

不等式：

蔡老師 編撰

1. 不等式的定義：用符號 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ 把兩式連結所成的式子，叫做
不等式

例：(1) $3x + 4 < 7 \Rightarrow$ _____

(2) $2x - 6y \geq 3 \Rightarrow$ _____

(3) $5x^2 - 2x - 3 > x + 1 \Rightarrow$ _____

2. 不等式的列式：將日常生活的實例 用符號成數學的式子

例 1：一敘述「 $3x$ 不小於 -73 」可列出 x 的不等式為 _____

例 2：建華每天存款 10 元，存 x 天後會超過 500 元，可列出 x 的不等式為 _____

例 3：興國拿 42 元去買每枝 7 元的原子筆，問他可能買幾枝？若興國可能買 x 枝，則可列出 x 的不等式為 _____

例 4：現在父年 40 歲，子年 14 歲，則：(1) x 年後父年為 _____ 歲，子年為 _____ 歲；(2) 若設 x 年後父年小於子年的兩倍，則可列出 x 的不等式為 _____

例 5：試將下列各題中兩個同時成立的不等式，合寫成一個式子：

(1) 若 $x > -1$ 和 $x < 9$ 同時成立： _____

(2) 「 $3 < x$ 且 $x \leq 20$ 」： _____

例 6：(1) 依據中華郵政的郵資計算標準：「普通信函重量不逾 20 公克時郵資 5 元」，小青寄了一封 x 公克普通信函給表妹，必須貼 5 元郵票寄出，則可列出 x 的不等式為 _____；(2) 若「掛號信函重量超過 100 公克且不逾 250 公克時郵資 45 元」，小青以掛號寄了一篇文章到報社投稿，必須貼 45 元的郵票，如果小青這分稿件為 y 公克，則可列出 y 的不等式為 _____

例 7：鐵路局規定，身高超過 115 公分，但不超過 145 公分者必須買孩童票，設某買孩童票的兒童身高為 x 公分，則可列出 x 的不等式為_____

例 8：阿哲利用假日和家人一起爬山，上山每小時走 1.5 公里，循原路下山時每小時 2 公里，如果一趟山路的距離為 x 公里，且來回所用的時間不超過 4 小時，則可列出 x 的不等式為_____

例 9：小明三次數學考試成績分別是 74 分、79 分和 x 分，三次平均不低於 80 分，則可列出 x 的不等式為_____

例 10：小慧帶了 300 元到水果行買橘子，已知橘子 4 斤賣 100 元，如果小慧買了 x 斤橘子，則可列出 x 的不等式為_____

例 11：一梯形的上底是 4 公分，下底是 6 公分，設梯形的高為 x 公分，則：(1)面積為_____平方公分(以 x 表示)；(2)若面積不大於 20 平方公分，則可列出 x 的不等式為_____

例 12：點 $(-2x+3, -2)$ 位於坐標平面上第四象限，依題意可列出 x 的不等式為_____

例 13：東東想用鐵絲網圍成長方形菜圃，如果菜圃的長為 x 公尺，寬為 y 公尺，周長不超過 100 公尺，則可列出 x 、 y 的不等式為_____

例 14：阿水有 72 元，買了每塊 6 元的蛋糕 x 塊及每塊 5 元的麵包 y 塊，則可列出 x 、 y 的不等式為_____

例 15：建華有 70 元，想買每枝 8 元的原子筆 x 枝及每枝 6 元的鉛筆 y 枝，則：(1)可列出 x 、 y 的不等式為_____；(2)寫出兩種建華可能的買法為_____

