旋轉矩陣

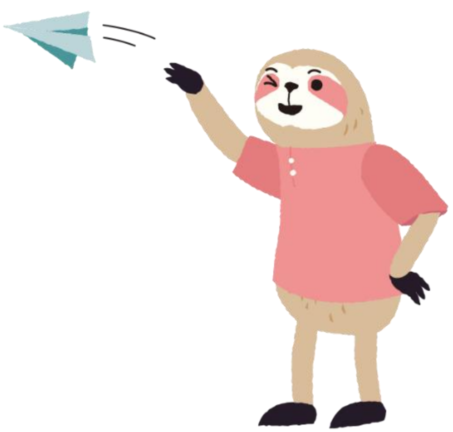
在坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x', y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

這類矩陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 稱為旋轉矩陣。

對應課本P. 229

下面是旋轉變換的一個應用。



對應課本P. 230

例題

5. 已知正三角形 OPQ 中二頂點坐標為 $O(0, 0), P(4, 2)$，求頂點 Q 的坐標。

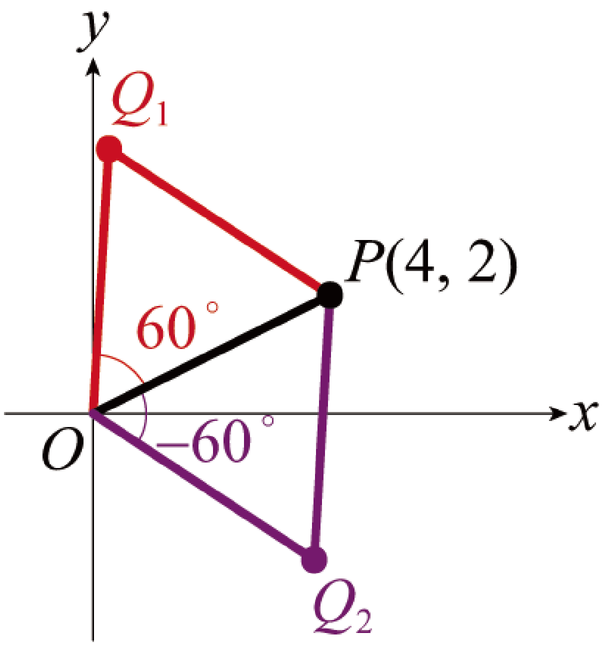
解：

如右圖，

因為 $\triangle OPQ_1$ 與 $\triangle OPQ_2$ 都是正三角形，

所以所求的頂點 Q 有二解，

分別計算如下。



對應課本P. 230

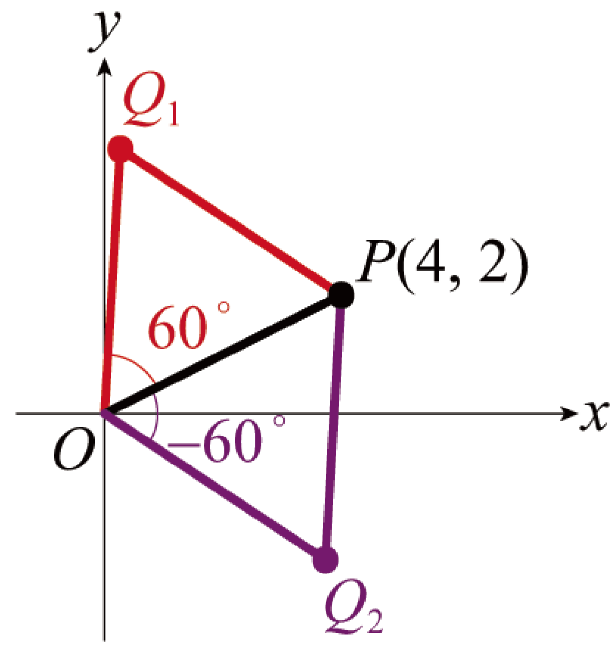
例題

5. 已知正三角形 OPQ 中二頂點坐標為 $O(0, 0), P(4, 2)$，求頂點 Q 的坐標。

解：①以 O 為中心，將 P 點逆時針旋轉 60° 後得 Q_1 點。利用旋轉矩陣，計算

$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$



得 Q_1 的坐標為 $\left(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}\right)$。

