



好教素材

- 課本 WORD 備課素材庫 / 課習教 WORD
- 習作 WORD 備課素材庫 / 課習教 WORD
- 備課用書 WORD 備課素材庫 / 課習教 WORD
- 習作教用本 WORD 備課素材庫 / 課習教 WORD
- 課本 PDF 備課素材庫 / 課習教 PDF
- 習作 PDF 備課素材庫 / 課習教 PDF
- 備課用書 PDF 備課素材庫 / 課習教 PDF
- 習作教用本 PDF 備課素材庫 / 課習教 PDF
- 課本 PPT 教學 PPT
- 習作 PPT 教學 PPT
- 可修改圖檔 備課素材庫 / 可修改圖檔
- 教具掛圖 備課素材庫 / 教具圖檔
- 課本、習作電子書 電子書



好看動畫

(頁碼為課本頁碼)

1-1

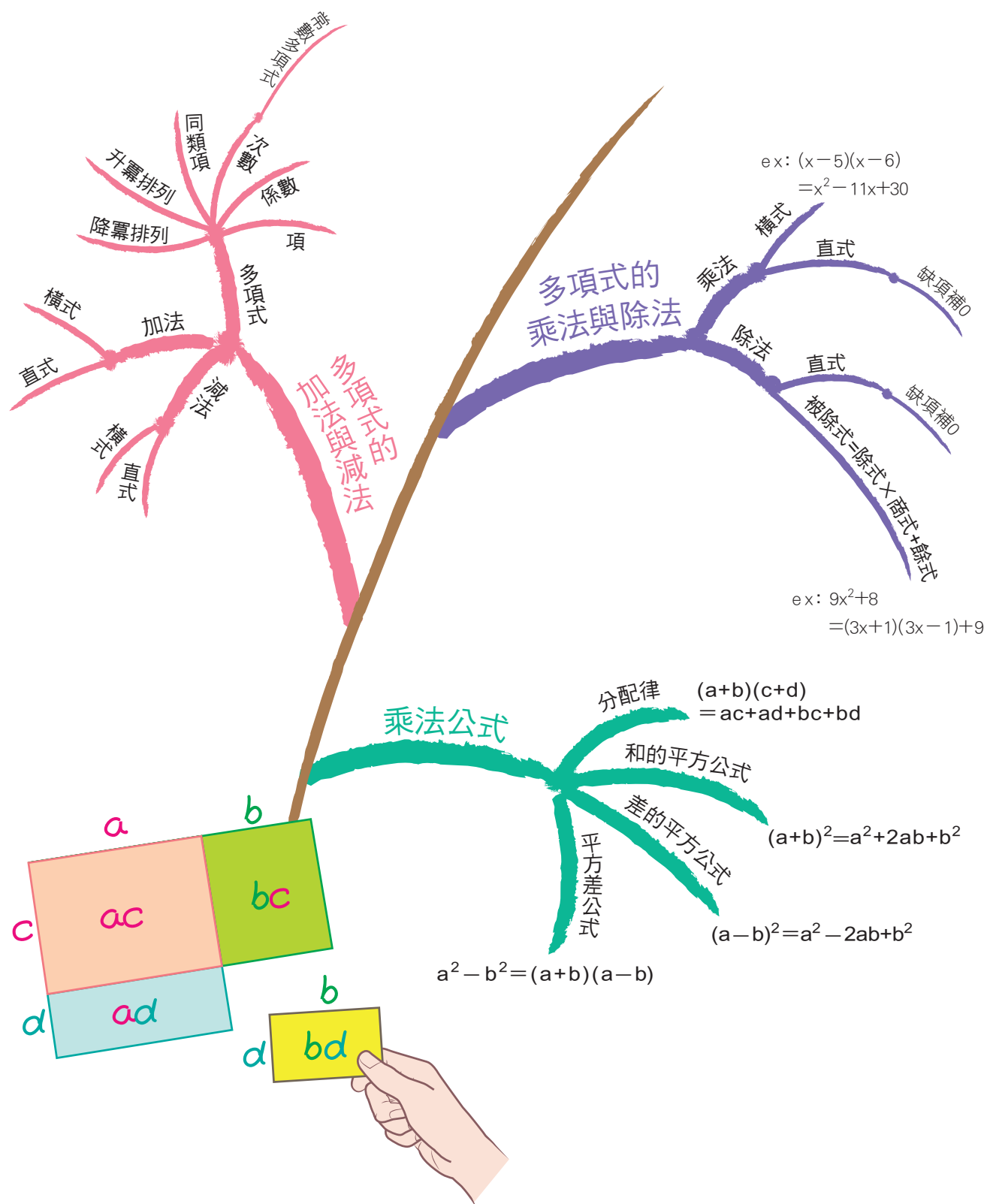
- P6 分配律 教學動畫 (2"47)
- P9 和的平方公式 教學動畫 (1"18)
- P12 差的平方公式 教學動畫 (1"39)
- P14 平方差公式 教學動畫 (1"31)

1-2

- P21 多項式 教學動畫 (1"26)
- P22 多項式的項、係數與次數 教學動畫 (4"07)
- P24 多項式的運算 教學動畫 (2"57)
- P29 多項式的運算 概念動畫 (2"57)

1-3

- P34 多項式的乘法 I 教學動畫 (1"46)
- P35 多項式的乘法 II 教學動畫 (1"47)
- P41 多項式的除法 I 教學動畫 (2"55)
- P45 多項式的除法 II 教學動畫 (1"02)
- P48 被除式與除式的關係 教學動畫 (1"15)





乘法公式與多項式

教學提醒 ①

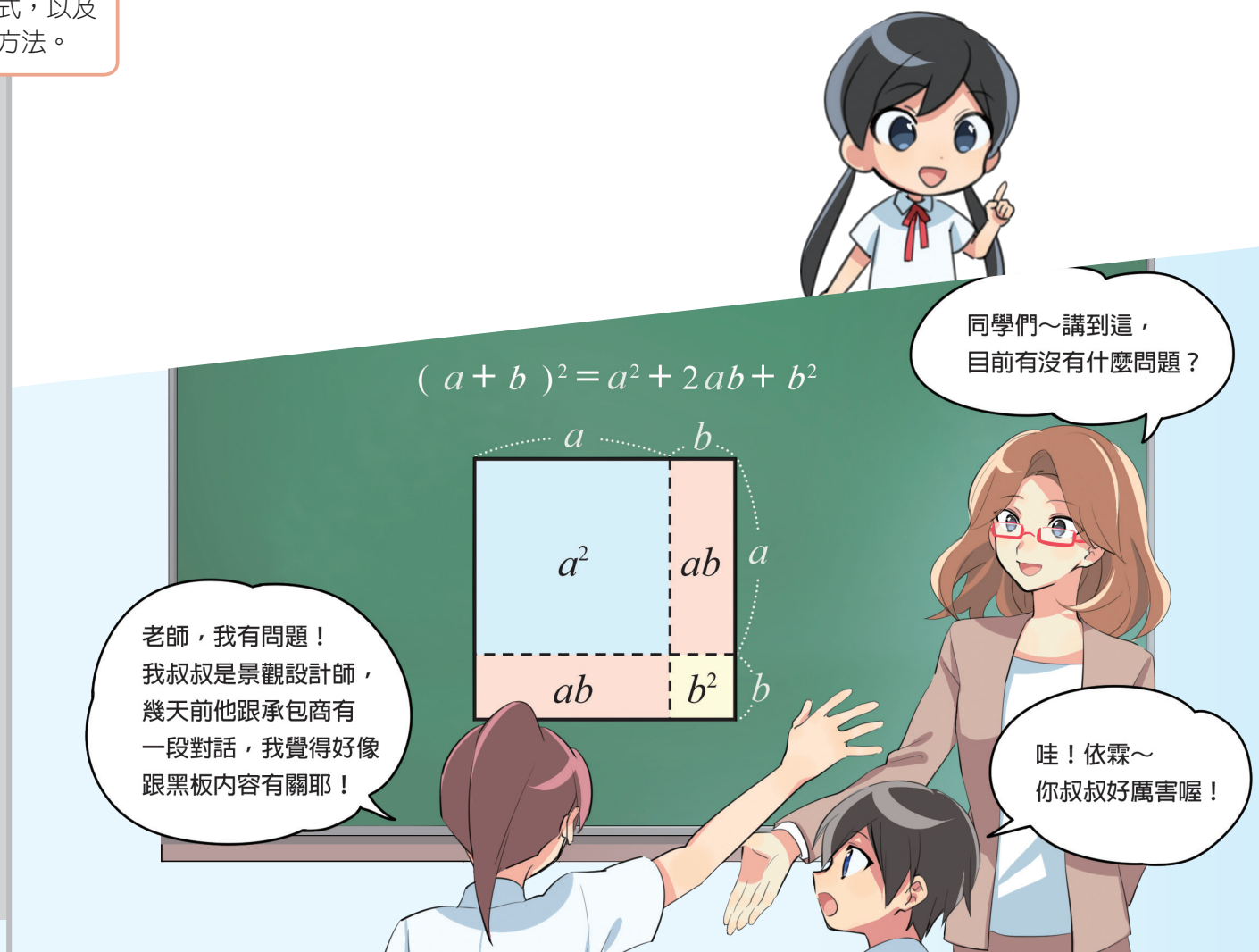
乘法公式不但有助於數與式子間之計算，亦可應用於因式分解、解方程式，以及引入配方法。

①

1-1 乘法公式

1-2 多項式的加法與減法

1-3 多項式的乘法與除法



歷年試題統計

	基測	會考											
	90～102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114
1-1	10	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1-2	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1-3	11	1	1	2	1	0	1	1	1	2	0	0	0

本章議題 學習目標



P 40

家庭



P 16

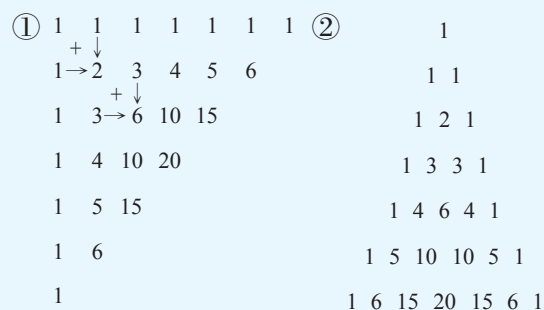
P 19

環境



數學典故 巴斯卡三角形

巴斯卡是 17 世紀法國數學家、物理學家，也是流體力學祖師，射影幾何學、機率學的創建者之一，第一個使用數學歸納法，發明加法計算機。如右圖，寫出一行和一列的 1，在各個位置填數字，每個位置的數字都是它上面一個數和左邊一個數的和。把①順時針轉 45° 放正，就得到②的數字三角形，稱為巴斯卡三角形。



檢測概念

1.~4.

復習第一冊的分配律，並銜接課文中用長方形面積推導乘法公式。



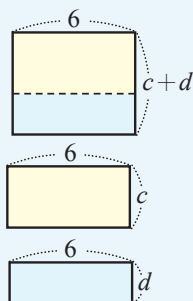
溫故啟思

① 長為 6、寬為 $c+d$ 的長方形面積為 $6(c+d)$ 。

② 長為 6、寬為 c 的長方形面積為 $6c$ 。

③ 長為 6、寬為 d 的長方形面積為 $6d$ 。

④ 由①~③可以得知 $6(c + \underline{d}) = 6c + \underline{6d}$ 。



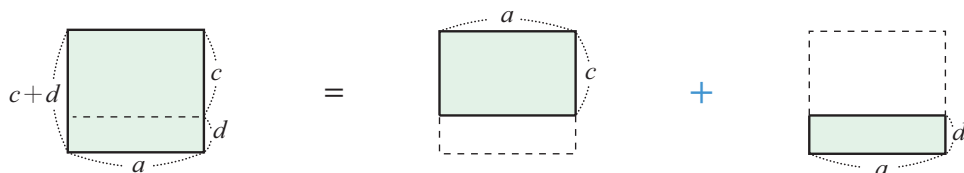
1 分配律

動畫 分配律

教學提醒 ①

由課文了解「單項 $\times$ 兩項」的分配律，接著學習「兩項 $\times$ 兩項」的分配律。

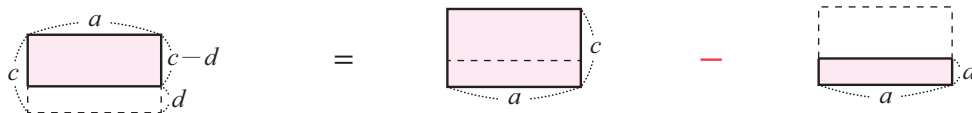
① 一個長為 a 、寬為 $(c+d)$ 的長方形，其面積為 $a \times (c+d)$ ，省略乘號「 $\times$ 」可記為 $a(c+d)$ 。將長方形的寬分成 c 、 d 兩段，則長方形可分成兩個小長方形，其面積分別為 ac 、 ad ，可得



$$a(c+d) = ac + ad$$

或是 $(c+d)a = ac + ad$

一個長為 a 、寬為 $(c-d)$ 的長方形，其面積為 $a(c-d)$ 。可視為一個長為 a 、寬為 c 的長方形減去一個長為 a 、寬為 d 的長方形，由面積的關係可得



$$a(c-d) = ac - ad$$

或是 $(c-d)a = ac - ad$

學習內容

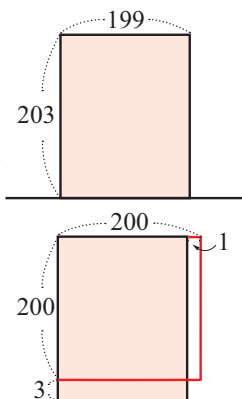
A-8-1 二次式的乘法公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ；
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ； $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ；
 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 。

姜丙要油漆一面寬 199 公分，高 203 公分的牆壁，由於寬與高都接近 200 公分，因此油漆面積會接近 $200 \times 200 = 40000$ （平方公分）。

根據以往的經驗，一罐油漆足夠漆 40000 平方公分以下的面積，但超過 40000 平方公分時需要多準備一罐，那麼姜丙這次需要準備幾罐油漆？

$$\begin{aligned}
 199 \times 203 &= (200 - 1) \times 203 && \text{由 } (a-b) \times c = ac - bc \\
 &= 200 \times 203 - 1 \times 203 \\
 &= 200 \times (200 + 3) - 203 && \text{由 } a \times (b+c) = ab + ac \\
 &= 200^2 + 200 \times 3 - 203 \\
 &= 200^2 + 397
 \end{aligned}$$

所以這面牆壁油漆面積會超過 40000 平方公分，因此姜丙需要準備兩罐油漆。



一個長為 $a+b$ ，寬為 $c+d$ 的長方形，其面積為 $(a+b)(c+d)$ 。若將長方形的長分成 a 、 b 兩段，寬分成 c 、 d 兩段，則長方形可被分成四個小長方形，其面積分別為 ac 、 ad 、 bc 與 bd ，因此得知

$$\begin{aligned}
 (a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd \\
 (a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd
 \end{aligned}$$

事實上，對於任意數 a 、 b 、 c 、 d ，我們也可以利用分配律得到相同的結論：

$$\begin{aligned}
 (a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) \\
 &= ac + ad + bc + bd
 \end{aligned}$$

可以先將 $(c+d)$ 看成 x ，
則 $(a+b)x = ax + bx$ 。



分配律

設 a 、 b 、 c 、 d 是任意數，則 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 。

利用分配律將上面左式運算成右式的過程，稱為展開 $(a+b)(c+d)$ 。

類題演練 配合課文

若 $a=12$ 、 $b=-2$ 、 $c=4$ 、 $d=-9$ ，分別求 $(a+b)(c+d)$ 與 $ac+ad+bc+bd$ 的值，並比較兩個值是否相等。

解 ▶ 相等。

例1 利用分配律求值

教學提醒 1

學習利用分配律簡化數的運算。

1 利用分配律計算下列各式：

(1) 102×108 (2) 203×99

解

$$\begin{aligned} (1) \quad 102 \times 108 &= (100 + 2)(100 + 8) \\ &= 100 \times 100 + 100 \times 8 + 2 \times 100 + 2 \times 8 \\ &= 10000 + 800 + 200 + 16 = 11016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 203 \times 99 &= (200 + 3)(100 + (-1)) \\ &= 200 \times 100 + 200 \times (-1) + 3 \times 100 + 3 \times (-1) \\ &= 200 \times 100 - 200 \times 1 + 3 \times 100 - 3 \times 1 \\ &= 20000 - 200 + 300 - 3 = 20097 \end{aligned}$$