例 16：一個兩位數其數值不小於它的數字和的 6 倍，設原數的個位數字為 x ，十位數字為 y ，則可列出 x 、 y 的不等式為

3. 兩數的大小比較：

(a) 減法：若 $a > b$ ，則 $a - b > 0$ ，反之， $a - b > 0$ ，則 $a > b$

若 $a = b$ ，則 $a - b = 0$ ，反之， $a - b = 0$ ，則 $a = b$

若 $a < b$ ，則 $a - b < 0$ ，反之， $a - b < 0$ ，則 $a < b$

例 1：試用減法比較下列各組數的大小：

(1) $(2.1)^9$ 和 $(2.1)^8$

(2) $(\frac{3}{4})^8$ 和 $(\frac{3}{4})^7$

例 2：比較下列各組數的大小：

(1) $3\frac{43}{157} + \frac{4}{11}$ 和 $3\frac{44}{157} + \frac{3}{11}$

(2) $5\frac{17}{20} + 4\frac{7}{15}$ 和 $6\frac{3}{20} + 3\frac{13}{15}$

例 3：已知 $a > 1$ ，試比較 a^3 和 a^4 的大小

例 4：已知 $0 < a < 1$ ，試比較 a^4 和 a^5 的大小

(b)除法：(適用於 a, b 皆為正數)

若 $\frac{a}{b} > 1$ ，則 $a > b$

若 $\frac{a}{b} = 1$ ，則 $a = b$

若 $\frac{a}{b} < 1$ ，則 $a < b$

例 6：試用除法比較 $(2.1)^9$ 和 $(2.1)^8$ 的大小關係：

4. 等量公理及不等式的性質：

☆運算法則：等量公理

(1) 若 $a > b$ ，則 $a + c > b + c$ (加法公理)

(2) 若 $a > b$ ，則 $a - c > b - c$ (減法公理)

(3) 若 $a > b$ ，且 $c > 0$ ，則 $ac > bc$ ， $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

若 $a > b$ ，且 $c < 0$ ，則 $ac < bc$ ， $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (乘、除法公理)

例 1：若 $x - 1 > -3$ ，請利用「 $<$ 、 $>$ 或 $=$ 」完成下列式子：

(1) $(x - 1) + 1000$ _____ $(-3) + 1000$

(2) $(x - 1) - 159$ _____ $(-3) - 159$

(3) $99 \times (x - 1)$ _____ $99 \times (-3)$

(4) $-38 \times (x - 1)$ _____ $-38 \times (-3)$

(5) $0 \times (x - 1)$ _____ $0 \times (-3)$

例 2：若 $30 \leq 5x - 6y$ ，試比較 -5 與 $-\frac{5}{6}x + y$ 的大小關係：

例 3：在 $\square$ 內填入「 $\geq$ 」或「 $\leq$ 」：

(1) 若 $2a + b \geq 50$ ，則 $4a + 2b \square 100$

(2) 若 $-a + 2b \leq 40$ ，則 $3a - 6b \square -120$

例 4：若 $a > b$ ，試比較 a 、 b 、 $\frac{a+b}{2}$ 的大小關係：

ps：數線上三點 a 、 b 、 $\frac{a+b}{2}$ ， $\frac{a+b}{2}$ 稱為 a 、 b 的中點坐標

例 5：求下列各組點的中點：

(1) 6 ， -16

(2) 18 ， 8

(3) -7 ， -13

☆不等式性質的應用：

1. 若 $a > b$ ， $c > d$ ，則 $a + c > b + d$

口訣：大 + 大 $>$ 小 + 小

2. 若 $a > b$ ， $c > d$ ，則 $a - d > b - c$

口訣：大 - 小 $>$ 小 - 大

3. 若 $a > b > 0$ ，且 $c > d > 0$ ，則 $ac > bd$

4. 若 $a > b > 0$ ，則 $a^2 > b^2$

例 10：若 $a > b > 0$ ，試比較 a^3 、 a^2b 、 ab^2 、 b^3 的大小關係

5. 不等式的解：不等式中的文字符號，假若以某數代入後，能使得不等式成立，則該數就稱為是不等式的解

例 1：在 $\frac{1}{3}$ 、1 和 2 三數中，哪些是不等式 $3x+4 \leq 7$ 的解？

例 2：在 -4 、 0 、 $2\frac{1}{2}$ 、 5 四數中，哪些是不等式 $-2x-5 > 1$ 的解？

例 3：試找出不等式 $6 < 5x-2$ 的三組解？

例 4：試找出不等式 $2+x > 3x-3$ 的三組解？

例 5：在 -2 、 $\frac{1}{3}$ 、 1 、 2 四數中，哪些是不等式 $2 > 3x-2 \geq -5$ 的解？

例 6：下列各組數中，哪些是不等式 $2x-7y > 5$ 的解？

(A) $x=0$ ， $y=1$ ；(B) $x=1$ ， $y=-1$

例 7：分別檢驗(1) $x=1$ ， $y=-2$ ；(2) $x=-2$ ， $y=5$ ；(3) $x=0$ ， $y=4$
三組數是否為下列各二元一次不等式的解？

