後項互質，認識最簡單整數比。

4-2 將整數的比化為最簡單整數比。

4-3 將小數的比化為最簡單整數比。

4-4 將分數的比化為最簡單整數比。

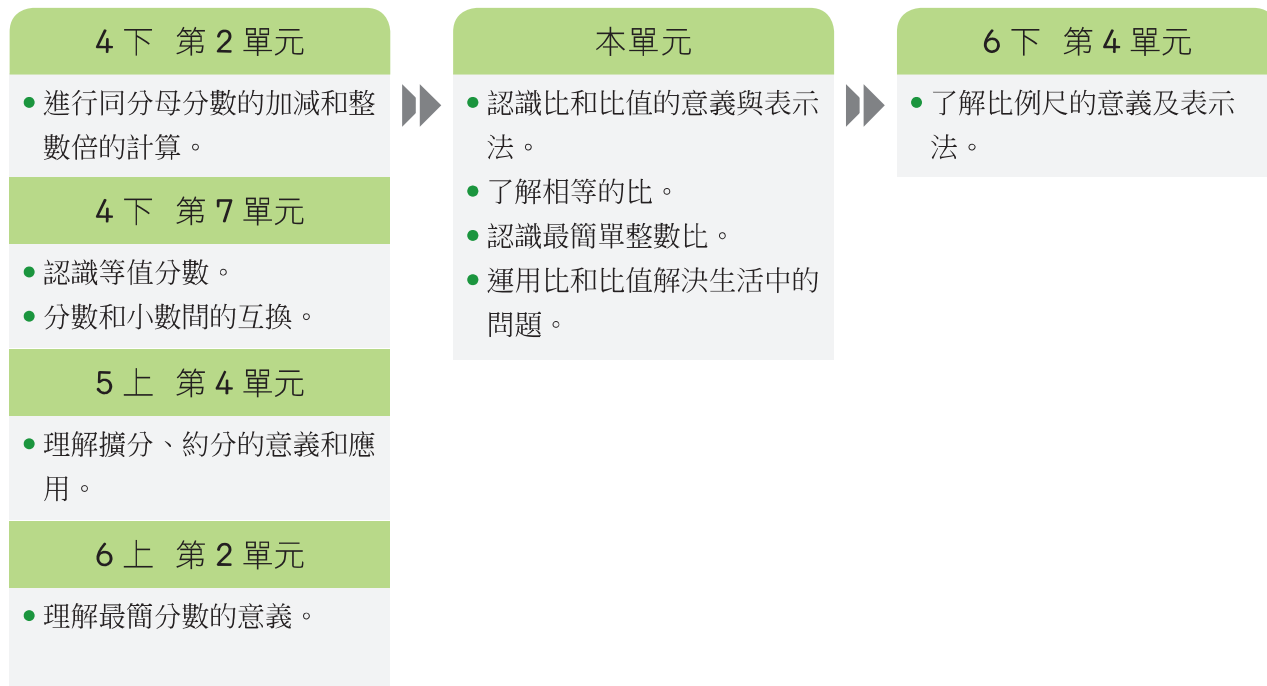
第四節 活動 5 比的應用。(課本 P78、P79)