(1) 分配律乘開時要注意正負號變化。

(2) 也可以用 203×99

$$\begin{aligned} &= (200 + 3)(100 - 1) \\ &= 200 \times 100 - 200 \times 1 + 3 \times 100 - 3 \times 1 \\ &= 20097 \end{aligned}$$



隨堂練習

教學提醒 2

老師可視情況讓學生比較，化為假分數後再乘開，與利用分配律計算的差異。

2 在空格中填入適當的數，並計算下列各式：

$$\begin{aligned} (1) \quad 97 \times 104 &= (100 - 3)(100 + \underline{4}) \\ &= 100 \times 100 + 100 \times \underline{4} - \underline{3} \times 100 - \underline{3} \times \underline{4} \\ &= \underline{10088} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 5.5 \times 8.2 &= (5 + \underline{0.5})(8 + \underline{0.2}) \\ &= 5 \times 8 + 5 \times \underline{0.2} + \underline{0.5} \times 8 + \underline{0.5} \times \underline{0.2} \\ &= \underline{45.1} \end{aligned}$$

有時候我們也可以利用分配律來計算帶分數乘法，例如：

$$\begin{aligned} 6\frac{1}{5} \times 5\frac{1}{6} &= (6 + \frac{1}{5})(5 + \frac{1}{6}) = 6 \times 5 + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times 5 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \\ &= 30 + 1 + 1 + \frac{1}{30} = 32\frac{1}{30} \end{aligned}$$

類題演練 配合例題 1

在空格中填入適當的數，並計算下列各式：

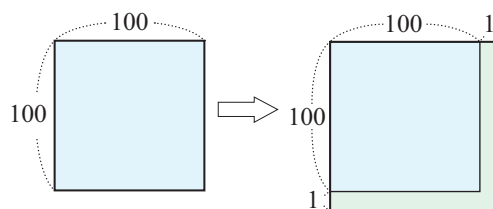
$$\begin{aligned} (1) \quad 97 \times 98 &= (100 - 3)(100 - \underline{2}) = 100 \times 100 - 100 \times \underline{2} - \underline{3} \times 100 + \underline{3} \times \underline{2} \\ &= 10000 - \underline{200} - 300 + \underline{6} = \underline{9506} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 2.5 \times 5.2 &= (2 + \underline{0.5})(5 + \underline{0.2}) = 2 \times 5 + 2 \times \underline{0.2} + \underline{0.5} \times 5 + \underline{0.5} \times \underline{0.2} \\ &= 10 + \underline{0.4} + 2.5 + \underline{0.1} = \underline{13} \end{aligned}$$

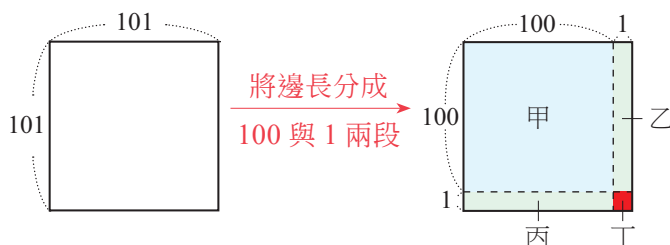
動畫 和的平方公式

2 和的平方公式

在本章開頭 (P.5) 的例子中，承包商認為「現有邊長為 100 公尺的正方形，如果將邊長增加 1 公尺後，面積只有增加 1 平方公尺。」這樣的說法正確嗎？我們來看下面的討論。



如下圖，邊長為 101 的正方形，將邊長分成 100 與 1 兩段，則正方形可被分成甲、乙、丙、丁四個長方形。



此時甲的面積為 100^2 、乙和丙的面積均為 100×1 、而丁的面積為 1^2 。

從圖形的分割我們可以知道 101^2 比 100^2 多出乙、丙、丁這三個長方形，因此

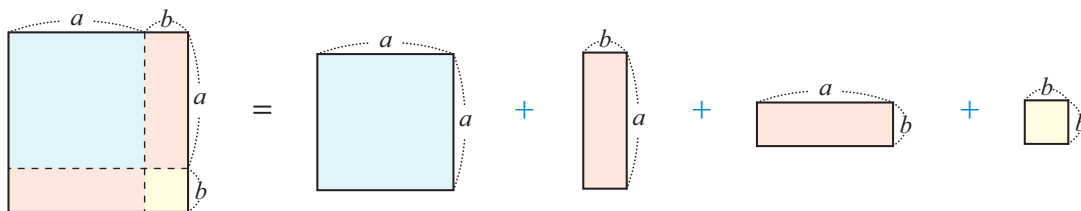
$$\begin{aligned}
 101^2 &= \text{甲} + \text{乙} + \text{丙} + \text{丁} \\
 &= 100^2 + 100 \times 1 + 100 \times 1 + 1^2 \\
 &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{甲}}}{100^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{乙} + \text{丙}}}{2 \times (100 \times 1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{丁}}}{1^2}
 \end{aligned}$$

很明顯的，面積不只多 1 平方公尺，而是多了 $2 \times (100 \times 1) + 1^2$ 平方公尺。

教學提醒 ①

此節介紹的四個公式，都由長方形面積切入，先介紹正數的情況，再擴大到負數。

① 接下來討論一般的情況，一個邊長為 $a+b$ 的正方形，其面積為 $(a+b)^2$ 。將邊長分成 a 、 b 兩段，則正方形可被分成四個小長方形，其面積分別為 a^2 、 ab 、 ab 與 b^2 ，作法如下：（可使用附件 1 操作）



可得 $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

事實上，對於任意數 a 、 b ，我們也可以利用分配律得到相同的結論：

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

因為 $ab=ba$ ，
所以 $ab+ba=2ab$ 。



和的平方公式

設 a 、 b 是任意數，則 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。



$$\begin{aligned}(5+3)^2 &= 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 \\ &= 25 + 30 + 9 = 64\end{aligned}$$

隨堂練習

根據和的平方公式，判斷下表中的等式對或錯。若錯誤，試加以更正。

等 式	對	錯	更 正
$(4+3)^2 = 4^2 + 3^2$	☐	☒	$(4+3)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 3 + 3^2$
$(2+8)^2 = 2^2 + 2 \times 8 + 8^2$	☐	☒	$(2+8)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 8 + 8^2$
$(5+1)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 1 + 1^2$	☒	☐	
$10^2 + 2 \times 10 \times 2 + 2^2 = (10+2)^2$	☒	☐	

類題演練 配合隨堂練習

判斷下列各式是否相等，請填入「=」或「≠」：

(1) 44^2 ≠ $40^2 + 40 \times 8 + 4^2$ 。

(2) 33^2 ≠ $30^2 + 30 \times 3 + 3^2$ 。

(3) $(a+b)^2$ ≠ $a^2 + b^2$ 。

(4) $(a+b)^2$ = $(b+a)^2$ 。

延伸演練

設 $a+b=6$ ， $ab=8$ ，求 a^2+b^2 的值。

解 ▶ 20。

例 2 利用和的平方公式求值

利用和的平方公式計算下列各式：

(1) 201^2

(2) $37^2 + 2 \times 37 \times 23 + 23^2$

解 (1) $201^2 = (200 + 1)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 1 + 1^2 = 40000 + 400 + 1 = 40401$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 \end{array}$$

(2) $37^2 + 2 \times 37 \times 23 + 23^2 = (37 + 23)^2 = 60^2 = 3600$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a + b)^2 \end{array}$$

2 教學提醒

1. 先學習用和的平方公式展開，再學習和的平方公式合併。
2. 可讓學生試著拆成不同的數，並比較計算上的差異。

隨堂練習

在空格中填入適當的數，並計算下列各式：

(1) $103^2 = (\underline{100} + \underline{3})^2$
 $= (\underline{100})^2 + 2 \times \underline{100} \times \underline{3} + (\underline{3})^2$
 $= \underline{10609}$

(2) $183^2 + 2 \times 183 \times 17 + 17^2 = (183 + \underline{17})^2 = \underline{40000}$

(3) $(10\frac{1}{5})^2 = (10 + \underline{\frac{1}{5}})^2$
 $= 10^2 + 2 \times \underline{10} \times \underline{\frac{1}{5}} + (\underline{\frac{1}{5}})^2$
 $= \underline{104\frac{1}{25}}$



類題演練 配合例題 2

在空格中填入適當的數，並計算下列各式：

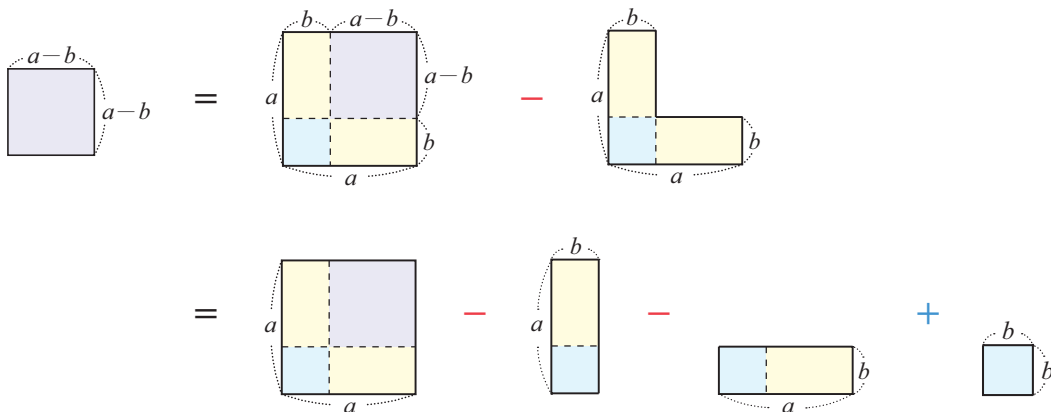
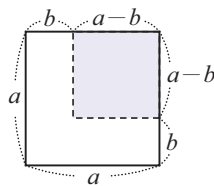
(1) $63^2 + 2 \times 63 \times 7 + 7^2 = (63 + \underline{7})^2 = \underline{4900}$

(2) $20.1^2 = (20 + \underline{0.1})^2$
 $= (\underline{20})^2 + 2 \times \underline{20} \times \underline{0.1} + (\underline{0.1})^2$
 $= \underline{404.01}$

3 差的平方公式

動畫 差的平方公式

一個邊長為 a 的正方形，如果扣除寬為 b 的 L 型區域，就可以在內部得到一個邊長為 $(a-b)$ 的小正方形，其面積為 $(a-b)^2$ ，因此我們可以用邊長為 a 的正方形面積扣除 L 型區域面積來計算 $(a-b)^2$ ，作法如下：（可使用附件 2 操作）



因此得知 $(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

教學提醒 1

為了讓學生習慣將兩個平方公式視為同一個，課文用和的平方公式推導差的平方公式，事實上，也可以用分配律直接推導出來。

1

對於任意數 a 、 b ，我們也可以利用和的平方公式得到相同的結論：

$$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2a \times (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2。$$



差的平方公式

設 a 、 b 是任意數，則 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。



$$(5-3)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$$



隨堂練習

根據差的平方公式，判斷下表中的等式對或錯。若錯誤，試加以更正。

等 式	對	錯	更 正
$(11-1)^2 = 11^2 - 1^2$	☐	☒	$(11-1)^2 = 11^2 - 2 \times 11 \times 1 + 1^2$
$(10-5)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 5 + 5^2$	☒	☐	
$(20-8)^2 = 20^2 - 20 \times 8 + 8^2$	☐	☒	$(20-8)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 8 + 8^2$
$8^2 - 2 \times 8 \times 3 + 3^2 = (8-3)^2$	☒	☐	

類題演練 配合隨堂練習

判斷下列各式是否相等，請填入「=」或「≠」：

(1) $(7-2)^2$ ≠ $7^2 - 2^2$ 。

(2) $(8-4)^2$ ≠ $8^2 - 8 \times 4 + 4^2$ 。

(3) $(9-3)^2$ = $9^2 - 2 \times 9 \times 3 + 3^2$ 。

教學補給站

利用表格計算 $(7-2)^2 = (7-2)(7-2)$ ：

	7	-2
7	49	-14
-2	-14	4

故 $(7-2)^2 = 49 + (-14) + (-14) + 4 = 25$ 。

例 3 利用差的平方公式求值

利用差的平方公式計算下列各式：

(1) 299^2 (2) $314^2 - 2 \times 314 \times 14 + 14^2$

解 (1) $299^2 = (300 - 1)^2 = 300^2 - 2 \times 300 \times 1 + 1^2 = 90000 - 600 + 1 = 89401$

$$(\overset{\uparrow}{a} - \overset{\uparrow}{b})^2 = \overset{\uparrow}{a}^2 - 2 \times \overset{\uparrow}{a} \times \overset{\uparrow}{b} + \overset{\uparrow}{b}^2$$

(2) $314^2 - 2 \times 314 \times 14 + 14^2 = (314 - 14)^2 = 300^2 = 90000$

$$\overset{\uparrow}{a}^2 - 2 \times \overset{\uparrow}{a} \times \overset{\uparrow}{b} + \overset{\uparrow}{b}^2 = (\overset{\uparrow}{a} - \overset{\uparrow}{b})^2$$

2 教學提醒

習慣上，我們在處理平方時，會利用 300、200、20、10 等容易計算平方的數，再加減一數來處理，這樣套用平方公式時比較好算，例如：
 $299 = 300 - 1$ 。

隨堂練習

利用差的平方公式計算下列各式：

(1) 98^2

$$= (100 - 2)^2$$

$$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$$

$$= 10000 - 400 + 4$$

$$= 9604$$

(2) $54^2 - 2 \times 54 \times 4 + 4^2$

$$= (54 - 4)^2$$

$$= 50^2$$

$$= 2500$$

(3) $9.7^2 = (10 - \underline{0.3})^2$

$$= 10^2 - 2 \times \underline{10} \times \underline{0.3} + (\underline{0.3})^2$$

$$= \underline{100} - \underline{6} + \underline{0.09}$$

$$= \underline{94.09}$$

3 教學提醒

老師可視情況讓學生比較，直接乘開計算與利用差的平方公式計算的差異。



類題演練 配合例題 3

在空格中填入適當的數，並計算下列各式：

$$19.9^2 = (20 - \underline{0.1})^2$$

$$= (\underline{20})^2 - 2 \times \underline{20} \times \underline{0.1} + (\underline{0.1})^2$$

$$= \underline{396.01}$$

延伸演練

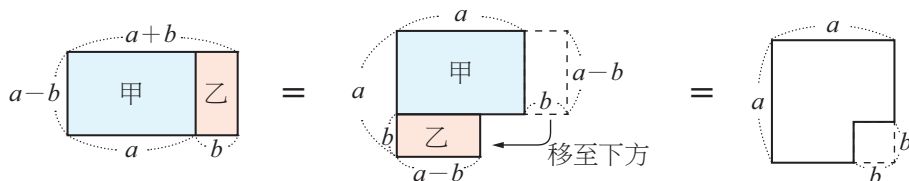
已知 $a - \frac{1}{a} = 3$ ，則 $a^2 + \frac{1}{a^2} = ?$

解 ▶ 11。

4 平方差公式

動畫 平方差公式

一個長為 $a+b$ 、寬為 $a-b$ 的長方形，其面積為 $(a+b)(a-b)$ ，我們可以將長分成 a 、 b 兩段，則長方形就可以分成甲、乙兩個小長方形。然後將長方形乙併至長方形甲的下方，作法如下：（可使用附件3操作）



由於上圖為一個缺角的正方形，其面積為 $a^2 - b^2$ ，可得 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

事實上，對於任意數 a 、 b ，我們也可以利用分配律得到相同的結論：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$



平方差公式

設 a 、 b 是任意數，則 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。



$$(5+3)(5-3) = 5^2 - 3^2$$

概念澄清

$$a^2 - b^2 \neq (a-b)^2$$



隨堂練習

根據平方差公式，判斷下表中的等式對或錯。若錯誤，試加以更正。

等 式	對	錯	更 正
$(15+5)(15-5) = 15^2 - 5^2$	☒	☐	
$(7+3)(7-3) = 7^2 + 3^2$	☐	☒	$(7+3)(7-3) = 7^2 - 3^2$
$23^2 - 3^2 = (23+3)(23-3)$	☒	☐	
$101^2 - 100^2 = (101-100)^2$	☐	☒	$101^2 - 100^2 = (101+100)(101-100)$