(A) $x-2y < -3$ ；(B) $-3x+2y-1 \geq 0$

例 8： x 為整數，且 $1 \leq x \leq 5$ ，則不等式 $3x - 5 > x$ 的解為_____

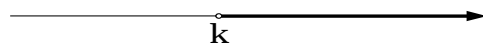
例 9：已知洗衣肥皂每塊 5 元，香皂每塊 9 元，建宏帶了 50 元去買了 x 塊洗衣肥皂和 y 塊香皂，每種至少買一塊，則：(1)依題意可列出一個二元一次不等式為_____；(2)建宏共有_____種買法？

6. 一元一次不等式的圖解：將不等式的解表示在數線上

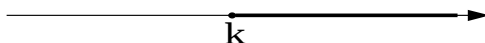
☆不等式為「 $>$ 、 $<$ 」時，邊界點以空心「○」表示不含該點

不等式為「 $\geq$ 、 $\leq$ 」時，邊界點以實心「●」表示含該點

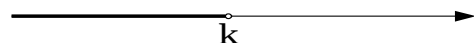
例 1： $x > k$ 的圖解為



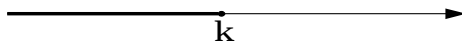
$x \geq k$ 的圖解為



$x < k$ 的圖解為

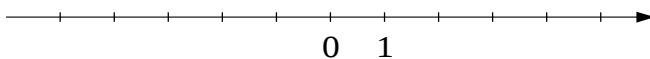


$x \leq k$ 的圖解為

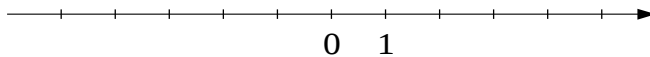


例 2：請在數線上圖示下列各不等式的解：

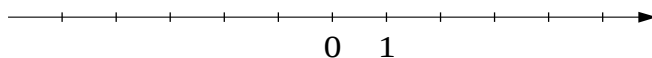
(1) $x > 3$



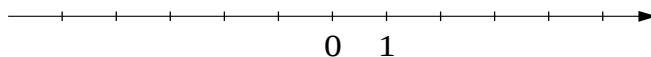
(2) $x \leq 4$



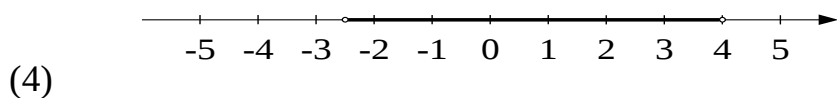
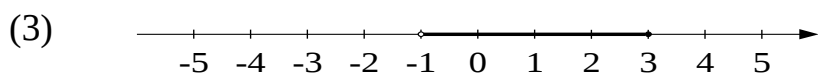
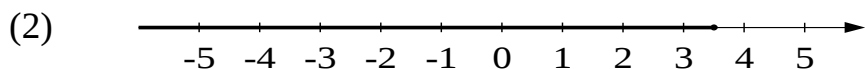
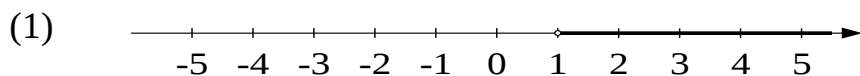
(3) $-3 < x < 1$