對應課本P. 230

例題

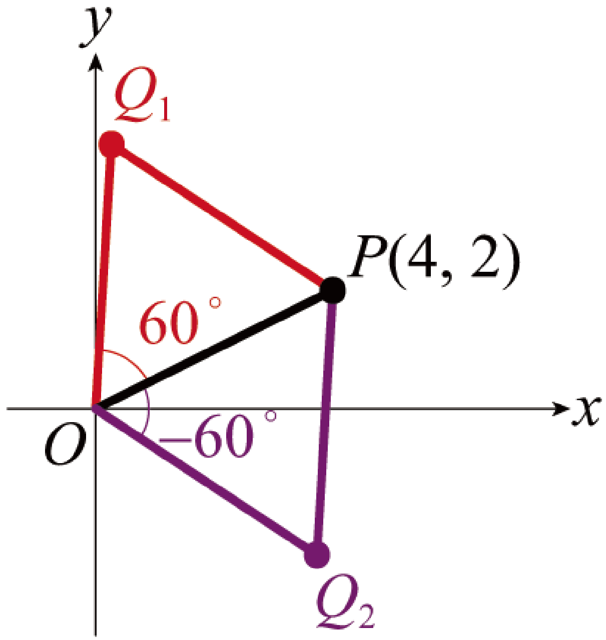
5. 已知正三角形 OPQ 中二頂點坐標為 $O(0, 0)$, $P(4, 2)$，求頂點 Q 的坐標。

解：②以 O 為中心，將 P 點順時針旋轉 60° 後得 Q_2 點。

利用旋轉矩陣，計算

$$\begin{bmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1-2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$



得 Q_2 的坐標為 $\left(2+\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3}\right)$。

對應課本P. 230

例題

5. 已知正三角形 OPQ 中二頂點坐標為 $O(0, 0)$, $P(4, 2)$，求頂點 Q 的坐標。

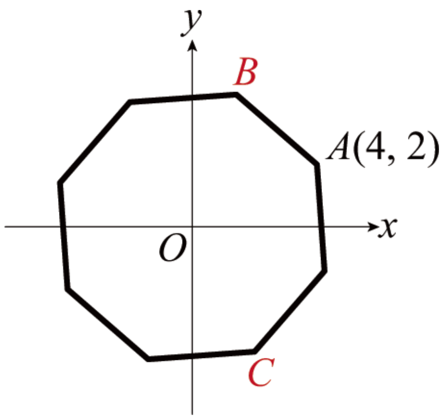
解：

綜合①與②所得，

頂點 Q 的坐標為 $\left(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}\right)$ 或 $\left(2+\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3}\right)$。

隨堂

如右圖，已知中心為原點 O 的正八邊形之一個頂點為 $A(4, 2)$，求此正八邊形的另二個頂點 B 與 C 的坐標。（小提醒：直線 BC 不垂直 x 軸）



解：

(1) 以 O 為中心，將 A 點逆時針旋轉 45° 後得 B 點。

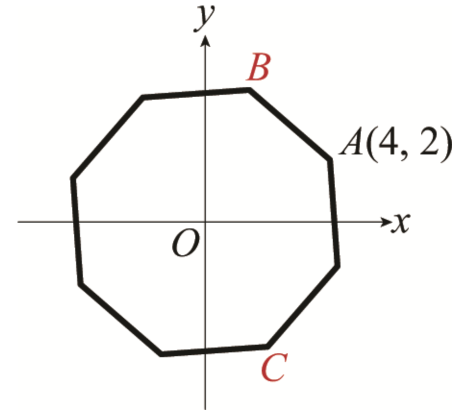
利用旋轉的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