類題演練 配合隨堂練習

判斷下列各式是否相等，請填入「=」或「≠」：

(1) $(20+1)(20-1)$ = $20^2 - 1^2$ 。

(2) $(17+8)(17-8)$ ≠ $17^2 + 8^2$ 。

(3) $28^2 - 2^2$ = $(28+2)(28-2)$ 。

(4) $85^2 - 5^2$ ≠ $(85-5)^2$ 。

例 4 利用平方差公式求值

利用平方差公式計算下列各式：

(1) 103×97 (2) $113^2 - 13^2$ (3) $65^2 - 25$

解 (1) $103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 10000 - 9 = 9991$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \end{array}$$

(2) $113^2 - 13^2 = (113 + 13)(113 - 13) = 126 \times 100 = 12600$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{array}$$

(3) 由於 $25 = 5^2$,

因此 $65^2 - 25 = 65^2 - 5^2 = (65 + 5)(65 - 5) = 70 \times 60 = 4200$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{array}$$

1

1 教學提醒

學生對於何時使用 $(a+b)(a-b)$ $= a^2 - b^2$ 及 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 的掌握度不佳，可適時提示 a 、 b 之值各為何，並增加類似題練習。

2

2 教學提醒

先將 25 改成 5^2 ，即可套用平方差公式。

隨堂練習

利用平方差公式計算下列各式：

(1) 95×105

$$\begin{aligned} &= (100 - 5)(100 + 5) \\ &= 100^2 - 5^2 \\ &= 10000 - 25 \\ &= 9975 \end{aligned}$$

(2) $345^2 - 45^2$

$$\begin{aligned} &= (345 + 45)(345 - 45) \\ &= 390 \times 300 \\ &= 117000 \end{aligned}$$

(3) $99^2 - 1$

$$\begin{aligned} &= 99^2 - 1^2 \\ &= (99 + 1)(99 - 1) \\ &= 100 \times 98 \\ &= 9800 \end{aligned}$$

**類題演練** 配合例題 4

利用平方差公式計算下列各式：

(1) 102×98 解 ▶ 9996。

(2) 10.2×9.8 解 ▶ 99.96。

(3) $38^2 - 8^2$ 解 ▶ 1380。

(4) $34^2 - 36$ 解 ▶ 1120。

延伸演練 $23456^2 - 3456^2$ 的結果是幾位數？

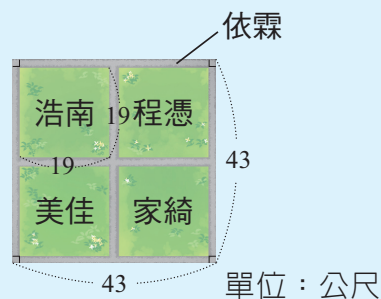
解 ▶ 九位數。



環境

例 5 利用乘法公式求面積

剛開學老師分配班上的外掃區域，如右圖。
四位同學各自負責一塊相同大小的正方形
草地，而依霖負責其餘的水泥步道區。浩南
覺得老師分配給依霖負責的區域面積比較
小，試比較浩南與依霖負責的區域面積大小。



單位：公尺

解

$$\text{浩南} : 19^2 = (20 - 1)^2$$

$$= 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2$$

$$= 400 - 40 + 1$$

$$= 361 \text{ (平方公尺)}$$

$$\text{依霖} : 43^2 - 4 \times 19^2 = 43^2 - 2^2 \times 19^2$$

$$= 43^2 - 38^2$$

$$= (43 + 38)(43 - 38)$$

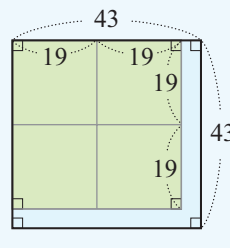
$$= 81 \times 5$$

$$= 405 \text{ (平方公尺)}$$

因此依霖負責的區域面積比較大。

也可將所要求的面積集中
在一起，得到：

$$\text{掃地區域面積} = 43^2 - 38^2$$



教學提醒 1

提醒學生要把 4 改
成 2^2 才能利用平方
差公式。

1

隨堂練習

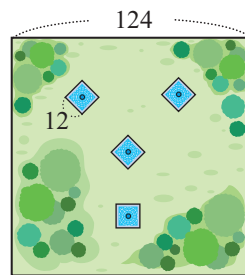
有一個邊長為 124 公尺的正方形公園，其內部有四個
邊長為 12 公尺的小正方形噴水池，求噴水池以外的
面積。

噴水池以外的面積

$$= 124^2 - 4 \times 12^2 = 124^2 - 2^2 \times 12^2$$

$$= 124^2 - 24^2 = (124 + 24)(124 - 24)$$

$$= 148 \times 100 = 14800 \text{ (平方公尺)}$$



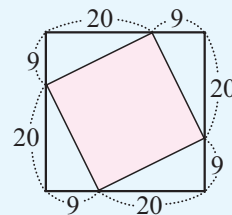
環境

類題演練

配合例題 5

有一個大正方形，四角都被剪去相同的直角三角形後，中間部分形成一個小正方形，如右圖。若直角三角形的邊長分別為 20 與 9，則小正方形的面積為何？

解 ▶ 481。

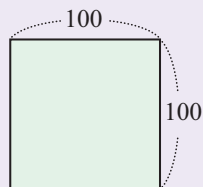


由前面的討論我們知道邊長為 100 的正方形，當邊長改為 101 時，正方形面積不止多 1^2 。如果將邊長有一邊多 1，另一邊少 1 時，那面積會不會相同呢？

探索活動

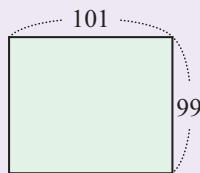
固定周長的長方形面積。

- 1 如下圖，有一個邊長為 100 的正方形，當邊長一邊多 1，另一邊少 1 時，討論看看周長與面積是否有什麼大小變化？



周長 = 400
面積 = 10000

邊長一邊多 1，另一邊少 1

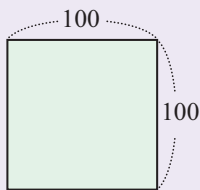


周長 = 400，面積 = 9999
周長 相等，面積 變小
(填入變大、變小、相等。)

周長變為 $(101 + 99) \times 2 = 400$

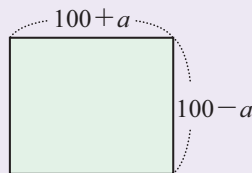
面積變為 $101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 9999$

- 2 如下圖，有一個邊長為 100 的正方形，當邊長一邊多 a ，另一邊少 a 時，討論看看周長與面積是否有什麼大小變化？



周長 = 400
面積 = 10000

邊長一邊多 a ，另一邊少 a



周長 = 400，面積 = $10000 - a^2$
周長 相等，面積 變小
(填入變大、變小、相等。)

周長變為 $[(100 + a) + (100 - a)] \times 2 = 400$

面積變為 $(100 + a)(100 - a) = 100^2 - a^2 = 10000 - a^2$

由探索活動可知，當正方形與長方形周長相同時，正方形面積較大。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 2~4
習題 1~6。

教學補給站

固定周長求最大矩形面積可以用：1. 乘法公式、2. 二次函數、3. 微積分來處理，很多數學問題會有各式各樣的解法，也因不同解法將數學各單元串連在一起。



1-1 重點整理

1 乘法公式

(1) 分配律：設 a 、 b 、 c 、 d 是任意數，則 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。

例 $51 \times 25 = (50+1)(20+5) = 50 \times 20 + 50 \times 5 + 1 \times 20 + 1 \times 5 = 1275$

(2) 和的平方公式：設 a 、 b 是任意數，則 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

例 $105^2 = (100+5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 11025$ 。

(3) 差的平方公式：設 a 、 b 是任意數，則 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

例 $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 9801$ 。

(4) 平方差公式：設 a 、 b 是任意數，則 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

例 $125 \times 75 = (100+25)(100-25) = 100^2 - 25^2 = 9375$ 。



1-1 自我評量

P.7 課文 P.10 課文 P.12 課文

1 判斷下列各題的等式，正確的請打「○」，錯誤的請打「×」：（每小題 5 分）

(×) (1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

(×) (2) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

(○) (3) $(a+b)^2 = (b+a)^2$

(○) (4) $(a-b)^2 = (b-a)^2$

(×) (5) $(a+b)(c+d) = ad + bc$

(○) (6) $(a+b)^2 = (-a-b)^2$

(1) 應為 $a^2 + 2ab + b^2$ 。

(2) 應為 $a^2 - 2ab + b^2$ 。

(4) $(b-a)^2 = [-(a-b)]^2 = (a-b)^2$ ，故正確。

(5) 應為 $ac + ad + bc + bd$ 。

(6) $(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = (a+b)^2$ ，故正確。

教學補給站

$\{1, 3, 8, 120\}$ 是個很奇妙的整數集合，因為其中任意兩數的乘積都等於某個完全平方數減 1。

$$1 \times 3 = 2^2 - 1, 1 \times 8 = 3^2 - 1, 1 \times 120 = 11^2 - 1,$$

$$3 \times 8 = 5^2 - 1, 3 \times 120 = 19^2 - 1, 8 \times 120 = 31^2 - 1$$

P.6 課文



- 2 如右圖，公園管理處在公園內規劃了兩條自行車路線，甲路線為藍色 8 字形車道，乙路線為紅色圓形車道。若紅色圓形直徑等於兩個藍色圓形直徑和，則甲、乙兩條路線何者較長？ (10 分)



(圓周長 = 圓周率 $\times$ 直徑，其中圓周率約為 3.14)

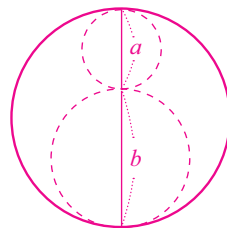
設藍色小圓直徑為 a 、藍色大圓直徑為 b ，

則紅色圓形直徑為 $(a+b)$ ，

因此甲路線長為 $3.14 \times a + 3.14 \times b = 3.14a + 3.14b$ ，

而乙路線為 $3.14(a+b) = 3.14a + 3.14b$ ，

故兩條路線一樣長。



P.8 例 1 P.11 例 2 P.13 例 3 P.15 例 4

(每小題 10 分)

- 3 計算下列各式的值：

- (1) 利用分配律求 103×98 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (100 + 3)(100 - 2) \\ &= 10000 - 200 + 300 - 6 \\ &= 10094 \end{aligned}$$

- (2) 利用平方差公式求 303×297 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (300 + 3)(300 - 3) = 300^2 - 3^2 \\ &= 90000 - 9 = 89991 \end{aligned}$$

- (3) 利用和的平方公式求 $86^2 + 2 \times 86 \times 4 + 4^2$ 。

$$\text{原式} = (86 + 4)^2 = 90^2 = 8100$$

- (4) 利用差的平方公式求 $72^2 - 2 \times 72 \times 32 + 32^2$ 。

$$\text{原式} = (72 - 32)^2 = 40^2 = 1600$$

挑戰會考題

算式 $2 \times 625^2 + 2 \times 375^2$ 之值為何？

- (A) 1062500 (B) 1012500
(C) 2000000 (D) 2012500

解 ▶ (A)。

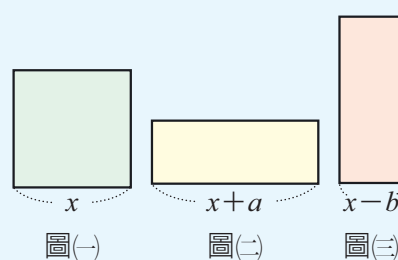
歷屆試題 基礎題

已知圖(一)、圖(二)、圖(三)的矩形周長均相等，其中圖(一)為正方形，圖(一)、圖(二)、圖(三)的某一邊長分別為 x 、 $x+a$ 、 $x-b$ 公分。若圖(一)、圖(二)、圖(三)的面積分別為 115、90、99 平方公分，則 $a:b = ?$

- (1) 5:3 (2) 5:4 (3) 25:9 (4) 25:16

解 ▶ (2)。

《109.特招》(基北區) 題序第 1 題



P.15 例 4

- 4 設 $a = 84^2 - 14^2$ 、 $b = 82^2 - 12^2$ 、 $c = 94^2 - 46^2$ ，比較 a 、 b 、 c 的大小順序。

$$a = 84^2 - 14^2 = (84 + 14)(84 - 14) = 98 \times 70 \quad (10 \text{ 分})$$

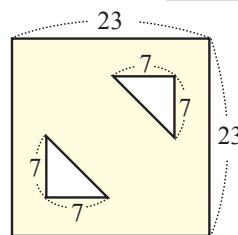
$$b = 82^2 - 12^2 = (82 + 12)(82 - 12) = 94 \times 70$$

$$c = 94^2 - 46^2 = (94 + 46)(94 - 46) = 140 \times 48 = 70 \times 2 \times 48 = 96 \times 70,$$

由於 $98 > 96 > 94$ ，因此 $a > c > b$ 。

P.16 例 5

- 5 右圖是一個邊長為 23 的正方形，正方形中有兩個腰長為 7 的等腰直角三角形，求黃色部分的面積。



$$\text{黃色部分的面積} = 23^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 7 \times 7 \right)$$

$$= 23^2 - 7^2$$

$$= (23 + 7)(23 - 7)$$

$$= 30 \times 16$$

$$= 480$$

✕ 錯誤診療

以下為家綺進行計算 $(10 - 0.5)^2$ 的運算過程： (5 分)

$$\begin{aligned} (10 - 0.5)^2 &= 10^2 - 0.5^2 \\ &= 100 - 0.25 \\ &= 99.75 \end{aligned}$$



請利用計算機判斷家綺的運算是否正確，

如果錯誤請更正家綺的運算過程：

☐ 正確 ☒ 錯誤 (請打✓)

$$\text{更正：} (10 - 0.5)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 0.5 + 0.5^2 = 100 - 10 + 0.25 = 90.25$$



歷屆試題

精熟題

利用乘法公式判斷，下列算式之值，何者與其他不相同？

(A) $(106^2 - 4^2) \times (108^2 - 2^2)$ (B) $(107^2 - 3^2) \times (107^2 - 1^2)$

(C) $(108^2 - 2^2) \times (106^2 - 2^2)$ (D) $(109^2 - 1^2) \times (105^2 - 1^2)$

解 ▶ (A)。

《114. 會考》題序第 10 題

1-2

多項式的加法與減法

1 認識多項式

2 多項式的加法

3 多項式的減法



溫故啟思

- 1 一元一次式 $7x+5$ 的一次項係數為 7，常數項為 5。
- 2 (1) 計算 $2x+1-8x+6=$ $-6x+7$ 。
- (2) 計算 $(7x+4)+(3x-5)=$ $10x-1$ 。
- (3) 計算 $(7x+4)-(3x-5)=$ $4x+9$ 。

檢測概念

- 了解一元一次式的意義。
- 復習一元一次式的加法與減法。

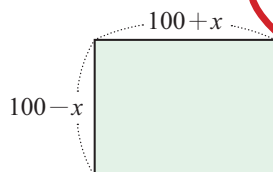
1 認識多項式

動畫 多項式

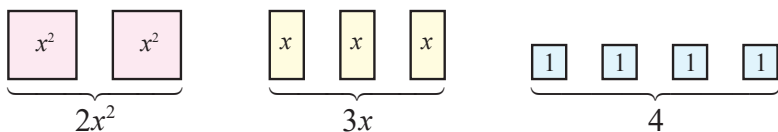
在第一冊我們學過應用一元一次式表示日常生活中的數與量。現在我們來看三個用文字符號 x 表示數量的例子：

- 1 有一塊長為 $100+x$ 、寬為 $100-x$ 的長方形農地要種植向日葵，其種植面積為

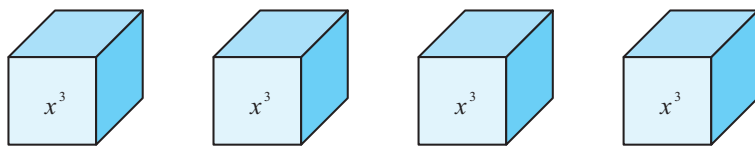
$$(100+x)(100-x)=100^2-x^2=10000-x^2。$$



- 2 每塊邊長為 x 的正方形面積是 $x \cdot x = x^2$ ，兩塊這種正方形的面積和是 $x^2+x^2=2 \cdot x^2$ ，可簡記成 $2x^2$ 。下面紙板中，面積為 x^2 的有兩塊，面積為 x 的有三塊，面積為 1 的有四塊，故總面積為 $2x^2+3x+4$ 。