(4) $-4 \leq x < 3$

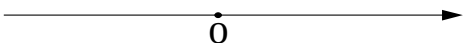


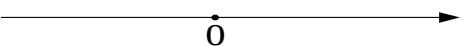
例 3：請以 x 的不等式，表示下列各題數線上的圖示

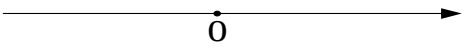


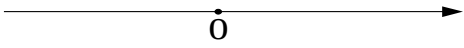
7. 解一元一次不等式：運算法則：等量公理

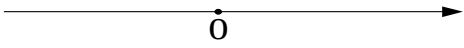
例 1：解下列各一元一次不等式，並圖示其解：

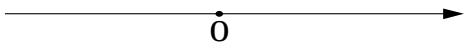
(1) $x - 3 > -4$ 

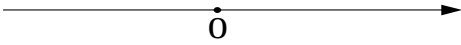
(2) $x + 6 \leq 11$ 

(3) $12 \geq x + 7$ 

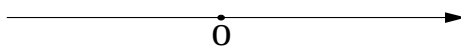
(4) $3x < 9$ 

(5) $-2x \leq 8$ 

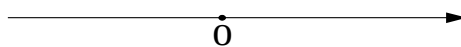
(6) $\frac{1}{5}x > -1$ 

(7) $-\frac{2}{3}x < -4$ 

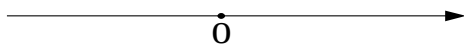
(8) $2x - 1 \geq 7$



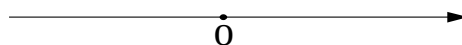
(9) $-3x - 7 < 5$



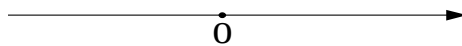
(10) $\frac{1}{4}x + 3 < 5$



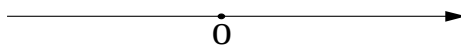
(11) $2 - (3 + 3x) < 5 - (2 - x)$



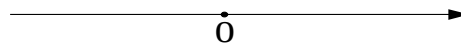
(12) $3(x + 2) - 4 \geq -7$



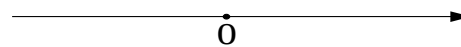
(13) $-4(x + 3) < -18 - x$



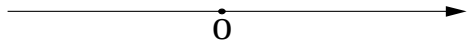
(14) $9 > -4(x - 1) + 1$



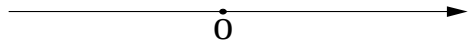
(15) $2x - 6 \geq 5x + 9$



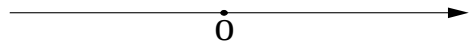
$$(16) \quad \frac{2}{3}x + 1 \leq \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$



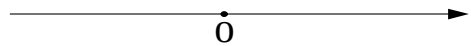
$$(17) \quad \frac{1}{3}(x+2) > \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$



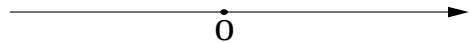
$$(18) \quad x + 7 \geq \frac{3}{4}x - 8$$



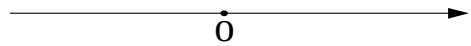
$$(19) \quad \frac{2x-4}{3} \geq \frac{x+3}{4}$$



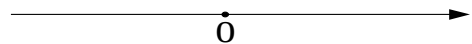
$$(20) \quad -5 < 2x + 3 \leq 7$$



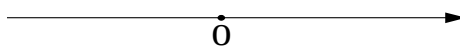
$$(21) \quad 17 \leq \frac{x}{10} + 7 < 32$$



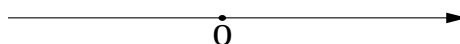
$$(22) \quad 35 > -3x + 5 \geq -7$$



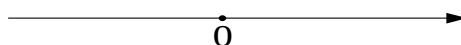
(23) $2x - 3 < 6 \leq 3x + 3$



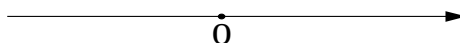
(24) $3 + x > -1 \geq 1 - 3x$



(25) $1 - x > 2(2x - 1) \geq 3x - 14$



例 2：已知 x 為正整數，解不等式 $-1 < 2x + 5 < 12$ ，並在數線上圖示其解



例 3：已知 x 為正數，解不等式 $\frac{1}{2}(x - 3) \geq \frac{1}{4}(3x - 4)$

例 4：阿水賣水果，某次進貨一批，總價是 15600 元，若在零售時每個賣 18 元，他至少要賣多少個才能收回本錢？

例 5：一矩形的長為 $(x+3)$ 公分，寬為 5 公分，面積小於 45 平方公分，則：(1)求 x 的大小範圍為_____；(2)若長大於寬，求 x 的大小範圍為_____

例 6：一矩形的長是 $(2x+5)$ 公分，寬是 8 公分，面積不大於 72 平方公分，則：(1) x 的範圍為_____；(2) x 的最大整數為_____， x 的最小整數為_____；(3)周長最大為_____公分