得 B 的坐標為 $\left(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$。

隨堂

如右圖，已知中心為原點 O 的正八邊形之一個頂點為 $A(4, 2)$，求此正八邊形的另二個頂點 B 與 C 的坐標。（小提醒：直線 BC 不垂直 x 軸）



解：

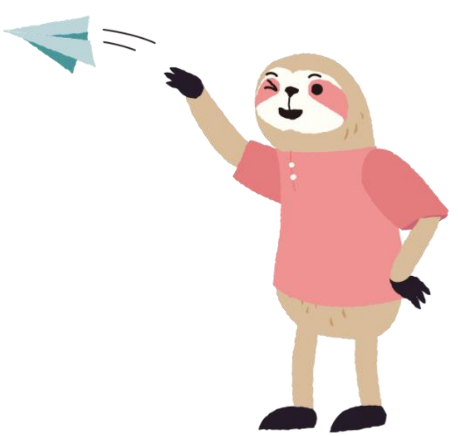
(2) 以 O 為中心，將 A 點順時針旋轉 90° 後得 C 點。

利用旋轉的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

得 C 的坐標為 $(2,-4)$。

來做一題結合伸縮與旋轉的線性變換。

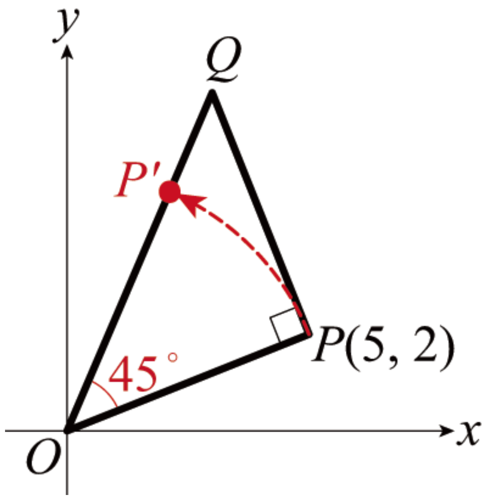


例題

6. 在坐標平面上，$O(0, 0)$, $P(5, 2)$，且 Q 點在第一象限。已知 $\triangle OPQ$ 為等腰直角三角形且 $\angle P=90°$，求 Q 的坐標。

解：

如右圖，分二步驟計算如下。



①以 O 為中心，

將 P 點逆時針旋轉 45° 後得 P' 點，

而且 P' 落在 $\overline{OQ}$ 上

（因為 $\angle POQ=45°$）。

利用旋轉矩陣，計算

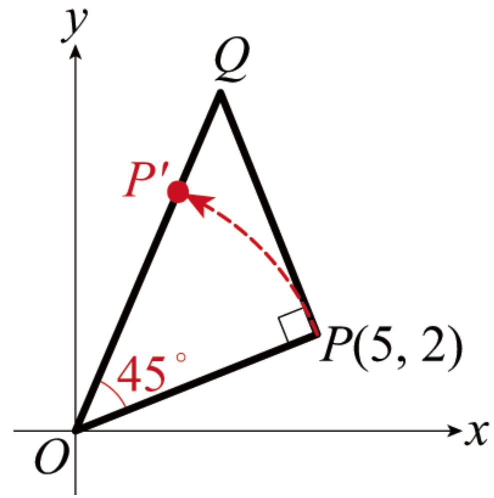
$$\begin{bmatrix}\cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 \\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 \\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

對應課本P. 231

例題

6. 在坐標平面上，$O(0, 0)$, $P(5, 2)$，且 Q 點在第一象限。已知 $\triangle OPQ$ 為等腰直角三角形且 $\angle P = 90°$，求 Q 的坐標。

解：



得 P' 的坐標為 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)$。

②因為 $\overline{OQ} = \sqrt{2}\,\overline{OP} = \sqrt{2}\,\overline{OP'}$，

所以以 O 為中心，

將 P' 點沿著 x 軸方向伸縮 $\sqrt{2}$ 倍，

沿著 y 軸方向伸縮 $\sqrt{2}$ 倍後得 Q 點；

利用伸縮矩陣，計算 $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{7\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