- 3 邊長為 x 的正立方體體積是 $x \cdot x \cdot x = x^3$ ，四塊這種正立方體的體積和是 $x^3+x^3+x^3+x^3=4 \cdot x^3$ ，可簡記成 $4x^3$ 。



1 教學提醒

延續 1-1 乘法公式，設計一些圖形面積來介紹多項式。

學習內容

A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。

A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。

新網變動

刪除 —	分離係數法	因應新課綱 A-8-3，直式運算時不涉及使用分離係數法。
刪除 —	零多項式	國中階段不使用「零多項式」之名詞，將 0 視為常數多項式即可。

像 $100 + x$ 、 $10000 - x^2$ 、 $2x^2 + 3x + 4$ 、 $4x^3$ 、……，這類由數與文字符號 x 進行加法和乘法運算所構成的代數式，我們稱為 x 的**多項式**。

由於 $3x - 5$ 可以用加號隔開看成 $3x + (-5)$ ，因此 $3x - 5$ 也是 x 的多項式，同樣的 $400 - x^2$ 、 $5x^3 - 2x^2 + 7$ 也都是 x 的多項式。但是當文字符號 x 出現在分母

教學提醒 ①

①

或絕對值符號內時，例如： $\frac{1}{x+1}$ 、 $|x| - 2$ 都不是 x 的多項式。

1. 老師可多舉一些不是多項式的例子，幫助學生理解。

2. 當文字符號 x 出現在指數，也不是 x 的多項式，例如： 2^x 。

多項式的項、係數與次數

在第一冊，我們將整理成 $ax + b$ ($a \neq 0$) 型式的多項式稱為 x 的一元一次式（其中 x 的最高次方為 1），也稱為 x 的**一次多項式**，例如： $7x + 4$ 、 $3x - 5$ 等。

同樣的，對於可以整理成 $2x^2 + 3x + 4$ 、 $10000 - x^2$ 、 $-x^2 + 3$ 等型式的多項式（其中 x 的最高次方均為 2）稱為 x 的**二次多項式**，簡稱為**二次式**，而這些多項式的**次數**為 2。以二次多項式 $2x^2 + 3x + 4$ 為例， $2x^2$ 、 $3x$ 、 4 都稱為這個多項式的**項**，其中各項分別為：

二次項		一次項		常數項
$2x^2$	+	$3x$	+	4
↑		↑		
二次項係數		一次項係數		

教學提醒 ②

②

可特別說明 x 的多項式的次數須經化簡整理同類項後，再判斷 x 的最高次方。

再看一個例子： $5x^3 - 2x^2 + 7$ ，其中 x 的最高次方為 3，因此我們稱這個多項式為 x 的**三次多項式**，簡稱為**三次式**，而此多項式的**次數**為 3。

因為 $5x^3 - 2x^2 + 7$ 缺了一次項，我們補上 $0x$ 後將其看成 $5x^3 + (-2)x^2 + 0x + 7$ ，所以這個多項式各項分別為：

三次項		二次項		一次項		常數項
$5x^3$	+	$(-2)x^2$	+	$0x$	+	7
↑		↑		↑		
三次項係數		二次項係數		一次項係數		

類題演練 配合課文

下列選項哪一個是 x 的多項式？

- (A) $|x - 1|$ (B) $\frac{1}{x^2 + 3}$ (C) $\frac{x}{5} - \frac{x^3}{7}$ (D) $x^3 + 2x^2 + |x|$

解 ▶ (C)。

隨堂練習

請完成下表：

多項式	次數	x^3 項係數	x^2 項係數	x 項係數	常數項
$-4.9x^2 + 5x + 60$	2	0	-4.9	5	60
$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3$	3	1	$\frac{1}{2}$	0	-3

單項式

如果多項式只有一項，我們稱這個多項式為**單項式**，例如： $4x^3$ 、 $-x$ 、 6 等。

當單項式為常數項時，則稱為**常數多項式**，例如： 6 、 -2 、 $\frac{3}{4}$ 、 0 等。

其中不是 0 的常數多項式，我們規定其次數為零次，稱為**零次多項式**。

例如： 6 、 -2 、 $\frac{3}{4}$ 等。

升降冪排列

習慣上我們會將 x 的多項式按照各項的次數高低依序排列，由高而低的順序排列稱為**降冪排列**；反之，由低而高的順序排列稱為**升冪排列**。

例如： $9x^2 - 3 + x$ 的降冪排列為 $9x^2 + x - 3$ ；

升冪排列為 $-3 + x + 9x^2$ 。

3

教學提醒

目前新課綱要求避開 0 的次數，如果學生有提問時，可以跟學生提醒常數多項式 0 不定義次數。測驗時也請避開 0 的次數。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 6
習題 1。

隨堂練習

多項式 $10x^2 + 4x^3 - 4 - 6x$ 的降冪排列為 $4x^3 + 10x^2 - 6x - 4$ ，

而升冪排列為 $-4 - 6x + 10x^2 + 4x^3$ 。



類題演練 配合第一個隨堂練習

完成下表：

多項式	x^2 項係數	x 項係數	常數項
$x^3 - 1$	0	0	-1
$x^2 - x$	1	-1	0

類題演練 配合第二個隨堂練習

將下列各多項式以降冪排列：

(1) $-x + 3x^2 + 2$

解► $3x^2 - x + 2$ 。

(2) $3a^2 - 2a^3 + 9 - 3a$

解► $-2a^3 + 3a^2 - 3a + 9$ 。

(3) $\frac{1}{2}x + 5x^3 - 1 + \frac{3}{4}x^2$

解► $5x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ 。

2 多項式的加法

► 合併同類項

在第一冊，我們學過一元一次式的加法運算，這過程是先去括號後，再合併同類項，例如：

$$(7x+4)+(3x-5) = \overset{\text{合併同類項}}{\underset{\text{合併同類項}}{7x+4+3x-5}} = (7x+3x)+(4-5) = 10x-1$$

在計算其他次數的多項式加法也適用相同方法，例如：

$$\begin{aligned} (2x^2+3x+4)+(x^2+7x+5) &= \overset{\text{同類項}}{\underset{\text{同類項}}{2x^2+3x+4+x^2+7x+5}} \xrightarrow{\text{合併同類項}} \\ &= (2x^2+x^2)+(3x+7x)+(4+5) \\ &= 3x^2+10x+9 \end{aligned}$$

動畫 多項式的運算

上面計算過程中，由於 $2x^2$ 與 x^2 這兩項 x 的次數都是 2，因此我們稱 $2x^2$ 與 x^2 為同類項，同樣的 $3x$ 與 $7x$ 為同類項，4 與 5 為同類項。

教學提醒 1

合併同類項時，要注意係數的正、負號。

1

隨堂練習

合併多項式 $3x^2+5-4x+6x+7x^2-9$ 的同類項：

- (1) 二次項為 $3x^2$ 與 $7x^2$ ，合併後為 $10x^2$ 。
- (2) 一次項為 $-4x$ 與 $6x$ ，合併後為 $2x$ 。
- (3) 常數項為 5 與 -9 ，合併後為 -4 。
- (4) 由 (1)~(3) 得知： $3x^2+5-4x+6x+7x^2-9 = 10x^2+2x-4$ 。

解
否，一次項應為 $-5x$ 。



類題演練 配合隨堂練習

合併多項式 $4x^2-7+2x-2+3x^2-5x$ 的同類項：

- (1) 二次項為 $4x^2$ 與 $3x^2$ ，合併後為 $7x^2$ 。
- (2) 一次項為 $2x$ 與 $-5x$ ，合併後為 $-3x$ 。
- (3) 常數項為 -7 與 -2 ，合併後為 -9 。
- (4) 由 (1)~(3) 得知： $4x^2-7+2x-2+3x^2-5x = 7x^2-3x-9$ 。

多項式的加法運算除了橫式，也可以用直式處理，例如：

- ① **橫式**：計算時先去括號，再合併同類項。
- ② **直式**：計算時，為了避免計算錯誤，我們習慣先將多項式按降冪排列，對齊同類項後再做運算。

例 1 多項式的加法

計算 $(6x^2 + x - 7) + (4x + 3x^2 + 9)$ 。

解 **橫式**： $(6x^2 + x - 7) + (4x + 3x^2 + 9)$

$$= 6x^2 + x - 7 + 4x + 3x^2 + 9$$

去括號

$$= (6x^2 + 3x^2) + (x + 4x) + (-7 + 9)$$

合併同類項

$$= 9x^2 + 5x + 2$$

直式：將 $4x + 3x^2 + 9$ 降冪排列為 $3x^2 + 4x + 9$ 後再做運算。

$$\begin{array}{r} 6x^2 + x - 7 \\ +) 3x^2 + 4x + 9 \\ \hline 9x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

降冪排列後
對齊同類項。



② 教學提醒

1. 初學時，做整係數多項式的加法運算即可。
2. 涉及常數倍的多項式加法運算在 1-3 節才教。

隨堂練習

計算下列各式：

$$\begin{aligned} (1) & (x^2 + 3x - 5) + (7x^2 - 7x - 7) \\ &= x^2 + 3x - 5 + 7x^2 - 7x - 7 \\ &= (x^2 + 7x^2) + (3x - 7x) + (-5 - 7) \\ &= 8x^2 - 4x - 12 \end{aligned}$$

另解：

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 5 \\ +) 7x^2 - 7x - 7 \\ \hline 8x^2 - 4x - 12 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) & (4 + 3x^2 + x) + (3x^2 - 2x - 4) \\ &= 4 + 3x^2 + x + 3x^2 - 2x - 4 \\ &= (3x^2 + 3x^2) + (x - 2x) + (4 - 4) \\ &= 6x^2 - x \end{aligned}$$

另解：

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x + 4 \\ +) 3x^2 - 2x - 4 \\ \hline 6x^2 - x + 0 \quad (+0 \text{ 可省略}) \end{array}$$

類題演練 配合例題 1

計算下列各式：

$$(1) (6 - x + x^2) + (12 + 5x^2 - 6x)$$

解 ▶ $6x^2 - 7x + 18$ 。

$$(2) (x^2 + 4x + 5) + (x^3 + 8 - 3x - 2x^2)$$

解 ▶ $x^3 - x^2 + x + 13$ 。

$$(3) (-12x^3 + 7 - x + 4x^2) + (5x^2 + 3x - 12)$$

解 ▶ $-12x^3 + 9x^2 + 2x - 5$ 。

若多項式中缺少某一項時，表示這項係數為0，因此使用直式計算時，可將缺項補0，方便對齊同類項。

例2 有缺項的多項式加法

計算 $(5x^2 - 6x - 7) + (4x^2 - 2)$ 。

解 橫式： $(5x^2 - 6x - 7) + (4x^2 - 2)$

$$= 5x^2 - 6x - 7 + 4x^2 - 2$$

$$= (5x^2 + 4x^2) - 6x + (-7 - 2)$$

$$= 9x^2 - 6x - 9$$

1 直式：由於 $4x^2 - 2$ 缺一次項，補上 $0x$ 後可寫成 $4x^2 + 0x - 2$ 。

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 6x - 7 \\ +) 4x^2 + 0x - 2 \\ \hline 9x^2 - 6x - 9 \end{array}$$

缺項補0後
對齊同類項。



教學提醒 1

使用直式遇到缺項時，要記得補0，以方便對齊同類項。

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $(-x^2 + 3x) + (6x^2 - 4 + 2x)$

$$\begin{aligned} &= -x^2 + 3x + 6x^2 - 4 + 2x \\ &= (-x^2 + 6x^2) + (3x + 2x) - 4 \\ &= 5x^2 + 5x - 4 \end{aligned}$$

另解：

$$\begin{array}{r} -x^2 + 3x + 0 \\ +) 6x^2 + 2x - 4 \\ \hline 5x^2 + 5x - 4 \end{array}$$

(2) $(x^3 - 6 - 3x) + (-4x^2 + 5x - 1)$

$$\begin{aligned} &= x^3 - 6 - 3x - 4x^2 + 5x - 1 \\ &= x^3 - 4x^2 + (-3x + 5x) + (-6 - 1) \\ &= x^3 - 4x^2 + 2x - 7 \end{aligned}$$

另解：

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 3x - 6 \\ +) -4x^2 + 5x - 1 \\ \hline x^3 - 4x^2 + 2x - 7 \end{array}$$

類題演練 配合例題 2

計算下列各式：

(1) $(2x^2 + 6x + 5) + (1 + x^2)$

解► $3x^2 + 6x + 6$ 。

(2) $(x^3 - 1) + (2x - 3x^3 + 9)$

解► $-2x^3 + 2x + 8$ 。

(3) $(x - 3x^2) + (1 - 2x - 4x^2 + 5x^3)$

解► $5x^3 - 7x^2 - x + 1$ 。

迷思診療

多項式加法運算後的次數

- 家綺學會多項式加法後，歸納出一個結論：「一個三次多項式與一個二次多項式相加後一定是三次多項式。」請問他的結論是否正確？並說明理由。
一定。因為三次多項式的三次項係數不為 0，而二次多項式沒有三次項，所以兩個相加後的三次項係數依然不為 0。
- 美佳也做出類似的結論：「兩個二次多項式相加後一定是二次多項式。」請問他的結論是否正確？並說明理由。
不一定。例如： $(x^2 + 3x + 5) + (-x^2 + 2x) = 5x + 5$ 為一次多項式。



教學提醒

- 可提醒學生兩個多項式相減後，也還是多項式。
- 可進一步問學生兩個多項式相減的情形。

例 3 多項式加法應用

若多項式 $ax^3 - bx^2 + 6$ 與 $2x^3 - 4$ 相加後為常數多項式，則 a 、 b 分別為何？

解 因為 $(ax^3 - bx^2 + 6) + (2x^3 - 4)$
 $= (a + 2)x^3 + (-b)x^2 + (6 - 4)$
 $= (a + 2)x^3 - bx^2 + 2$ 為常數多項式
 所以 $a + 2 = 0$ ， $-b = 0$ ，
 故 $a = -2$ ， $b = 0$ 。

教學提醒

常數多項式不會有二次項與一次項，也就是說整理後的二次項與一次項係數均為 0。

隨堂練習

若多項式 $ax^2 - 4x + 1$ 與 $3x^2 + bx + c$ 相加後為 0，則 a 、 b 、 c 分別為何？
 因為 $(ax^2 - 4x + 1) + (3x^2 + bx + c)$
 $= (a + 3)x^2 + (-4 + b)x + (1 + c)$ 為 0，
 所以 $a + 3 = 0$ ， $-4 + b = 0$ ， $1 + c = 0$ 。故 $a = -3$ ， $b = 4$ ， $c = -1$ 。

類題演練 配合例題 3

若多項式 $ax^2 + bx + 7$ 與 $-3x^2 + 4$ 相加後為常數多項式，則 a 、 b 為何？
 解 ▶ $a = 3$ ， $b = 0$ 。

3 多項式的減法

多項式的減法運算也跟加法運算一樣，可以用橫式與直式。使用橫式計算時，先去括號，再合併同類項；使用直式計算時，習慣上先把多項式按降冪排列，再把缺項補0，最後對齊同類項做運算。