5-1 運用相等的比解決生活中有關的問題。

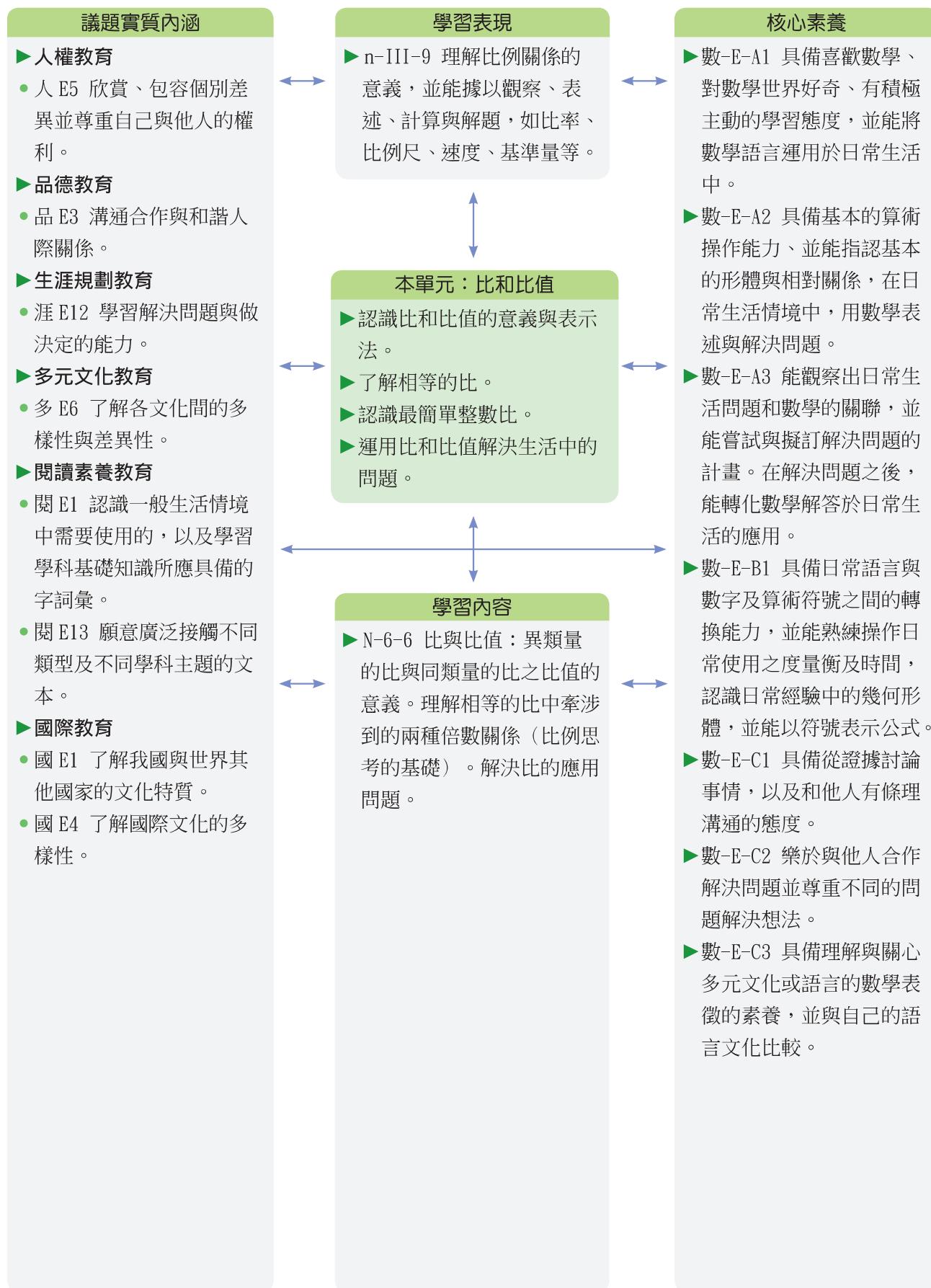
5-2 運用比率解決總量與部分量的問題。

第五節 練習五 (課本 P80、P81)

教材分析



一、連結架構



二、數學知識

本單元教材主要是透過生活經驗，讓兒童了解兩同類量或兩數間的關係，進而了解「比」的意義及表示方法（比的寫法和讀法）。從日常問題中，可發現許多問題的解決，需要用到比的關係。在本單元中，正式介紹比的記法與比的相等關係，最終則要理解比的關係與「除」的關係二者相同。透過兩個數的倍數關係，經過討論而理解「比值」的意義及表示方法，再由「比值相等」進而認識「相等的比」和「最簡單整數比」。最後能應用「比」和「比值」在適切的場合來解決生活中的問題。

「比」是表示兩數量的對應關係，「比例」則是表示兩數量的對應情形。兩者關係密切，「比」可以說是「比例」的基礎，「比例」則可以說是「比」的延伸和發展。

一 比的意義和表示法

在日常生活中，常會遇到比較兩個數或兩個量的大小問題，但通常結果只說明兩個數中，「哪一個數大或哪一個數小」（如： $9-3=6$ ，9 比 3 大 6），不然就是以「哪一個數是另一個數的幾倍」（如： $9\div3=3$ ，9 是 3 的 3 倍），很少更進一步去探討兩數間的大小關係。用符號來表示兩數間的倍數關係，或 $4:5$ ， $4\div5=\frac{4}{5}=0.8$ ，4 是 5 的 $\frac{4}{5}$ 倍或 0.8 倍。