得 Q 的坐標為 $(3, 7)$。

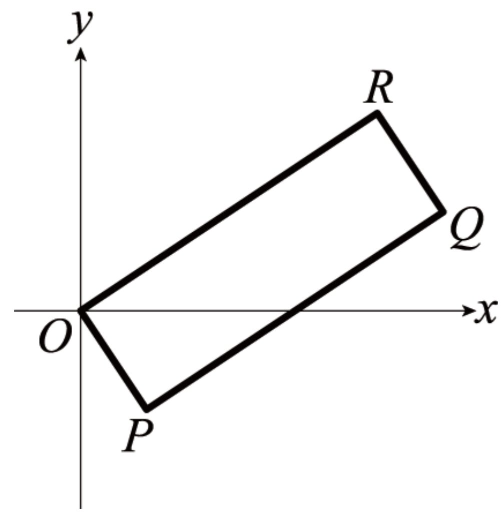
對應課本P. 231

隨堂

在坐標平面上，$O(0, 0)$, $P(2, -3)$，且 Q 與 R 兩點都在第一象限。設 $OPQR$ 為矩形且 $\overline{OP} : \overline{OR} = 1 : 3$。

(1) 求 R 的坐標。

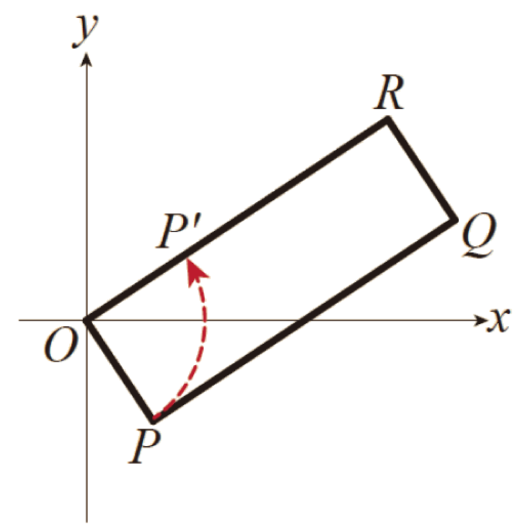
(2) 求 Q 的坐標。



解：

(1) 分二步驟計算 R 的坐標如下：

①以O為中心，將 P 點逆時針旋轉 $90°$ 後得 P' 點，而且 P' 落在 $\overline{OR}$ 上（因為 $\angle POR = 90°$），利用旋轉矩陣，計算



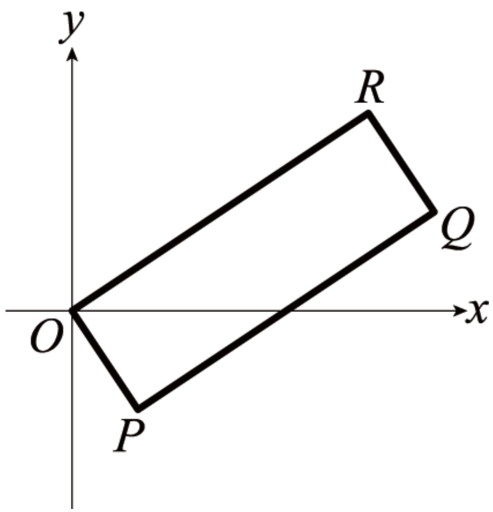
龍騰文化
肯定自己 肯定不同

隨堂

在坐標平面上，$O(0, 0)$, $P(2, -3)$，且 Q 與 R 兩點都在第一象限。設 $OPQR$ 為矩形且 $\overline{OP}:\overline{OR}=1:3$。