例4 多項式的減法

教學提醒 ①

去括號時，要仔細判斷各項係數的正、負變化。

①

計算 $(x^3 - 2x - 7) - (3x^2 + 6 - x)$ 。

解

橫式： $(x^3 - 2x - 7) - (3x^2 + 6 - x)$

$$= x^3 - 2x - 7 - 3x^2 - 6 + x$$

$$= x^3 - 3x^2 + (-2x + x) + (-7 - 6)$$

$$= x^3 - 3x^2 - x - 13$$

去括號

合併
同類項

$$\begin{aligned} &-(3x^2 + 6 - x) \\ &= -3x^2 - 6 + x \end{aligned}$$



教學提醒 ②

用直式做多項式的減法運算時，要先將多項式按降冪排列，缺項補0，同類項對齊，再合併同類項。

②

直式：將 $3x^2 + 6 - x$ 降冪排列為 $3x^2 - x + 6$ 後再做運算。

x^3	$+ 0x^2$	$- 2x$	$- 7$
$-)$	$3x^2$	$- x$	$+ 6$
x^3	$- 3x^2$	$- x$	$- 13$

直式運算時，
缺項要補0。



隨堂練習

計算下列各式：

(1) $(x^3 - 7 + x - x^2) - (x^3 + 2x^2 - x + 3)$

$$= x^3 - 7 + x - x^2 - x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$= (x^3 - x^3) + (-x^2 - 2x^2) + (x + x) + (-7 - 3)$$

$$= -3x^2 + 2x - 10$$

(2) $(4x^3 + x - 7) - (3x^2 - 1 + 5x)$

$$= 4x^3 + x - 7 - 3x^2 + 1 - 5x$$

$$= 4x^3 - 3x^2 + (x - 5x) + (-7 + 1)$$

$$= 4x^3 - 3x^2 - 4x - 6$$

另解：

$$x^3 - x^2 + x - 7$$

$$-) \quad x^3 + 2x^2 - x + 3$$

$$- 3x^2 + 2x - 10$$

另解：

$$4x^3 + 0x^2 + x - 7$$

$$-) \quad 3x^2 + 5x - 1$$

$$4x^3 - 3x^2 - 4x - 6$$

類題演練

配合例題 4

計算下列各式：

(1) $(-7x^2 + 4) - (4x^2 - 6x - 11)$ 解 ▶ $-11x^2 + 6x + 15$ 。

(2) $(-3 + x^2) - (2x^2 - x^3 + 3)$ 解 ▶ $x^3 - x^2 - 6$ 。

(3) $(2x^2 - 5x + 1) - (-x^2 - 1)$ 解 ▶ $3x^2 - 5x + 2$ 。

例 5 多項式的加減法運算

動畫 多項式的運算

已知三個多項式 $A=4x^2-3x+2$ 、 $B=5x^2+3$ 、 $C=x^2-2x$ ，求：

(1) $A+B-C=?$

(2) $B-A-C=?$

解 (1) $A+B-C=(4x^2-3x+2)+(5x^2+3)-(x^2-2x)$
 $=4x^2-3x+2+5x^2+3-x^2+2x$
 $=(4x^2+5x^2-x^2)+(-3x+2x)+(2+3)$
 $=8x^2-x+5$

(2) $B-A-C=(5x^2+3)-(4x^2-3x+2)-(x^2-2x)$
 $=5x^2+3-4x^2+3x-2-x^2+2x$
 $=(5x^2-4x^2-x^2)+(3x+2x)+(3-2)$
 $=5x+1$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $(6x^3+2x)+(x^2+4x+5)+(3x^2+7)$
 $=6x^3+2x+x^2+4x+5+3x^2+7$
 $=6x^3+(x^2+3x^2)+(2x+4x)+(5+7)$
 $=6x^3+4x^2+6x+12$

(2) $(2x^2+5x-1)-(3x^2-5x)+(4x^2-x+1)$
 $=2x^2+5x-1-3x^2+5x+4x^2-x+1$
 $=(2x^2-3x^2+4x^2)+(5x+5x-x)+(-1+1)$
 $=3x^2+9x$

教學小幫手

可搭配：
 習作 P 6~8
 習題 2~5。

類題演練 配合例題 5

已知三個多項式 $A=3x^2-x+2$ 、 $B=2x^2+x$ 、 $C=x^2-3$ ，求：

(1) $A+B+C=?$ 解 ▶ $6x^2-1$ 。

(2) $A-B-C=?$ 解 ▶ $-2x+5$ 。



1-2 重點整理

1 多項式

- (1) 由數與文字符號 x 進行加法和乘法運算所構成的代數式，我們稱為 **x 的多項式**。

例 $3x-4$ 、 x^2+4 、 $2x^2+3x+4$ 、 $5x^3+x^2-3x+7$ 、 $6x^3-x+4$ 。

- (2) 一個多項式中，係數不為 0 且次數最高的項稱為最高次項，而最高次項的次數稱為此多項式的**次數**。

例 多項式 $2x^2+3x+4$ 的次數為 2，稱為 x 的二次多項式。

2 同類項與升降冪排列

- (1) 多項式中，文字符號及次數均相同的項稱為同類項。

- (2) 將多項式按照各項的次數高低依序排列，由高而低的順序排列稱為**降冪排列**；反之，由低而高的順序排列稱為**升冪排列**。

例 $2x^2+3x+4$ 為降冪排列， $4+3x+2x^2$ 為升冪排列。

3 多項式的加減法運算

- (1) 使用橫式計算時，先去括號，再合併同類項。

例 $(5x^2+3x+1)+(x^2-x+3)=5x^2+3x+1+x^2-x+3=6x^2+2x+4$

$(5x^2+3x+1)-(x^2-x+3)=5x^2+3x+1-x^2+x-3=4x^2+4x-2$

- (2) 使用直式計算時，習慣上先把多項式按降冪排列，再把缺項補 0，最後對齊同類項做運算。

$$\begin{array}{r} \text{例} \quad 2x^2 - x + 3 \\ +) 5x^2 + 0x - 1 \\ \hline 7x^2 - x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{例} \quad 2x^2 - x + 3 \\ -) 5x^2 + 0x - 1 \\ \hline -3x^2 - x + 4 \end{array}$$

教學補給站

「冪」原本的字義是「覆蓋器物的布巾」，而課文中提到多項式升降冪排列，此處所說的「冪」指的是「同一數自乘若干次」的意思。



1-2 自我評量

P.22 課文 P.23 隨堂練習

- 1 (1) 多項式 $x^2 + 5x$ 為 二 次多項式，其中二次項係數為 1，一次項係數為 5，常數項為 0。 (每格 2 分)
- (2) 多項式 $7 + 3x^2 - 2x^3 - x$ 為 三 次多項式，其中三次項係數為 -2，二次項係數為 3，一次項係數為 -1，常數項為 7。

P.24 隨堂練習

- 2 合併多項式 $9 - 8x^2 + 7x - 6x + 5 - 4x^2$ 的同類項： (每格 2 分)
- (1) 二次項為 $-8x^2$ 與 $-4x^2$ ，合併後為 $-12x^2$ 。
- (2) 一次項為 $7x$ 與 $-6x$ ，合併後為 x 。
- (3) 常數項為 9 與 5，合併後為 14。
- (4) 由 (1)~(3) 得知： $9 - 8x^2 + 7x - 6x + 5 - 4x^2 =$ $-12x^2 + x + 14$ 。

P.24 課文

- 3 判斷下列各題的多項式加、減法，正確的請打「○」，錯誤的請打「×」： (每小題 5 分)
- (☐) (1) $8x^2 - x^2 = 7x^2$ (☒) (2) $5 + 3x^2 = 8x^2$
- (☒) (3) $7x - x = 7$ (☒) (4) $4x + 2x = 6x^2$
- (2) 仍為 $5 + 3x^2$ ；(3) 應為 $6x$ ；(4) 應為 $6x$ 。

P.25 例 1 P.26 例 2 P.28 例 4 P.29 例 5

- 4 計算下列各式： (每小題 5 分)
- (1) $(3x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 2x + 6)$ (2) $(5x^2 - 2x + 4) - (4x^2 + x - 7)$
- $= 3x^2 + 2x - 1 + x^2 - 2x + 6$ $= 5x^2 - 2x + 4 - 4x^2 - x + 7$
- $= (3x^2 + x^2) + (2x - 2x) + (-1 + 6)$ $= (5x^2 - 4x^2) + (-2x - x) + (4 + 7)$
- $= 4x^2 + 5$ $= x^2 - 3x + 11$
- (3) $(3 - 2x - x^2) + (x - x^2 + 6)$ (4) $(x^3 + 2x + 4) - (2 - 2x - x^2)$
- $= 3 - 2x - x^2 + x - x^2 + 6$ $= x^3 + 2x + 4 - 2 + 2x + x^2$
- $= (-x^2 - x^2) + (-2x + x) + (3 + 6)$ $= x^3 + x^2 + (2x + 2x) + (4 - 2)$
- $= -2x^2 - x + 9$ $= x^3 + x^2 + 4x + 2$

挑戰會考題

信忠與好友一行人挑戰「密室逃脫」遊戲，遊戲的最後一道門上寫著提示，如右圖。已知通關密碼為四位數「abcd」的數字，試問下列何組密碼可以幫助信忠順利逃出密室？

- (A) 8863 (B) 2824 (C) 8823 (D) 2823

解►(A)。

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 7x^2 - 2x + 8 \\ -) -3x^3 + 15x^2 + 4x + 5 \\ \hline ax^3 - bx^2 - cx + d \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & (x^3 + x + 7) - (5x^2 - x - x^3) \\
 &= x^3 + x + 7 - 5x^2 + x + x^3 \\
 &= (x^3 + x^3) - 5x^2 + (x + x) + 7 \\
 &= 2x^3 - 5x^2 + 2x + 7 \\
 (6) \quad & (x^2 + 9x) - [(4 + 6x^2) + (7x - x^2)] \\
 &= x^2 + 9x - (4 + 6x^2 + 7x - x^2) \\
 &= x^2 + 9x - 4 - 6x^2 - 7x + x^2 \\
 &= (x^2 - 6x^2 + x^2) + (9x - 7x) - 4 \\
 &= -4x^2 + 2x - 4
 \end{aligned}$$

P.27 例 3

5 已知多項式 A 與 $(3x^2 - 7x + 6)$ 的和為 $(x^3 - 4x^2 - 1)$ ，求多項式 A 。

$$A + (3x^2 - 7x + 6) = x^3 - 4x^2 - 1 \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
 A &= (x^3 - 4x^2 - 1) - (3x^2 - 7x + 6) \\
 &= x^3 - 4x^2 - 1 - 3x^2 + 7x - 6 \\
 &= x^3 + (-4x^2 - 3x^2) + 7x + (-1 - 6) \\
 &= x^3 - 7x^2 + 7x - 7
 \end{aligned}$$

✕ 錯誤診療

以下為梓茹進行多項式減法運算的過程： (6 分)

$$\begin{aligned}
 (3x^2 - 5x + 7) - (x^2 - 4x) &= 3x^2 - 5x + 7 - x^2 - 4x \\
 &= 2x^2 - 9x + 7
 \end{aligned}$$



請判斷梓茹的運算是否正確，如果錯誤請更正：

☐ 正確 ☒ 錯誤 (請打✓)

更正：

$$(3x^2 - 5x + 7) - (x^2 - 4x) = 3x^2 - 5x + 7 - x^2 + 4x = 2x^2 - x + 7$$



歷屆試題

基礎題

計算 $(5x^2 - 2x) - (4 - 3x)$ 的結果，與下列何者相同？

(A) $5x^2 - 3x$ (B) $5x^2 + x - 4$ (C) $5x^2 - 5x + 4$ (D) $5x^2 - 5x - 4$

解►(B)。

《114.會考》題序第 2 題

1-3

多項式的乘法與除法

1 多項式的乘法

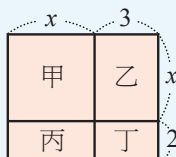
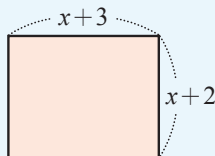
2 多項式的除法



溫故啟思

1 計算下列各式：

(1) $a \cdot a^2 = a^3$ 。(2) $a^2 \div a = a$ 。

2 (1) 長為 $x+3$ 、寬為 $x+2$ 的長方形，
其面積為 $(x+3) \cdot (x+2)$ 。(2) 將右圖分成四個小長方形甲、乙、丙、丁，
則這四塊面積的總和為 $x^2 + 5x + 6$ 。(3) 由(1)和(2)，大長方形面積等於小長方形甲、乙、
丙、丁面積總和，可以得知 $(x+3) \cdot (x+2) = x^2 + 5x + 6$ 。
(2) 甲 + 乙 + 丙 + 丁 = $x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$ 

檢測概念

1. 復習指數律。
2. 利用面積切割方式求大長方形的面積。

1 多項式的乘法

在第一冊我們學過用分配律展開一次式與常數的乘積，例如：

$$3(4x-5) = 3 \cdot 4x - 3 \cdot 5 = 12x - 15$$

事實上，二次式、三次式、……與常數的乘積也是用相同的方法，例如：

$$(x^2 - 3x + 1) \cdot (-2) = x^2 \cdot (-2) - 3x \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = -2x^2 + 6x - 2$$

1

1 教學提醒

利用一元一次式與數的乘積，銜接高次式與數的乘積。

2

2 教學提醒

去括號時，先判斷各項係數的正、負，再計算數值。

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $4(5x^2 - 6x + 7)$

$$= 4 \cdot 5x^2 - 4 \cdot 6x + 4 \cdot 7$$

$$= 20x^2 - 24x + 28$$

(2) $(x^3 + 2x^2 - 1) \cdot (-2)$

$$= x^3 \cdot (-2) + 2x^2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2)$$

$$= -2x^3 - 4x^2 + 2$$

學習內容

A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。

新綱變動

刪除 -	分離係數法	因應新課綱 A-8-3，直式運算時不涉及使用分離係數法。
限制 -	多項式的乘法運算、除法運算	因應新課綱 A-8-3，多項式乘法中的乘積次數最高為三次，而多項式除法中的被除式次數最高為二次。

► 單項式與多項式的乘法

動畫 多項式的乘法 I

$2x \cdot 3x$ 和 $4x \cdot (-5x^2)$ 與 $(6x)^2$ 該如何計算呢？由於文字符號 x 代表數，因此利用數的運算規律就可以得到計算結果，做法如下：

$$2x \cdot 3x = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot x = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 6x^2$$

$$4x \cdot (-5x^2) = 4 \cdot x \cdot (-5) \cdot x^2 = 4 \cdot (-5) \cdot x \cdot x^2 = -20x^3$$

$$(6x)^2 = 6^2 \cdot x^2 = 36x^2$$

當單項式乘以單項式時，將係數與係數相乘，文字符號與文字符號相乘。

隨堂練習

教學提醒 ①

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}。$$

計算下列各式：

$$(1) (-x) \cdot 7x^2$$

$$(2) (-6x^2)(-5x)$$

$$(3) (-4x)^2$$

$$= (-1) \cdot x \cdot 7 \cdot x^2 \\ = -7x^3$$

$$= (-6) \cdot x^2 \cdot (-5) \cdot x \\ = 30x^3$$

$$= (-4)^2 \cdot x^2 = 16x^2$$

當單項式與多項式乘積時，也是將 x 代表一個數，再利用分配律展開。

例 ① 單項式與多項式的乘法

教學提醒 ②

進行多項式乘法運算時，可將 x 代表數，故多項式也適用數的運算規則。

計算下列各式：

$$(1) 3x(2x+6)$$

$$(2) (4x-1)(-x^2)$$

解

$$(1) 3x(2x+6) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 6 = 6x^2 + 18x$$

$$(2) (4x-1)(-x^2) = 4x \cdot (-x^2) - 1 \cdot (-x^2) = -4x^3 + x^2$$

隨堂練習

計算下列各式：

$$(1) (-x)(x+3)$$

$$(2) (2x-7) \cdot x^2$$

$$(3) 5x(3x^2-x+1)$$

$$= (-x) \cdot x + (-x) \cdot 3 = 2x \cdot x^2 - 7 \cdot x^2$$

$$= 5x \cdot 3x^2 - 5x \cdot x + 5x \cdot 1$$

$$= -x^2 - 3x$$

$$= 2x^3 - 7x^2$$

$$= 15x^3 - 5x^2 + 5x$$

類題演練

配合例題 1

計算下列各式：

$$(1) (-x)(3x-4)$$

$$\text{解} \blacktriangleright -3x^2 + 4x。$$

$$(2) 3x(x^2-x+3)$$

$$\text{解} \blacktriangleright 3x^3 - 3x^2 + 9x。$$

$$(3) (-2x)(2x^2-x+3)$$

$$\text{解} \blacktriangleright -4x^3 + 2x^2 - 6x。$$

延伸演練

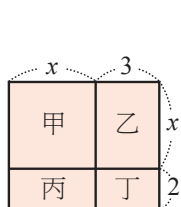
$$\text{計算 } 6x \cdot (-3x)^3 \cdot \left(-\frac{7}{9}x^2\right)。$$

$$\text{解} \blacktriangleright 126x^6。$$

多項式乘以多項式

動畫 多項式的乘法 II

在第 33 頁的溫故啟思中，透過面積得知 $(x+3)(x+2)=x^2+5x+6$ ，事實上多項式的乘法是先利用分配律展開後，再合併同類項，作法如下：



$$\begin{aligned}
 & (x+3)(x+2) \\
 &= x \cdot x + x \cdot 2 + 3 \cdot x + 3 \cdot 2 \\
 &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\
 &= x^2 + 5x + 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (a+b)(c+d) \\
 &= ac + ad + bc + bd
 \end{aligned}$$