至於比較兩個數或兩個量的大小，什麼時候要用「差」來比較，什麼時候要用「商」來比較，就要視實際需要來決定。如：「大同國小六年級舉行視力檢查，甲班 36 個人有 6 個人近視，乙班 25 個人有 5 個人近視，哪一班的視力較健康？」這個問題如果以「 $6-5=1$ （個）」解決，結果只能說甲班的近視人數比乙班的多了 1 人，而不能說甲班學生的視力比乙班學生的視力差，如果以該班的學生近視的人數占全班的幾分之幾來判斷，得到的結果是甲班： $6\div36=\frac{1}{6}$ ，乙班： $5\div25=\frac{1}{5}$ ；即甲班的學生 6 個人中有 1 個人近視，乙班的學生 5 個人中有 1 個人近視，由此可知「甲班學生的視力比乙班學生的健康」。像這樣在比較大小的兩種方式中，兩個數或兩個同類量的後一種關係，就叫作這兩個數或兩個同類量的「比」。如： $6\div36=\frac{1}{6}$ ，所以 6 對 36 的比是 6 比 36，或 1 比 6（即把 6 當作 1 時，36 相當 6），6 比 36 記作「 $6:36$ 」，讀作「六比三十六」。

二 比值的意義和表示法

由上述兩個數 6 對 36 的比（ $6:36$ ），實際上表示 6 除以 36 所得的商，所以 $6:36$ 可以寫成這樣的形式：「 $6\div36=\frac{1}{6}$ 」，即比的前面的數（前項）除以後面的數（後項）所得的商（ $\frac{6}{36}$ ），叫作 6 比 36 的「比值」。

有時為了教學方便，規定比值的分子和分母都是整數，而且分子和分母不能再約分。不過廣義的來看比值，用小數或百分數也可以表示一個比的比值；用分數表示比值時，用「假分數或帶分數」也沒有關係。

三 相等的比

「比的前面的數（前項）和後面的數（後項），同用 0 以外的一個數去乘或除，所得的比值不變」，這是比的最重要的基本性質。運用比的基本性質可以寫出相等的比，和做比的化簡。

比的前面的數相當於分數的分子，比的後面的數相當於分數的分母，因此在指導「相等的比」時，最好和「等值分數」取得密切連絡，從「比值相等」引至「相等的比」。如：「一個分數裡，同用 0 以外的一個數去乘或除分子或分母，所得分數的值不變」和「比的前面的數和後面的數，同用 0 以外的一個數去乘或除，所得的比值不變」是完全相同的道理。

四 最簡單整數比

比的前項、後項兩個數，除了1以外沒有其他的公因數，我們叫作「最簡單整數比」。比的化簡和把分數約成最簡分數的方法相同，教學時應引導兒童活用舊經驗來學習；利用上述「相等的比」的性質，讓兒童從實際操作討論及演算中，了解比的化簡的各種方法。如：

① 整數比的化簡：

$$\text{如：} 20 : 30 = (20 \div 10) : (30 \div 10) = 2 : 3$$

② 小數比的化簡：

小數比的化簡方法有許多種，最好讓兒童從演算過程中自行嘗試發現。

$$\text{如：} 3.2 : 8 = (3.2 \times 10) : (8 \times 10) = 32 : 80 = 2 : 5$$

$$\text{也可以 } 3.2 : 8 = (3.2 \times 5) : (8 \times 5) = 16 : 40 = 2 : 5$$

③ 分數比的化簡：

$$\text{可以先通分，再化簡：} \frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \frac{5}{20} : \frac{8}{20} = 5 : 8$$

用前面的數、後面的數各乘以各分母的最小公倍數：

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{4} \times 20\right) : \left(\frac{2}{5} \times 20\right) = 5 : 8$$

$$\text{用最簡捷的方式：} \frac{1}{4} : \frac{2}{5} = (1 \times 5) : (2 \times 4) = 5 : 8$$

五 比和比值的應用

應用「比和比值」解決問題，宜以兒童生活經驗為主，如：「好喝的橘子水是橘子汁1公升對水3公升，3公升橘子水要加入多少公升的水，才能調配出一樣的橘子水？」。在學生的解題過程中，可能會運用除法的方式，教師亦應肯定，再逐步引導兒童應用「比值相等的兩個比相等」的概念進行解題，如：「 $1 : 3 = 3 : \square$ ， $3 \div 1 = 3$ ， $3 \times 3 = 9$ （公升）。」

三、教學知識

- 一 學習本單元的先備知識：本階段的學生在四年級時，已經藉由單位分數為多個個物學過等值分數的初步概念並能用分數表示整數除以整數的商，五年級時，學過公因數、公倍數之後，又透過具體的操作進一步了解等值分數的意義，並能用小數表示整數除以整數的商。

本學期已透過質因數分解的活動，將整數分為質數和合數並初步理解互質的意義，然後運用分母和分子互質的概念了解最簡分數的意義，並能透過約分進行分數的化簡。以上的經驗就是學習本單元的重要基礎。