例 7：若有一梯形上底為 $(x+4)$ 公分，下底為 $(3x-5)$ 公分，若高為 7 公分，而梯形面積不大於 84 平方公分，則 x 的範圍為

例 8：某等腰三角形的一個底角小於 40° ，求其頂角的大小範圍為

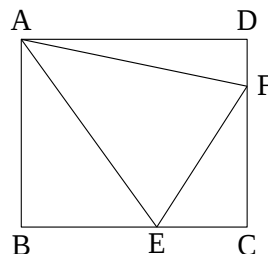
例 9：某等腰三角形的頂角小於 80° ，則其一個底角的大小範圍為

例 10：兄弟二人，兄目前儲蓄 2500 元，弟目前儲蓄 500 元，自下月起每月兄儲蓄 250 元，弟儲蓄 200 元，問_____個月後，兄所儲蓄的錢，才會少於弟所儲蓄的錢的 3 倍

例 11：科學館入場券每張 100 元，如果團體買 50 張(含)以上，票價打八折；如果團體買 100 張(含)以上，票價打七折，則：(1) 若某團體的人數不足 50 人，用八折價買 50 張入場券，比依實際人數買票還便宜，請問此團體至少有_____人？(2) 若另一團體的人數超過 50 人，但不足 100 人，用七折價買 100 張入場券，比依實際人數買票打八折還便宜，請問此團體最少有_____人？

例 12：已知甲的體重為 x 公斤，乙的體重比甲的體重大 1 公斤，丙的體重比乙的體重大 2 公斤，如果三人體重的總和不超過 160 公斤，求 x 的範圍為_____

例 13：如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{AD}=6$ ， $\overline{CF}=3$ ， E 點在 $\overline{BC}$ 上移動，如果 $\triangle AEF$ 的面積小於 10，假設 $\overline{EC}=x$ ，求 x 的範圍為_____



例 14：滿足一元一次不等式 $3-5x < 19-8x$ 的最大整數解為_____

例 15：滿足不等式 $3(1-3x) < 4(x-6)-20$ 的最小整數解為_____

例 16：若 $x=2$ ， $y=-3$ 滿足二元一次不等式 $k+y \leq 5x-6$ ，則 k 的範圍為_____

例 17：若 x 為整數，且滿足不等式 $3x-7 > 3-x$ ，則 $2x+5$ 之值可能為下列哪一數？(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13

例 18：滿足不等式 $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+4}{4} > -\frac{27}{4}$ 的最小整數解為_____

例 19：不等式 $2(3x-5) \leq 3(x+1)-1$ 的正整數解為_____

例 20：設 $a < 1$ ，求不等式 $ax + a - x < 1$ 的解為_____

例 21：不等式 $2x - 6 \leq ax + 9$ 的解為 $x \geq -5$ ，求 $a =$ _____

例 22：不等式 $ax + 8 \geq 3(2x - 1) + (x - 1)$ 的解為 $x \leq 6$ ，求 $a =$ _____

例 23：設 $1 < x < 5$ ，求 $2x - 3$ 的範圍為_____

例 24：設 $-3 < x < 5$ ，且 $P = \frac{1}{2}(3x - 1) + 4$ ，求 P 的範圍為_____

例 25：設 $-1 < x < 3$ ，且 $P = \frac{1}{2}(6 - 3x) + \frac{1}{2}$ ，求 P 的範圍為_____

例 26：設 $P = -2(x+3)+10$ ，且 $2 < P < 6$ ，則 x 的範圍為_____

例 27：設 $-2 < a < 3$ ， $1 < b < 4$ ，求 $3a-2b$ 的範圍為_____

例 28：解聯立不等式 $\begin{cases} 3x+5 \geq x+17 \\ 3(2x-5) < 21 \end{cases}$ 的解為_____

例 29：解聯立不等式 $\begin{cases} 4x+10 \geq -3x-4 \\ 2x+1 < x+\frac{3}{2} \end{cases}$ 的解為_____

例 30：解聯立不等式 $\begin{cases} 3x-2(5-3x) > 8 \\ 3x > 2(2x-1)+5 \end{cases}$ 的解為_____