3

教學提醒

用橫式計算多項式乘法時，先用分配律展開，並判斷各項正、負，再合併同類項。

除了橫式的做法外，和加、減法運算一樣，乘法也可以使用直式，做法對照如下：

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} \text{同} \\ \text{類} \\ \text{項} \\ \text{要} \\ \text{對} \\ \text{齊} \end{array} \times \begin{array}{r} x+3 \\ x+2 \end{array} \\
 \hline
 2x+6 \leftarrow (x+3) \times 2 \\
 x^2+3x \leftarrow (x+3) \times x \\
 \hline
 x^2+5x+6 \leftarrow \text{上下兩列相加}
 \end{array}$$

4

教學提醒

題型從單純的乘法運算，再進入須重新排列後運算，最後是缺項補 0。

雖然橫式和直式的展開順序不同，但會得到相同的結果。

隨堂練習

計算下列各式：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (2x+1)(3x-1) \\
 &= 6x^2 - 2x + 3x - 1 \\
 &= 6x^2 + x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2x+1 \\
 \times) \quad 3x-1 \\
 \hline
 -2x-1 \\
 6x^2+3x \\
 \hline
 6x^2+x-1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (3x-4)(3x-2) \\
 &= 9x^2 - 6x - 12x + 8 \\
 &= 9x^2 - 18x + 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 3x-4 \\
 \times) \quad 3x-2 \\
 \hline
 -6x+8 \\
 9x^2-12x \\
 \hline
 9x^2-18x+8
 \end{array}$$

類題演練 配合隨堂練習

計算下列各式：

(1) $(3x-4)(x+6)$ 解 ▶ $3x^2+14x-24$ 。

(2) $(2x-1)(3x-1)$ 解 ▶ $6x^2-5x+1$ 。

(3) $(x-4)(-x-6)$ 解 ▶ $-x^2-2x+24$ 。

(4) $(6-x)(3+5x)$ 解 ▶ $-5x^2+27x+18$ 。

歷屆試題 基礎題

計算 $(2x-3)(3x+4)$ 的結果，與下列哪一個式子相同？

(A) $-7x+4$ (B) $-7x-12$

(C) $6x^2-12$ (D) $6x^2-x-12$

解 ▶ (D)。

《108.會考》通過率 81%



用直式計算多項式的乘法時，我們習慣先按**降冪排列**後再運算。

例2 一次式與二次式的乘法

計算 $(2x - 3 + x^2)(3x + 4)$ 。

解

$$\begin{aligned}
 \text{橫式：} & (2x - 3 + x^2)(3x + 4) \\
 &= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 - 3 \cdot 3x - 3 \cdot 4 + x^2 \cdot 3x + x^2 \cdot 4 \\
 &= 6x^2 + 8x - 9x - 12 + 3x^3 + 4x^2 \\
 &= 3x^3 + 10x^2 - x - 12
 \end{aligned}$$

教學提醒 1

直式運算時，可提醒學生將所乘兩式向右推齊，以對齊同類項，方便進行運算。

1

直式：將 $2x - 3 + x^2$ 按**降冪排列**為 $x^2 + 2x - 3$ 後再做運算。

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 3 \\
 \times \quad 3x + 4 \\
 \hline
 4x^2 + 8x - 12 \\
 3x^3 + 6x^2 - 9x \\
 \hline
 3x^3 + 10x^2 - x - 12
 \end{array}$$

隨堂練習

計算下列各式：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (2 + x + 5x^2)(x - 4) \\
 &= 2x - 8 + x^2 - 4x + 5x^3 - 20x^2 \\
 &= 5x^3 - 19x^2 - 2x - 8 \\
 &\quad \begin{array}{r} 5x^2 + x + 2 \\ \times \quad x - 4 \\ \hline -20x^2 - 4x - 8 \\ 5x^3 + x^2 + 2x \\ \hline 5x^3 - 19x^2 - 2x - 8 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (1 - 2x)(x^2 + 4 - 2x) \\
 &= x^2 + 4 - 2x - 2x^3 - 8x + 4x^2 \\
 &= -2x^3 + 5x^2 - 10x + 4 \\
 &\quad \begin{array}{r} x^2 - 2x + 4 \\ \times \quad -2x + 1 \\ \hline x^2 - 2x + 4 \\ -2x^3 + 4x^2 - 8x \\ \hline -2x^3 + 5x^2 - 10x + 4 \end{array}
 \end{aligned}$$

教學提醒 2

課網規定不涉及使用分離係數法。

類題演練 配合例題 2

計算下列各式：

(1) $(3 - x + 2x^2)(2x + 3)$

解 ▶ $4x^3 + 4x^2 + 3x + 9$ 。

(2) $(3 - x)(4x - x^2 + 7)$

解 ▶ $x^3 - 7x^2 + 5x + 21$ 。

用直式計算多項式乘法時，先按降冪排列，再把缺項補0，最後同類項對齊。

例3 有缺項的多項式乘法

計算 $(7x^2 - 6)(2x - 3)$ 。

解 橫式： $(7x^2 - 6)(2x - 3) = 7x^2 \cdot 2x - 7x^2 \cdot 3 - 6 \cdot 2x + 6 \cdot 3$
 $= 14x^3 - 21x^2 - 12x + 18$

直式：由於 $7x^2 - 6$ 缺一次項，

補上 $0x$ 後可寫成 $7x^2 + 0x - 6$ 。

缺項補0能幫助
對齊同類項。



$$\begin{array}{r} 7x^2 + 0x - 6 \\ \times \quad 2x - 3 \\ \hline -21x^2 + 0x + 18 \\ 14x^3 + 0x^2 - 12x \\ \hline 14x^3 - 21x^2 - 12x + 18 \end{array}$$

3

3 教學提醒

用直式計算多項式乘法時，先按降冪排列，再把缺項補0，最後對齊同類項再做運算。

隨堂練習

計算下列各式：

$$\begin{array}{l} (1) (4x^2 + 7)(3 - x) \\ = 12x^2 - 4x^3 + 21 - 7x \\ = -4x^3 + 12x^2 - 7x + 21 \\ \begin{array}{r} 4x^2 + 0x + 7 \\ \times \quad -x + 3 \\ \hline 12x^2 + 0x + 21 \\ -4x^3 - 0x^2 - 7x \\ \hline -4x^3 + 12x^2 - 7x + 21 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) (3x - 5)(2x^2 + 7x) \\ = 6x^3 + 21x^2 - 10x^2 - 35x \\ = 6x^3 + 11x^2 - 35x \\ \begin{array}{r} 2x^2 + 7x + 0 \\ \times \quad 3x - 5 \\ \hline -10x^2 - 35x - 0 \\ 6x^3 + 21x^2 + 0x \\ \hline 6x^3 + 11x^2 - 35x + 0 \end{array} \end{array}$$

? 迷思診療

多項式乘法運算後的次數

阿華知道二次式與一次式相加後是二次式，他認為二次式與一次式相乘後也是二次式。阿華的想法是否正確？請說明理由。

不正確。因為二次項設 $ax^2 + bx + c$ ， $a \neq 0$ ，一次項設 $mx + n$ ， $m \neq 0$ ，兩式相乘，可得 x 的三次項係數為 $am \neq 0$ ，所以一定是三次式。



4

4 教學提醒

可與 1-2 節多項式的加、減法比較。

類題演練 配合例題3

計算下列各式：

(1) $(4 - x^2)(x + 2)$ 解 ▶ $-x^3 - 2x^2 + 4x + 8$ 。

(2) $(2x - 5x^2)(x + 1)$ 解 ▶ $-5x^3 - 3x^2 + 2x$ 。

做多項式的乘法時，若能寫成乘法公式的型式，可以用乘法公式展開。

例4 利用乘法公式做多項式的乘法

利用乘法公式計算下列各式：

(1) $(3x+4)^2$ (2) $(5x-6)^2$ (3) $(6x+7)(6x-7)$

解

$$(1) (3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (a+b)^2 = & a^2 & + & 2 \cdot a & \cdot b & + & b^2 \end{array}$$

$$(2) (5x-6)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 6 + 6^2 = 25x^2 - 60x + 36$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (a-b)^2 = & a^2 & - & 2 \cdot a & \cdot b & + & b^2 \end{array}$$

$$(3) (6x+7)(6x-7) = (6x)^2 - 7^2 = 36x^2 - 49$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (a+b)(a-b) = & a^2 & & - & b^2 \end{array}$$

隨堂練習

計算下列各式：

$$\begin{aligned} (1) (4x+8)^2 \\ &= (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 8 + 8^2 \\ &= 16x^2 + 64x + 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (7x-1)^2 \\ &= (7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 1 + 1^2 \\ &= 49x^2 - 14x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (3x-2)(3x+2) \\ &= (3x)^2 - 2^2 \\ &= 9x^2 - 4 \end{aligned}$$

教學補給站

有趣的數字乘法：

$$\begin{aligned} (1) 102 \times 102 \\ &= 10404。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 40401 \\ &= 201 \times 201。 \end{aligned}$$

類題演練 配合例題4

利用乘法公式計算下列各式：

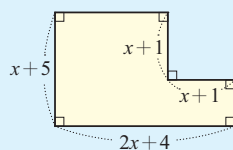
$$(1) (2x+5)^2 \quad \text{解} \blacktriangleright 4x^2 + 20x + 25。$$

$$(2) (1-x)^2 \quad \text{解} \blacktriangleright x^2 - 2x + 1。$$

$$(3) (10x+3)(10x-3) \quad \text{解} \blacktriangleright 100x^2 - 9。$$

例 5 多項式乘法的應用問題

求此圖案的周長與面積。(以 x 的多項式表示)



解 (1) 周長 = 長 $\times$ 2 + 寬 $\times$ 2

$$= (x+5) \times 2 + (2x+4) \times 2$$

$$= 2x + 10 + 4x + 8$$

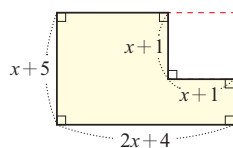
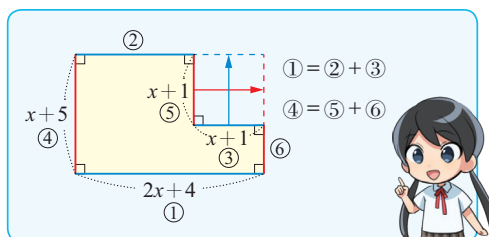
$$= 6x + 18$$

(2) 面積 = $(x+5)(2x+4) - (x+1)^2$

$$= (2x^2 + 4x + 10x + 20) - (x^2 + 2x + 1)$$

$$= 2x^2 + 14x + 20 - x^2 - 2x - 1$$

$$= x^2 + 12x + 19$$



隨堂練習

求凸形圖案周長與面積。(以 x 的多項式表示)

周長 = $(2x+3) \times 2 + (x+3x-1) \times 2$

$$= 4x + 6 + 8x - 2$$

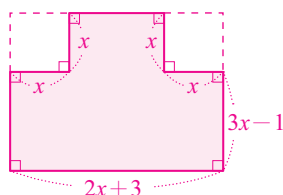
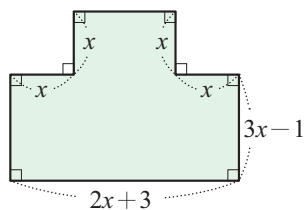
$$= 12x + 4$$

面積 = $(2x+3)(3x-1+x) - 2 \cdot x \cdot x$

$$= (2x+3)(4x-1) - 2x^2$$

$$= 8x^2 - 2x + 12x - 3 - 2x^2$$

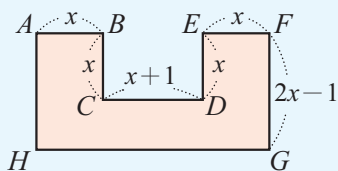
$$= 6x^2 + 10x - 3$$



類題演練 配合例題 5

右圖是一個凹形圖案，相鄰兩邊線段均互相垂直，其中 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = x$ ， $\overline{CD} = x+1$ ， $\overline{FG} = 2x-1$ ，求凹形圖案面積。(以 x 的多項式表示)

解 ► $5x^2 - 2x - 1$ 。





數養知識



月曆上的數學

連結領域

社會



根據上面的對話，如果浩南又重選了月曆上的日期分別為 20、21、27、28，兩組對角日期相乘後，它們的乘積相差為

$$21 \times 27 - 20 \times 28 = 567 - 560 = 7$$

20	21
27	28

如果再用正方形框選擇其他四個日期，此時兩組對角日期乘積相差是不是也是 7 呢？我們利用多項式的乘法說明：

設左上角日期為 x ，則其餘三個日期分別為 $x+1$ 、 $x+7$ 、 $x+8$ ，相差為

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+7) - x(x+8) \\ &= (x^2 + 8x + 7) - (x^2 + 8x) \\ &= 7 \end{aligned}$$

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

因此相差會是定值 7。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 10~11
習題 1~3。

延伸演練

承數養知識 +，用長方形綠框任意圍住四個日期，這四個日期有沒有類似 2. 的結果？

解 ▶ 乘積相差會是定值 2。

日	一	二	三	四	五	六
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

2 多項式的除法

動畫 多項式的除法 I

我們知道數的乘法與除法有非常密切的關係，例如： $4 \times 7 = 28$ 可以用除法表示成 $28 \div 7 = 4$ ，這個式子也可以用約分與直式的方式計算：

$$28 \div 7 = \frac{28}{7} = \frac{4 \times \cancel{7}^1}{\cancel{7}_1} = 4$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 7 \overline{) 28} \\ \underline{28} \\ 0 \end{array}$$

1

1 教學提醒

1. 使用數的除法與單項式的除法對照，讓學生容易理解。
2. 學生學習除法較困難，因此課程安排上，步調較為緩慢。

多項式的乘法與除法也有相同的關係，例如： $5x \times 3x = 15x^2$ 可以用除法表示成 $15x^2 \div (3x) = 5x$ 。同樣的，計算多項式的除法也是用類似的方法：

$$15x^2 \div (3x) = \frac{15x^2}{3x} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot x} = 5x$$

$$\begin{array}{r} 5x \\ 3x \overline{) 15x^2} \\ \underline{15x^2} \\ 0 \end{array} \leftarrow 15x^2 - 15x^2 = 0$$

如果單項式係數為正時，我們會省略括號將 $15x^2 \div (3x)$ 寫成 $15x^2 \div 3x$ 。

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $30x^2 \div 6x$

$$= \frac{30x^2}{6x}$$

$$= 5x$$

(2) $(-8x) \div 4x$

$$= \frac{-8x}{4x}$$

$$= -2$$

(3) $x^2 \div 2x$

$$= \frac{x^2}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}x \text{ (或 } \frac{x}{2} \text{)}$$

2

2 教學提醒

1. 將係數與文字符號 x 分開處理。
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ 。

類題演練 配合隨堂練習

計算下列各式：

(1) $x^2 \div 10x$

解 ▶ $\frac{1}{10}x$ 。

(2) $(-8x) \div 2x$

解 ▶ -4 。

(3) $x^3 \div (-x)$

解 ▶ $-x^2$ 。

(4) $12x^3 \div 27x^2$

解 ▶ $\frac{4}{9}x$ 。

要如何使用直式計算 $(8x^2 + 6x) \div 2x$ 呢？我們來看下面的做法：

1 先處理最高次項（二次項）

$$\begin{array}{r} \overline{) 8x^2 + 6x} \\ \underline{8x^2} \\ 6x \end{array}$$

$8x^2 \div 2x = 4x$

2 接著處理一次項

$$\begin{array}{r} \overline{) 8x^2 + 6x} \\ \underline{8x^2} \\ 6x \\ \underline{6x} \\ 0 \end{array}$$

$6x \div 2x = 3$

商式

餘式

其中， $8x^2 + 6x$ 稱為**被除式**， $2x$ 稱為**除式**， $4x + 3$ 稱為**商式**， 0 稱為**餘式**，當兩多項式相除時，其商式與餘式均須為多項式。