(1) 求 R 的坐標。

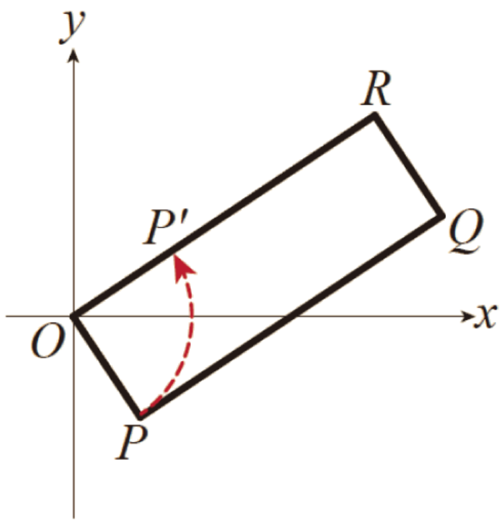
(2) 求 Q 的坐標。



解：

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



得 P' 的坐標為 $(3, 2)$。

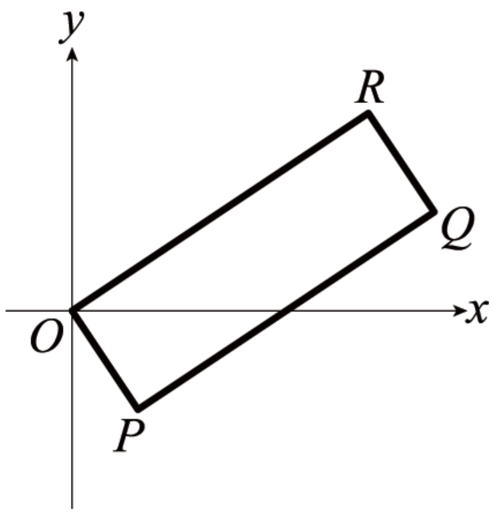
對應課本P. 232

隨堂

在坐標平面上，$O(0, 0)$, $P(2, -3)$，且 Q 與 R 兩點都在第一象限。設 $OPQR$ 為矩形且 $\overline{OP} : \overline{OR} = 1:3$。

(1) 求 R 的坐標。

(2) 求 Q 的坐標。



解：

②因為 $\overline{OR} = 3\overline{OP} = 3\overline{OP'}$，所以以 O 為中心，

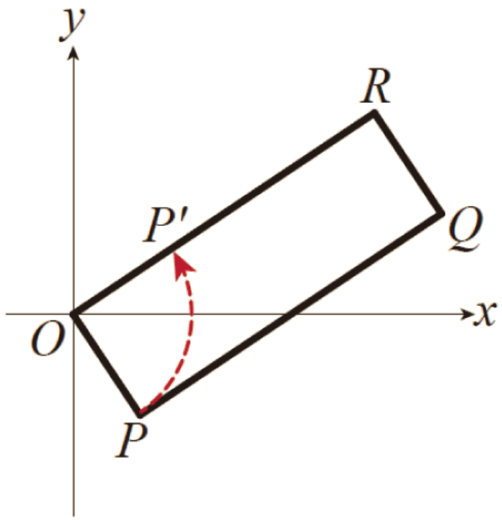
將 P' 點沿著 x 軸方向伸縮 3 倍，

沿著 y 軸方向伸縮3倍後得R點，

利用伸縮矩陣，

計算 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$，

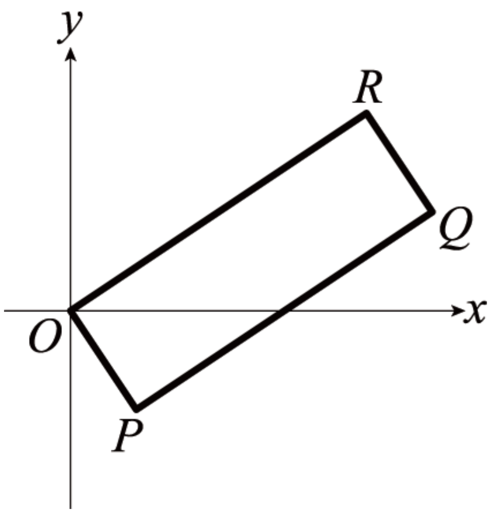
得 R 的坐標為 $(9, 6)$。



對應課本P. 232

隨堂

在坐標平面上，$O(0, 0)$, $P(2, -3)$，
且 Q 與 R 兩點都在第一象限。
設 $OPQR$ 為矩形且 $\overline{OP} : \overline{OR} = 1 : 3$。
(1) 求 R 的坐標。
(2) 求 Q 的坐標。