例 31：設一個 n 邊形內角和超過 1400° ，求 n 的最小值為_____

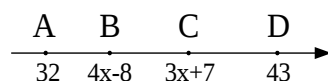
例 32：設 $\triangle ABC$ 之三邊長為 $2x-1$ 、 $2x$ 、 $2x+3$ ，求 x 的範圍為

例 33：若不等式 $-5 \leq 4x-1 \leq 15$ 的解，在數線上的圖形是線段，則此線段的長為_____

例 34：如右圖，數線上有相異四點 A 、 B 、 C 、

D ，分別表示 32 、 $4x-8$ 、 $3x+7$ 、 43 四

個數。若 x 為一正整數，且 A 、 B 、 C 、 D 的相對位置如右圖，則 x =_____



例 35：若點 $P(2a-12, -3a+9)$ 在坐標平面上第三象限內，則 a 的範圍為_____

例 36： $\begin{cases} 2x+3y=a \\ x-y=2 \end{cases}$ 兩直線相交於第四象限，則 a 的範圍為_____

例 37：9%的食鹽水 500 克，至少要加清水_____，方能使食鹽水的濃度不超過 3%

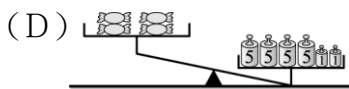
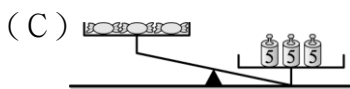
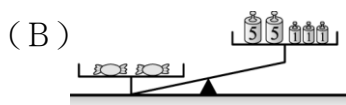
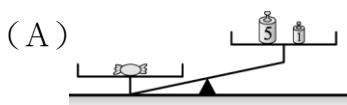
例 38：學生若干人，住若干間宿舍，如果每間住 4 人，還餘 19 人，如果每間住 6 人，則有一間沒有住滿，設宿舍有 x 間，則：
(1)學生有_____人(以 x 表示)；(2)可列出一元一次聯立不等式為_____；(3)求宿舍可能為_____間

例 39：建宏想用籬笆在一條寬度 2 公尺的長方形土地上圍出一塊矩形花圃來，希望面積最少為 5 平方公尺，但他最多只能用 15 公尺的材料做籬笆，他所能圍的花圃面積為 S 平方公尺，則花圃面積 S 的範圍為_____

例 40：某量販店的電器用品都按成本加 25% 做為定價，若「大同 DVD」每台照定價便宜 680 元售出，尚可賺成本 8% 以上，則「大同 DVD」每台成本至少_____元

例 41：某次選舉，設選票有 12000 張，有 10 位候選人參選，要選上 3 位，則一位候選人至少要得_____票，才能篤定當選？

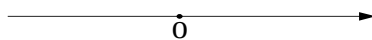
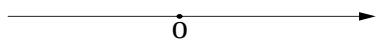
例 42：有數顆等重的糖果和數個大、小砝碼，其中大砝碼皆為 5 克、小砝碼皆為 1 克，且附圖是將糖果與砝碼放在等臂天平上的兩種情形。判斷下列哪一種情形是正確的？



8. 絕對值不等式：

設 a 為正整數，則：(1)若 $|x| < a$ ，則_____

(2)若 $|x| > a$ ，則_____



例 1：解下列絕對值不等式：

(1) $|x| < 6$

(2) $|x| \geq 3$

(3) $|x| + 3 < 8$

(4) $|x - 3| \leq 5$

$$(5) \quad |x+1| \geq 3$$

$$(6) \quad |3-2x| < 5$$

$$(7) \quad 3|x-5|-2 \geq 7$$

$$(8) \quad |5-3x| > 10$$

例 2：將不等式 $|2x+5| < 7$ 變為 $a < x < b$ 的形式，則 $b = \underline{\hspace{2cm}}$

例 3：不等式 $|x-a| \leq b$ 的解為 $-3 \leq x \leq 5$ ，則：(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；(2) 求不等式 $ax+1 > 3x-b$ 的解為 $\underline{\hspace{2cm}}$

例 4：設 $a < 0$ ， $b > 0$ ，若不等式 $|ax+1| < b$ 的解為 $-3 < x < 4$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$