當兩個多項式相除所得的餘式為 0 時，則稱為**整除**，例如：

$2x$ 整除 $8x^2 + 6x$ （或 $8x^2 + 6x$ 被 $2x$ 整除）。

隨堂練習

(1) 求 $(15x^2 - 6x) \div 3x$ 的商式與餘式。

商式為 $5x - 2$ ，餘式為 0 。

$$\begin{array}{r} \overline{) 15x^2 - 6x} \\ \underline{15x^2} \\ -6x \\ \underline{-6x} \\ 0 \end{array}$$

(2) 承(1)，請問 $3x$ 會不會整除 $15x^2 - 6x$ ？

會，因為 $(15x^2 - 6x) \div 3x$ 的餘式為 0 。

類題演練 配合隨堂練習

1. 求 $(28x^2 - 12x) \div 4x$ 的商式與餘式。

解►商式為 $7x - 3$ ，餘式為 0 。

2. 承 1，請問 $4x$ 會不會整除 $28x^2 - 12x$ ？

解►會。

正整數的除法運算中，必須計算到餘數小於除數，或餘數等於 0 才算完成。同樣的，「**多項式的除法運算中，也必須計算到餘式的次數低於除式，或餘式等於 0 才算完成**」。以 $(4x^2 + 20x - 5) \div 4x$ 為例，被除式各項的次數由高而低分步驟處理，作法如下：

① 先處理最高次項（二次項）

$$\begin{array}{r} \overline{4x^2 \div 4x = x} \\ x \\ 4x \overline{) 4x^2 + 20x - 5} \\ \underline{4x^2} \\ (20x - 5) \end{array}$$

次數沒有低於除式 $4x$ 的次數，尚未完成。



② 接著處理一次項

$$\begin{array}{r} \overline{4x^2 \div 4x = x} \\ x + 5 \leftarrow \overline{20x \div 4x = 5} \\ 4x \overline{) 4x^2 + 20x - 5} \\ \underline{4x^2} \\ 20x - 5 \\ \underline{20x} \\ (-5) \end{array}$$

次數低於除式 $4x$ 的次數，計算完成。

故 $(4x^2 + 20x - 5) \div 4x$ 的商式為 $x + 5$ ，餘式為 -5 。

1

① 教學提醒

多項式除法應計算到何時才算完成，對初學者比較難理解。

例6 多項式除以單項式

教學提醒 1

此處可提醒學生，「多項式÷單項式」可直接約分計算。

教學提醒 2

有些學生會用分式表示除法，即
 $(12x^2 - 6x + 15) \div (-3x)$
 $= \frac{12x^2 - 6x + 15}{-3x}$
 $= -4x + 2 - \frac{5}{x}$
 誤以為 $(-3x)$ 會整除 $12x^2 - 6x + 15$ 。提醒學生計算到餘式為15時除法已完成。

求 $(12x^2 - 6x + 15) \div (-3x)$ 的商式與餘式。

解

$$\begin{array}{r}
 \overline{12x^2 - 6x + 15} \\
 \underline{-12x^2} \\
 6x \\
 \underline{-6x} \\
 15
 \end{array}$$

$12x^2 \div (-3x) = -4x$
 $(-6x) \div (-3x) = 2$
 $-6x + 15$ ← 次數沒有低於除式 $(-3x)$ 的次數，尚未完成。
 15 ← 次數低於除式 $(-3x)$ 的次數，計算完成。

故 $(12x^2 - 6x + 15) \div (-3x)$ 的商式為 $-4x + 2$ ，餘式為15。

隨堂練習

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(35x + 10) \div (-5x)$

$$\begin{array}{r}
 -7 \\
 -5x \overline{) 35x + 10} \\
 \underline{35x} \\
 10
 \end{array}$$

商式為 -7 ，餘式為10。

(2) $(-16x^2 + 8x + 2) \div 2x$

$$\begin{array}{r}
 -8x + 4 \\
 2x \overline{) -16x^2 + 8x + 2} \\
 \underline{-16x^2} \\
 8x + 2 \\
 \underline{8x} \\
 2
 \end{array}$$

商式為 $-8x + 4$ ，餘式為2。

類題演練 配合例題6

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(x^2 - 2x) \div (-x)$

解▶ 商式為 $-x + 2$ ，餘式為0。

(2) $(3x^2 - 6x + 9) \div 3x$

解▶ 商式為 $x - 2$ ，餘式為9。

(3) $(-4x^2 + 12x - 3) \div (-4x)$

解▶ 商式為 $x - 3$ ，餘式為 -3 。

例 7 多項式除以一次式

動畫 多項式的除法 II

求 $(6x^2 + 5x - 7) \div (2x - 1)$ 的商式與餘式。

解

$$\begin{array}{r}
 \overline{6x^2 + 5x - 7} \\
 \underline{6x^2 - 3x} \\
 8x - 7 \\
 \underline{8x - 4} \\
 -3
 \end{array}$$

$6x^2 \div 2x = 3x$
 $8x \div 2x = 4$
 $(2x - 1) \cdot 3x = 6x^2 - 3x$
 $(2x - 1) \cdot 4 = 8x - 4$

故 $(6x^2 + 5x - 7) \div (2x - 1)$ 的商式為 $3x + 4$ ，餘式為 -3 。

隨堂練習

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(-2x^2 + 9x + 10) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 \overline{-2x^2 + 9x + 10} \\
 \underline{-2x^2 + 6x} \\
 3x + 10 \\
 \underline{3x - 9} \\
 19
 \end{array}$$

故商式為 $-2x + 3$ ，餘式為 19 。

(2) $(15x^2 - 8x - 12) \div (3x + 2)$

$$\begin{array}{r}
 \overline{15x^2 - 8x - 12} \\
 \underline{15x^2 + 10x} \\
 -18x - 12 \\
 \underline{-18x - 12} \\
 0
 \end{array}$$

故商式為 $5x - 6$ ，餘式為 0 。

教學補給站

現今被廣泛使用的除法運算符號「 $\div$ 」稱為雷恩符號，它在雷恩於 1659 年所著的一本代數書中，首次被作為除號使用。

類題演練 配合例題 7

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(x^2 - 2x - 3) \div (x + 1)$

解 ▶ 商式為 $x - 3$ ，餘式為 0 。

(2) $(3x^2 - 7x + 9) \div (3x - 1)$

解 ▶ 商式為 $x - 2$ ，餘式為 7 。

(3) $(-4x^2 + 12x - 3) \div (-2x + 3)$

解 ▶ 商式為 $2x - 3$ ，餘式為 6 。

做多項式的除法時，先按降冪排列，再把缺項補0後再做運算。

例8 有缺項的多項式除法

求 $(9x^2 + 8) \div (3x + 1)$ 的商式與餘式。

解 由於被除式 $9x^2 + 8$ 缺一次項，補上 $0x$ 後，可寫成 $9x^2 + 0x + 8$ 。

$$\begin{array}{r}
 3x - 1 \\
 3x + 1 \overline{) 9x^2 + 0x + 8} \\
 \underline{9x^2 + 3x} \\
 -3x + 8 \\
 \underline{-3x - 1} \\
 9
 \end{array}$$

故 $(9x^2 + 8) \div (3x + 1)$ 的商式為 $3x - 1$ ，餘式為 9 。

隨堂練習

教學提醒 ①

第(1)、(2)題被除式須缺項補0再計算。

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(4x^2 + 2x) \div (-x + 2)$

被除式 $4x^2 + 2x$ 補常數項 0
為 $4x^2 + 2x + 0$ 後計算。

$$\begin{array}{r}
 -4x - 10 \\
 -x + 2 \overline{) 4x^2 + 2x + 0} \\
 \underline{4x^2 - 8x} \\
 10x + 0 \\
 \underline{10x - 20} \\
 20
 \end{array}$$

故商式為 $-4x - 10$ ，餘式為 20 。

(2) $(8x^2 - 11) \div (2x - 5)$

將被除式 $8x^2 - 11$ 補一次項 $0x$
為 $8x^2 + 0x - 11$ 後計算。

$$\begin{array}{r}
 4x + 10 \\
 2x - 5 \overline{) 8x^2 + 0x - 11} \\
 \underline{8x^2 - 20x} \\
 20x - 11 \\
 \underline{20x - 50} \\
 39
 \end{array}$$

故商式為 $4x + 10$ ，餘式為 39 。

類題演練 配合例題 8

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(-3x^2 + 4) \div (-x + 3)$

解►商式為 $3x - 9$ ，餘式為 31 。

(2) $(15x^2 + 4x) \div (3x - 4)$

解►商式為 $5x + 8$ ，餘式為 32 。



歷屆試題

基礎題

計算 $2x^2 - 3$ 除以 $x + 1$ 後，得商式和餘式分別為何？

(A) 商式為 2 ，餘式為 -5

(B) 商式為 $2x - 5$ ，餘式為 5

(C) 商式為 $2x + 2$ ，餘式為 -1

(D) 商式為 $2x - 2$ ，餘式為 -1

解►(D)。

《109.會考》通過率 74%



兩個係數是整數的多項式相除，其商式或餘式的係數有可能是分數，我們來看下面的例子。

例9 商式的係數為分數

求 $(6x^2 + 3 - 8x) \div (2x - 3)$ 的商式與餘式。

解 將 $6x^2 + 3 - 8x$ 按降幂排列為 $6x^2 - 8x + 3$ 後再做運算。

$$\begin{array}{r}
 3x + \frac{1}{2} \\
 2x - 3 \overline{) 6x^2 - 8x + 3} \\
 \underline{6x^2 - 9x} \\
 x + 3 \\
 \underline{x - \frac{3}{2}} \\
 \frac{9}{2}
 \end{array}$$

故 $(6x^2 + 3 - 8x) \div (2x - 3)$ 的商式為 $3x + \frac{1}{2}$ ，餘式為 $\frac{9}{2}$ 。

2

教學提醒

- 課本安排的題目都是整係數的多項式除法運算。
- 除式、被除式都是整係數，其商式與餘式的係數有可能是分數。

隨堂練習

求 $(2x - 1 + 12x^2) \div (3x + 1)$ 的商式與餘式。

將 $2x - 1 + 12x^2$ 按降幂排列為 $12x^2 + 2x - 1$ 後再做運算。

$$\begin{array}{r}
 4x - \frac{2}{3} \\
 3x + 1 \overline{) 12x^2 + 2x - 1} \\
 \underline{12x^2 + 4x} \\
 -2x - 1 \\
 \underline{-2x - \frac{2}{3}} \\
 -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

故商式為 $4x - \frac{2}{3}$ ，餘式為 $-\frac{1}{3}$ 。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 12
習題 4。



類題演練 配合例題 9

求下列各題的商式與餘式：

(1) $(7 - 4x + x^2) \div 3x$

解 ▶ 商式為 $\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ ，餘式為 7。

(2) $(4x^2 + 3x - 8) \div (2x - 1)$

解 ▶ 商式為 $2x + \frac{5}{2}$ ，餘式為 $-\frac{11}{2}$ 。

動畫 被除式與除式的關係

教學提醒 ①

在整數的除法中，餘數一定比除數小。可視學生狀況說明在多項式除法中，餘式的次數一定低於除式的次數。

①

在國小的整數除法運算中，可以把 $66 \div 5$ 的商數為 13，餘數為 1 寫成

$$\begin{array}{ccccccc} 66 & = & 5 & \times & 13 & + & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{被除數} & = & \text{除數} & \times & \text{商數} & + & \text{餘數} \end{array}$$

同樣地，多項式的除法運算也有相同關係，亦即 **被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式**。

例如：從例題 8 我們知道 $(9x^2 + 8) \div (3x + 1)$ 的商式為 $3x - 1$ ，餘式為 9 也可以寫成

$$\begin{array}{ccccccc} 9x^2 + 8 & = & (3x + 1) & (3x - 1) & + & 9 & . \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{被除式} & = & \text{除式} & \times & \text{商式} & + & \text{餘式} \end{array}$$

表示被除式、除式、商式及餘式的關係。

例 10 被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，求被除式

教學提醒 ②

此題為除法的等式表示法，除法的分式表示法內容建議等到高中時再教。

②

若多項式 A 除以 $2x + 3$ 得商式為 $4x - 1$ ，餘式為 7，求多項式 A 。

解

因為被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，

$$\text{所以 } A = (2x + 3)(4x - 1) + 7$$

$$= 8x^2 - 2x + 12x - 3 + 7$$

$$= 8x^2 + 10x + 4$$

隨堂練習

若多項式 A 除以 $3x - 4$ 得商式為 $x + 3$ ，餘式為 9，求多項式 A 。

$$A = (3x - 4)(x + 3) + 9$$

$$= 3x^2 + 9x - 4x - 12 + 9$$

$$= 3x^2 + 5x - 3$$

解 不一定，可能為一次或常數多項式。



類題演練 配合例題 10

若多項式 B 除以 $5x - 3$ 得商式為 $-7x + 9$ ，餘式為 6，求多項式 B 。

解 $\blacktriangleright -35x^2 + 66x - 21$ 。

延伸演練

已知 $\frac{21x^2 + x + 1}{C} = 3x + 1 + \frac{3}{C}$ ，則 $C = ?$

解 $\blacktriangleright 7x - 2$ 。

例 11 被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，求除式

若 $3x^2 - 13x + 18$ 除以多項式 A 得商式為 $x - 3$ ，餘式為 6 ，求多項式 A 。

解 因為被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，

所以 $3x^2 - 13x + 18 = A(x - 3) + 6$

$$3x^2 - 13x + 12 = A(x - 3)$$

$$A = (3x^2 - 13x + 12) \div (x - 3) = 3x - 4$$

等式兩邊同

減 6 後可整除

$$\begin{array}{r} 3x - 4 \\ x - 3 \overline{) 3x^2 - 13x + 12} \\ \underline{3x^2 - 9x} \\ - 4x + 12 \\ \underline{- 4x + 12} \\ 0 \end{array}$$

隨堂練習

若 $6x^2 + 11x - 12$ 除以多項式 A 得商式為 $3x - 2$ ，餘式為 -2 ，求多項式 A 。

因為被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，

所以 $6x^2 + 11x - 12 = A(3x - 2) - 2$

$$6x^2 + 11x - 10 = A(3x - 2)$$

$$A = (6x^2 + 11x - 10) \div (3x - 2) = 2x + 5$$

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ 3x - 2 \overline{) 6x^2 + 11x - 10} \\ \underline{6x^2 - 4x} \\ 15x - 10 \\ \underline{15x - 10} \\ 0 \end{array}$$

類題演練 配合例題 11

若 $4x^2 + 2x + 15$ 除以多項式 B 得商式為 $2x - 1$ ，餘式為 17 ，求多項式 B 。

解 $\blacktriangleright 2x + 2$ 。

例12 多項式的綜合應用

計算下列各題：

- (1) 已知 $(2x^2 - 5x + a) \div (x - 4)$ 計算後得餘式為 4，求 a 的值。
 (2) 已知 $(ax + b)(2x + 3) = 2x^2 + 13x + 15$ ，求 a 與 b 的值。

解

- (1) 因為
- $2x + 3$

$$\begin{array}{r}
 x-4 \overline{) 2x^2 - 5x + a} \\
 \underline{2x^2 - 8x} \\
 3x + a \\
 \underline{3x - 12} \\
 a + 12
 \end{array}$$

所以餘式為 $a + 12 = 4$ ， $a = -8$ 。

- (2) 因為
- $(ax + b)(2x + 3) = 2x^2 + 13x + 15$

$$2ax^2 + 3ax + 2bx + 3b = 2x^2 + 13x + 15$$

$$2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b = 2x^2 + 13x + 15$$

所以比較等號兩邊係數後，

$$\text{得 } 2a = 2, 3b = 15。$$

$$\text{即 } a = 1, b = 5。$$

也可以將乘法轉成除法處理，

作法如下：

$$\text{因為 } (ax + b)(2x + 3) = 2x^2 + 13x + 15$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } ax + b &= (2x^2 + 13x + 15) \div (2x + 3) \\
 &= x + 5
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } a = 1, b = 5。$$