- 二 本單元的教材內容有比的意義、比值的求法、相等的比、最簡單整數比、比的應用等，活動的內容與分數息息相關，教學時宜提醒兒童回憶學習分數的舊經驗，跟比做有效的連結。本單元分為 5 個活動進行教學。

活動 1：比。

透過具體的操作確認相同的比，再探討比的記法和讀法。如：1：2 讀作一比二，同時認識比「：」的符號，進而了解符號前面的數為前項、後面的數為後項，作為學習比值時溝通的用語。

活動 2：比值。

- ① 比值的意義：配合生活情境「原子筆文具組」的活動，將 4 枝藍筆與 1 枝紅筆記成比，再算出比的前項是後項的幾倍，然後把前項除以後項所得的商命名為比值。
- ② 比值的求法：由於比值是前項除以後項所得的商，除了能整除的比值是整數之外，還有分數和小數。

如：5：2 的比值是 $5 \div 2 = \frac{5}{2}$ ， $5 \div 2 = 2.5$ ，可視其需要採取分數或小數為比值。

活動 3：相等的比。

- ① 算出各比的比值，然後藉由比值相等認識相等的比。
- ② 相等的比是學習最簡單整數比的前置經驗。

活動 4：最簡單整數比。

- ① 提供竹籤長度對影長之對應表，讓學生將各數對記成比，然後算出各比的比值。
- ② 讓學生把各比的比值化成最簡分數，發現各比均為相等的比，再找出前項和後項互質的比，命名為最簡單整數比。

活動 5：比的應用。

提供日常生活中有關比的問題，讓兒童運用比的概念、比值和相等的比來解決問題。

- ① 藉由比的關係求兩數中的未知數，提供已知兩數量的比和一個量，求另一個量的問題，讓兒童應用相等的比或比值算出答案。
- ② 運用比率解決由總量求部分量的問題：兒童依照其比率合理地分配買到的物品，或利用相等的比算出兩人應得的物品。

教學活動

第一節 比、比值

- ① 活動說明：① 在生活情境中，認識比的意義。
 ② 在生活情境中，認識比的記法以及前項、後項。
 ③ 在生活情境中，認識比值與除法的關係。
 ④ 在生活情境中，認識比值的意義。

② 活動舉例：

配合課本 P70～P74

布題與引導	互動歷程	教學評量	核心素養
活動 1：比 ► 認識比的意義及比的記法 - 布題一：<u>土耳其</u>是世界上最愛喝茶的國家之一。 <u>土耳其紅茶</u>是用 1 杯濃茶和 2 杯開水調配成的。說說看，濃茶和開水的數量有什麼關係？怎麼記？ - 教師說明：在數學中，表示兩個數量的關係稱為「比」。如：1 杯濃茶對 2 杯開水的關係，通常記作 1：2，讀作一比二，「：」是比的符號。在「1：2」的關係中，1 稱為前項，2 稱為後項。 - 濃茶要使用 90 毫升的水和 3 公克的茶葉烹煮而成，水量對茶葉重量的關係，用比怎麼記？茶葉重量對水量的關係，用比怎麼記？	- 上課前，教師可以先介紹單元首頁的照片，提高兒童學習的興趣，再以照片下方的問題引發兒童學習本單元概念的動機。兒童不必馬上解決問題，待學完本單元才回顧解題，可獲得自我解決問題的成就感。 - 以前學過的是依據先備經驗所設計的題目，教師可以視情況給予兒童練習，複習之前所學。 - 單元首頁有學習前的學習要點，提供教師於授課前掌握內容重點，便於調整教學的深度或廣度。 - 兒童分組討論、發表。如：濃茶和開水的數量是 1 對 2 的關係，記作 1：2。 - 兒童聆聽並凝聚共識。 - 兒童分組討論、發表。如： ① 90：3 ② 3：90	- 能正確的說明。 - 能了解比的意義及比的「前項」和「後項」。 - 能正確的說明。	- 數-E-A1 - 數-E-B1 - 數-E-C1 - 數-E-C2 - 數-E-C3