解：

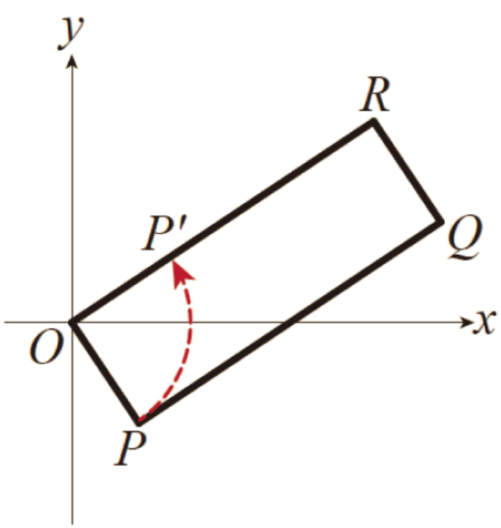
(2) 設 Q 的坐標為 (a, b)。

因為 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$，

即 $\left(a-2, b-(-3)\right) = (9, 6)$，

所以 $a = 11, b = 3$。

故 Q 的坐標為 $(11, 3)$。



對應課本P. 232

（三）鏡射

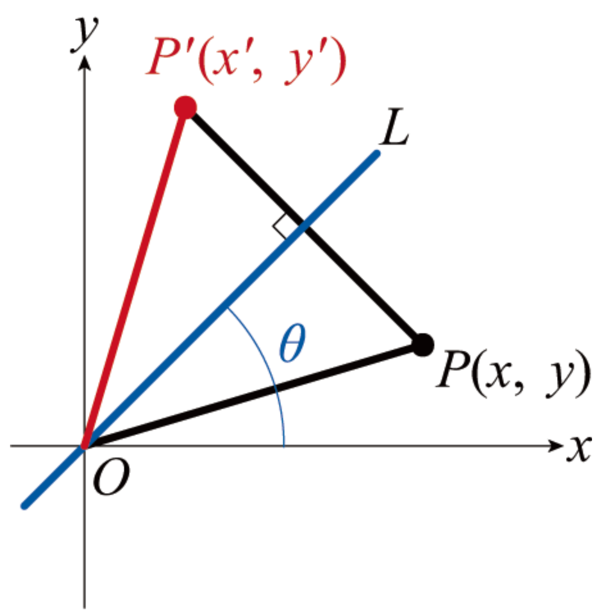
下圖是常見的城市倒影照片，

使用的影像編輯手法即為鏡射。

接下來說明坐標平面上的鏡射。

對應課本P. 232

在坐標平面上，直線 L 是過原點且斜角為 θ 的直線。
若點 $P(x, y)$ 對於直線 L 的對稱點為 $P'(x', y')$ ，
如圖(a)所示，則 x', y' 該如何求呢？



(a)

對應課本P. 232

在圖(b)，設 α 為 $\overline{OP}$ 與 x 軸正向的夾角。

首先，

將點 $P(x\,,\,y)$ 對於 x 軸作對稱，得對稱點 $Q\left(x,-y\right)$。

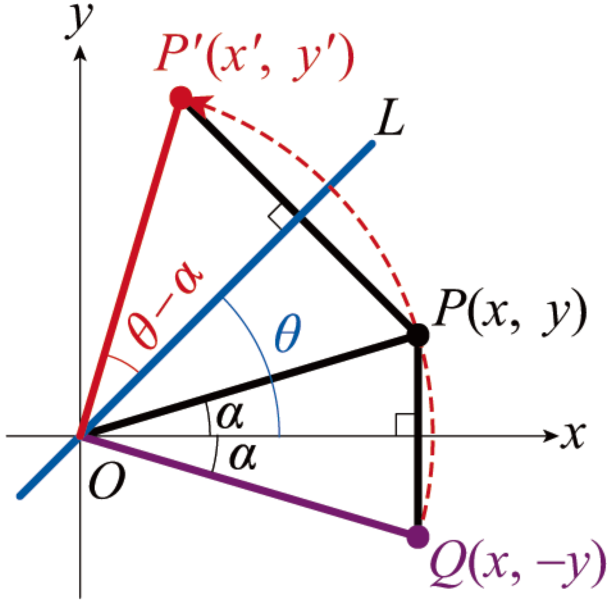
其次，因為 $\overline{OQ}=\overline{OP}=\overline{OP'}$，

且 $\angle QOP'=\alpha+\theta+\left(\theta-\alpha\right)=2\theta$ ，

所以， 以原點 O 為中心，

將 $Q(x, -y)$ 點依逆時針方向

旋轉 2θ 後可得點 $P'(x', y')$ 。



(b)

最後，利用旋轉矩陣，得

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos 2\theta)x + (\sin 2\theta)y \\ (\sin 2\theta)x + (-\cos 2\theta)y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

我們將以上這種變換稱為對直線 L 的**鏡射**，

並將結果整理如下。