隨堂練習

- 1 已知
- $(6x^2 + 7x + a) \div (2x + 1)$

計算後得餘式為 8，求 a 的值。

$$\begin{array}{r}
 3x + 2 \\
 2x+1 \overline{) 6x^2 + 7x + a} \\
 \underline{6x^2 + 3x} \\
 4x + a \\
 \underline{4x + 2} \\
 a - 2
 \end{array}$$

$$a - 2 = 8, a = 10。$$

- 2 已知
- $(3x - 1)(x + a)$

 $= 3x^2 + 14x - a$ ，求 a 的值。

$$3x^2 + 3ax - x - a = 3x^2 + 14x - a$$

$$3x^2 + (3a - 1)x - a = 3x^2 + 14x - a$$

比較兩邊係數後得 $3a - 1 = 14$ ，

$$3a = 15, a = 5。$$

教學小幫手

可搭配：
 習作 P 13
 習題 5~7。

類題演練 配合例題 12

求下列各題：

- (1) 已知
- $(3x^2 + x + a) \div (x + 2)$
- 計算後得餘式為 5，求
- a
- 的值。

$$\text{解} \blacktriangleright a = -5。$$

- (2) 已知
- $(ax + 3)(x + 4)$
- 乘開後得
- $2x^2 + 11x + 12$
- ，求
- a
- 的值。

$$\text{解} \blacktriangleright a = 2。$$



1-3 重點整理

1 多項式的乘法

(1) 使用橫式計算時，利用分配律展開後，再合併同類項。

例 $(3x+2)(x-1) = 3x^2 - 3x + 2x - 2 = 3x^2 - x - 2$ 。

(2) 使用直式計算時，先按**降冪排列**，再把**缺項補0**，最後**對齊同類項**做運算。

(3) 做多項式的乘法時，若能寫成乘法公式的型式，可以用乘法公式展開。

例 $(5x-1)(5x+1) = (5x)^2 - 1^2 = 25x^2 - 1$ 。

2 多項式的除法

(1) 多項式的除法運算中，必須計算到**餘式的次數低於除式**，或餘式等於0才算完成，所得的商式與餘式均為多項式。

(2) 在計算多項式除法時，先按**降冪排列**，再把**缺項補0**後再做運算。

(3) 被除式與除式的關係：被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式。

例 計算 $(-5+6x^2) \div (x+3)$ 。

先將 $-5+6x^2$ 按降冪排列為 $6x^2-5$ ，

$6x^2-5$ 補上 $0x$ 後為 $6x^2+0x-5$ 。

故 $-5+6x^2 = (x+3)(3x-9) + 22$ 。

$$\begin{array}{r} 3x-9 \\ x+3 \overline{) 6x^2+0x-5} \\ \underline{3x^2+9x} \\ -9x-5 \\ \underline{-9x-27} \\ 22 \end{array}$$

1

1 教學提醒

2 內容勘誤，被除式誤植為 $-5+6x^2$ ，應改為 $-5+3x^2$ ，內容作以下更正。

例 計算 $(-5+3x^2) \div (x+3)$ 。

先將 $-5+3x^2$ 按降冪排列為 $3x^2-5$ ，

$3x^2-5$ 補上 $0x$ 後為 $3x^2+0x-5$ 。

故 $-5+3x^2 = (x+3)(3x-9) + 22$ 。

$$\begin{array}{r} 3x-9 \\ x+3 \overline{) 3x^2+0x-5} \\ \underline{3x^2+9x} \\ -9x-5 \\ \underline{-9x-27} \\ 22 \end{array}$$

教學補給站

中國剩餘定理即是中國的餘式定理，在學習多項式的除法時，若讓學生多多接觸韓信點兵這樣有趣的題材，對於加強學生學習多項式乘、除法的基本功，會有出乎意料之外的收穫喔！



1-3 自我評量

P.34 課文 P.41 課文

- 1 判斷下列各題的多項式乘、除法，正確的請打「○」，錯誤的請打「×」：
- (☐) (1) $3x \cdot 5x = 15x^2$ (☐) (2) $(5x)^2 = 25x$ (每小題 5 分)
- (☐) (3) $12x^2 \div 2 = 6x$ (☐) (4) $24x^2 \div 8x = 3x$
- (2) 應為 $25x^2$ ；(3) 應為 $6x^2$ 。

P.35 隨堂練習 P.36 例 2 P.37 例 3 P.38 例 4

- 2 計算下列各式：

(每小題 10 分)

(1) $(7-x)(4x+3)$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 28x + 21 - 4x^2 - 3x \\ &= -4x^2 + 25x + 21 \end{aligned}$$

(2) $(3x^2 + 6 - x)(x + 2)$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3x^3 + 6x^2 + 6x + 12 - x^2 - 2x \\ &= 3x^3 + 5x^2 + 4x + 12 \end{aligned}$$

(3) $(2x^2 - x)(x - 6)$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2x^3 - 12x^2 - x^2 + 6x \\ &= 2x^3 - 13x^2 + 6x \end{aligned}$$

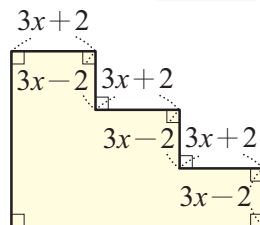
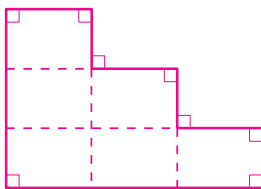
(4) $(5x + 7)^2$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 7 + 7^2 \\ &= 25x^2 + 70x + 49 \end{aligned}$$

- 3 右圖階梯圖案面積為 $54x^2 - 24$ 。
(以 x 的多項式表示)

(10 分)

$$\begin{aligned} \text{階梯圖案面積} &= 6(3x+2)(3x-2) \\ &= 6[(3x)^2 - 2^2] \\ &= 6(9x^2 - 4) \\ &= 54x^2 - 24 \end{aligned}$$



P.39 例 5

挑戰會考題

已知 A 、 B 、 C 為三個多項式，且 $A+B$ 為 0， $A \times B \times C$ 為 5 次多項式，
試問多項式 C 可為幾次多項式？

(A) 1 次 (B) 3 次 (C) 5 次 (D) 以上皆有可能

解 ► (D)。

P.44 例 6

4 計算 $6x^2 + 8x + 10$ 除以 $2x$ 後，得餘式為何？

(10 分)

- (A) $\frac{10}{2x}$ (B) $3x + 4$ (C) 0 (D) 10

答：(D)。

$$\begin{array}{r} 3x + 4 \\ 2x \overline{) 6x^2 + 8x + 10} \\ \underline{6x^2} \\ 8x + 10 \\ \underline{8x} \\ 10 \end{array}$$

P.46 例 8 P.47 例 9

5 求下列各題的商式與餘式：

(每小題 5 分)

(1) $(8 - 4x^2) \div (2x + 1)$

$$\begin{array}{r} -2x + 1 \\ 2x + 1 \overline{) -4x^2 + 0x + 8} \\ \underline{-4x^2 - 2x} \\ 2x + 8 \\ \underline{2x + 1} \\ 7 \end{array}$$

商式為 $-2x + 1$ ，餘式為 7。

(2) $(2x^2 + 2x + 3) \div (2x - 5)$

$$\begin{array}{r} x + \frac{7}{2} \\ 2x - 5 \overline{) 2x^2 + 2x + 3} \\ \underline{2x^2 - 5x} \\ 7x + 3 \\ \underline{7x - \frac{35}{2}} \\ \frac{41}{2} \end{array}$$

商式為 $x + \frac{7}{2}$ ，餘式為 $\frac{41}{2}$ 。

類題演練 配合第 4 題

計算 $5x^2 + 6x + 7$ 除以 $2x$ 後，得餘式為何？

- (A) $x^2 + 1$ (B) 7 (C) 1 (D) $\frac{7}{2x}$

解►(B)。

歷屆試題 基礎題

計算多項式 $6x^2 + 4x$ 除以 $2x^2$ 後，得到的餘式為何？

- (A) 2 (B) 4 (C) $2x$ (D) $4x$

解►(D)。

《111.會考(一)》題序第 2 題

- 6 若多項式 A 除以 $2x+3$ 得商式為 $4x-1$ ，餘式為 7 ，求多項式 A 。 (5分)

因為被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，

$$\text{所以 } A = (2x+3)(4x-1) + 7$$

$$= 8x^2 - 2x + 12x - 3 + 7$$

$$= 8x^2 + 10x + 4$$



錯誤診療

以下為仕軒進行多項式除法運算的過程： (5分)

$$\begin{array}{r} 2x \\ x-3 \overline{) 2x^2+6x+7} \\ \underline{2x^2-6x} \\ 7 \end{array}$$



請判斷仕軒的運算是否正確，如果錯誤請更正：

☐ 正確 ☒ 錯誤 (請打 $\checkmark$)

$$\begin{aligned} \text{更正：} (2x^2+6x) - (2x^2-6x) &= 2x^2+6x-2x^2+6x \\ &= 12x \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x+12 \\ x-3 \overline{) 2x^2+6x+7} \\ \underline{2x^2-6x} \\ 12x+7 \\ \underline{12x-36} \\ 43 \end{array}$$

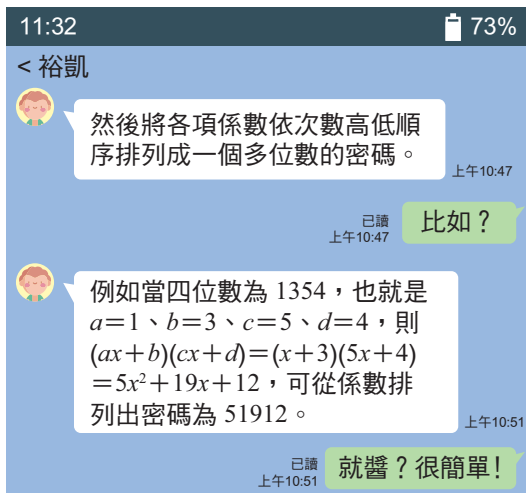
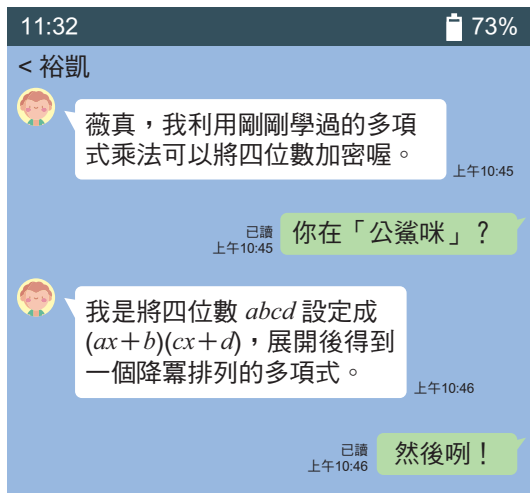
類題演練 配合第 6 題

若一多項式 A 除以 $3x-1$ ，得商式為 $2x+6$ ，餘式為 4 ，求多項式 A 。

解 ▶ $6x^3+16x^2-6$ 。



裕凱設計了一個加密的方法，得意的分享給薇真，請根據下面的對話回答問題。



- ① 若四位數為 4321 時，則可排列出密碼為何？

$$\begin{aligned} \text{由於 } (ax+b)(cx+d) &= (4x+3)(2x+1) \\ &= 8x^2 + 10x + 3 \end{aligned}$$

因此可從係數排列出密碼為 8103。



- ② 若四位數為 2143 時，則可排列出密碼為何？

$$\begin{aligned} \text{由於 } (ax+b)(cx+d) &= (2x+1)(4x+3) = 8x^2 + 10x + 3 \\ \text{因此可從係數排列出密碼為 } &8103。 \end{aligned}$$

- ③ 如果裕凱告訴薇真有一個四位數 $abcd$ ，利用多項式乘法加密後，得到一個多位數密碼 15268，請問薇真在只知道密碼的情況下，是否能破解密碼，求得原四位數？

由①②可知 $(ax+b)(cx+d)$ 與 $(cx+d)(ax+b)$ 展開後是相同的多項式，因此只知道密碼無法得知原本的四位數。

- ④ 承③，如果裕凱再提供原四位數的千位數 $a=3$ 與個位數 $d=2$ ，請幫薇真破解密碼，求得原四位數。(提示：將多項式乘法展開後比較係數)

$$\begin{aligned} \text{由於 } (ax+b)(cx+d) &= (3x+b)(cx+2) = 3cx^2 + (6+bc)x + 2b \\ \text{因此 } 3c &= 1 \text{ (不合) 或 } 3c = 15 \Rightarrow c = 5; 2b = 8 \text{ 或 } 2b = 68 \text{ (不合)} \Rightarrow b = 4 \\ \text{檢查 } 6+bc &= 6+20 = 26 \text{ 符合。故原本的四位數為 } 3452。 \end{aligned}$$

教學補給站

密碼學可分為古典密碼學和現代密碼學。古典密碼學主要關注資訊的保密書寫、傳遞及其破譯方法。而現代密碼學不只關注資訊保密問題，也同時涉及資訊完整性驗證（訊息驗證碼）、資訊發布的不可抵賴性（數位簽章）及資訊安全問題。古典密碼學與現代密碼學的重要區別在於：前者的編碼、破譯通常依賴於設計者和敵手的創造力與技巧，並沒有對於密碼學原件的清晰定義。而後者則起源於 20 世紀末出現的大量相關理論，使得現代密碼學成為一種可系統性學習的科學。



如果十位數字是 x ，平方後前
面的數字剛好是 $x(x+1)$ 喔！

$1 \times (1+1) = 2$ ， $2 \times (2+1) = 6$ ，……
真的耶！為什麼呢？

設十位數字是 x ，

則這些數的平方可以寫成 $(10x+5)^2$ ，

因為 $(10x+5)^2 = (10x)^2 + 2 \cdot 10x \cdot 5 + 5^2$

$$= 100x^2 + 100x + 25$$

$$= 100(x^2 + x) + 25$$

又 $x(x+1) = x^2 + x$

所以千位數與百位數是 $x(x+1)$ ，

而十位數與個位數是 25。



教學補給站

如果要利用課文所教的速算法計算 104×106 ，該怎麼做？

$$(100x+a)(100x+b) = 100x \cdot 100x + 100x \cdot b + a \cdot 100x + a \cdot b$$

$$= 10000x^2 + 100x(10-a) + 100ax + ab$$

$$= 1000(10x^2 + x) + ab$$

$$\text{故 } 104 \times 106 = 1000 \times (10+1) + 4 \times 6 = 11024。$$

依霖妳看，如果十位數字相同，個位數字和為 10 時，好像也有類似的速算法呢！



$$\begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \times 6 & 5 \\ \hline 42 & 25 \end{array}$$

$$6 \times (6+1) \quad 5 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \times 6 & 7 \\ \hline 42 & 21 \end{array}$$

$$6 \times (6+1) \quad 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \times 3 & 8 \\ \hline 12 & 16 \end{array}$$

$$3 \times (3+1) \quad 2 \times 8$$



沒錯！

如果兩數為 $10x+a$ 、 $10x+b$ ，乘開後前兩位是 $x(x+1)$ ，後兩位是 ab 。

那這個結果又如何分析呢？



設兩數為 $10x+a$ 、 $10x+b$ ，

其中 x 代表十位數字， a 、 b 分別代表兩數的個位數字，且 $a+b=10$ 。

因為 $(10x+a)(10x+b) = 10x \cdot 10x + 10x \cdot b + a \cdot 10x + a \cdot b$

$$= 100x^2 + 10x(10-a) + 10ax + ab$$

$$= 100x^2 + 100x - 10ax + 10ax + ab$$

$$= 100(x^2 + x) + ab$$

又 $x(x+1) = x^2 + x$

所以千位數與百位數是 $x(x+1)$ ，而十位數與個位數是 ab 。

筆記欄Memo

114 年南一書局教材資源使用意見回饋表

老師您好：

承蒙您的愛護選用南一版本，在此致上我們最誠摯的謝意。教科書的編撰力求嚴謹，敬請師長先進惠賜指正，俾便再版時改正。此表於填寫後可交由服務人員或以下列提供之聯絡方式聯繫敝公司，我們會以最快速度回覆您的意見。敬祝 教安

南一書局編輯部

地址：220073 新北市板橋區中山路一段 156 號 14 樓-5 編輯部 國中數學組

電話：02-26645500#231

傳真：02-26648895

電子信箱：bob@tped.nani.com.tw

謝謝老師支持



一、課本 / 習作 / 備課用書 / 多媒體意見

品項	冊	頁	行 / 圖 / 表	意 見

二、教師基本資料

姓名：_____ 性別：☐男 ☐女

服務學校：_____ 縣 / 市 _____ 國中

任教年級：_____ 交回日期：_____

聯絡電話：手機 _____

(O) _____ (H) _____

E-mail：_____

業務貼紙



筆記欄Memo