- 說說看，這兩個比的前項和後項各是多少？

- 試試看：

阿志買了一盒土耳其軟糖，其中有 8 塊原味和 4 塊玫瑰口味。

①原味的數量對玫瑰口味的數量比是（ ）：（ ），前項是（ ），後項是（ ）。

②玫瑰口味的數量對原味的數量比是（ ）：（ ），前項是（ ），後項是（ ）。

活動 2：比值

► 認識比值的意義

- 布題一：一盒原子筆文具套組有 4 枝藍筆和 1 枝紅筆。
- 藍筆枝數對紅筆枝數的關係，用比怎麼記？藍筆枝數是紅筆枝數的幾倍？

- 教師說明：比的前項除以後項所得的商稱為比值。
前項 ÷ 後項 = 比值。

- 布題二：馨馨花店舉辦母親節活動，每買 5 朵康乃馨贈送 2 朵百合花。

- 康乃馨數量對百合花數量的比怎麼記？比值是多少？

- 百合花數量對康乃馨數量的比怎麼記？比值是多少？

- 兒童分組討論、發表。如：

① 90 : 3 的前項是 90，後項是 3。

② 3 : 90 的前項是 3，後項是 90。

- 兒童各自解題、發表。如：

①原味的數量對玫瑰口味的數量比是（ 8 ）：（ 4 ），前項是（ 8 ），後項是（ 4 ）。

②玫瑰口味的數量對原味的數量比是（ 4 ）：（ 8 ），前項是（ 4 ），後項是（ 8 ）。

- 兒童分組討論、發表。如：

① 4 : 1

② 讀作四比一。

③ 藍筆枝數是紅筆枝數的 4 倍，我們稱 4 是 4 : 1 的比值。

④ 4 : 1

$$4 \div 1 = 4$$

答：4 : 1，4 倍

- 兒童聆聽並凝聚共識。

- 兒童分組討論、發表。如：

① 5 : 2

② 讀作五比二。

$$5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

答：5 : 2， $\frac{5}{2}$

- 兒童分組討論、發表。如：

① 2 : 5

② 讀作二比五。

$$2 \div 5 = \frac{2}{5}$$

答：2 : 5， $\frac{2}{5}$

- 能說出兩個比的前項和後項。

- 能寫出正確答案。

• 數-E-A1
數-E-B1

- 能正確的說明。
- 能用算式記錄解題的過程和結果。

• 數-E-A2
數-E-B1
數-E-C1

- 能正確的說明。
- 能用算式記錄解題的過程和結果。

• 數-E-A2
數-E-B1
數-E-C1

- 能正確的說明。
- 能用算式記錄解題的過程和結果。

- 說說看，你發現了什麼？ - 布題三：超商泡麵特價，5 包泡麵賣 39 元，泡麵價錢對包數的比怎麼記？比值是多少？ - 布題四：一盒煎餅有 25 個，其中 10 個是花生口味煎餅，花生口味個數對整盒個數的比值是多少？ - 試試看： 超商舉辦環保回收活動，每 2 公斤的廢電池可以換 32 元購物抵用金，廢電池重量對購物抵用金的比怎麼記？比值是多少？	- 兒童分組討論、發表。如： 比的前項和後項顛倒後，比值的分子、分母也會顛倒。 - 教師補充：「a : b」和「$\frac{a}{b}$」不使用「=」連結，若學生在計算過程中寫出 $a : b = \frac{a}{b}$，教師可彈性處理。 - 教師補充：生活中的比，如：比賽分數的比，後項可以是 0，所以不會計算比值；數學中的比，將比理想化，後項不能為 0，才可以計算比值。 - 兒童分組討論、發表。如： ① 泡麵價錢對包數的比是 39 : 5。 ② $39 \div 5 = \frac{39}{5}$ ③ $39 \div 5 = 7.8$ $\begin{array}{r} 7.8 \\ 5 \overline{) 39} \\ \underline{35} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$ 答：39 : 5，$\frac{39}{5}$ 或 7.8 - 兒童分組討論、發表。如： ① 花生口味個數對整盒個數的比是 10 : 25。 ② $10 \div 25 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ ③ $10 \div 25 = 0.4$ $\begin{array}{r} 0.4 \\ 25 \overline{) 100} \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$ 答：$\frac{2}{5}$ 或 0.4 - 兒童各自解題、發表。如： ① 廢電池重量對購物抵用金的比是 2 : 32。 ② $2 \div 32 = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ ③ $2 \div 32 = 0.0625$ $\begin{array}{r} 0.0625 \\ 32 \overline{) 200} \\ \underline{192} \\ 80 \\ \underline{64} \\ 160 \\ \underline{160} \\ 0 \end{array}$ 答：2 : 32，$\frac{1}{16}$ 或 0.0625	- 能說出自己的想法。 - 能正確的說明。 - 能用算式記錄解題的過程和結果。 - 能正確的說明。 - 能用算式記錄解題的過程和結果。 - 能寫出正確答案。	- 數-E-A2 數-E-B1 數-E-C1 數-E-C2 - 數-E-A2 數-E-B1 數-E-C1 數-E-C2 - 數-E-A2 數-E-B1
--	--	---	---