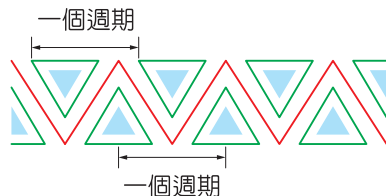


## 1-2 週期性數學模型

### 主題一 週期性現象

配合課本 P.21 ~ P.23

1. 週期性現象指「周而復始」的規律現象。在美術、工藝或建築上，「重複」更是設計與形成美感的一種常見手法。
2. 函數的週期性就是一種模式的反覆出現。整個模式每重複一次，就稱為一個週期。



### 例題 1 生活中的週期

配合課本例題 1

有一家義大利麵餐廳推出自由配餐點，它有五種醬料與六種麵體提供客人自由選配。且店家每日會推出一組搭配做特價，若醬料是按照青醬、蛋奶醬、紅醬、咖哩醬、白醬的順序，而麵體是按照螺旋麵、直條麵、貝殼麵、天使麵、筆尖麵、寬扁麵的順序做配對。

- (1) 店家的特價組合最少隔多少天會出現相同的組合？
- (2) 若今天特價組合是「青醬 + 天使麵」，則最快幾天後有「咖哩醬 + 筆尖麵」的特價組合？

解

素養題

類題

古人使用干支紀年(月、日、時)，由來已久。所謂「干支」，就是天干與地支，詳如附表。從天干的「甲」與地支的「子」開始，依序各取一個，組成一對干支，如甲子、乙丑、……等，取完就從頭再取，例如：癸酉之後是甲戌、乙亥、丙子、丁丑、……等。依照這個規則，組成甲子、乙丑、……、壬戌、癸亥等 60 對干支，周而復始，輪流出現，稱為「一甲子」。

|    |                         |
|----|-------------------------|
| 天干 | 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸     |
| 地支 | 子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥 |

- 已知 2024 年為甲辰年，試問：
- (1) 下一個甲辰年為西元\_\_\_\_\_年。
- (2) 西元 2070 年的干支紀年為\_\_\_\_\_年。

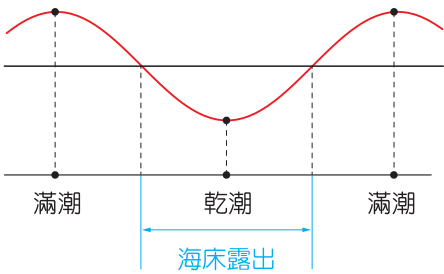
素養題

解

例題 2 自然中的週期

配合課本例題 2

若小甄計畫在 9 月 13 日或 9 月 15 日其中一天的下午 2 點到 3 點至奎壁山摩西分海景點遊玩。已知海床露出期間如圖所示，其中海面上升至最高時稱為滿潮，下降至最低時稱為乾潮。而當地 9 月 12 日到 9 月 17 日間的潮汐表(24 小時制)如表。為了安全考量，請問她應該安排在哪一天至此處遊玩比較有機會踏上海中步道？



| 日期       | 滿潮    | 乾潮    |
|----------|-------|-------|
| 9 月 12 日 | 10：10 | 16：33 |
| 9 月 13 日 | 10：51 | 17：09 |
| 9 月 14 日 | 11：28 | 17：39 |
| 9 月 15 日 | 12：02 | 18：06 |
| 9 月 16 日 | 12：36 | 18：32 |
| 9 月 17 日 | 13：10 | 19：00 |

解

素養題

## 類題

承例題 2，若小甄更改在 9 月 14 日上午 8 點到 9 點、上午 10 點到 11 點，或下午 4 點到 5 點其中一時段至此遊玩，試問哪一個時段比較有機會踏上海中步道？

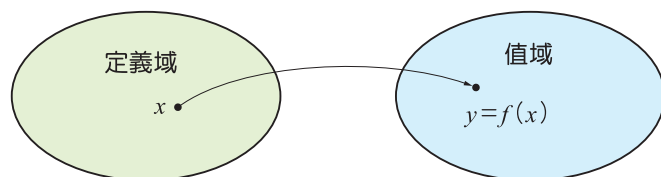
解

## 主題二 正弦函數的圖形

配合課本 P.24 ~ P.28

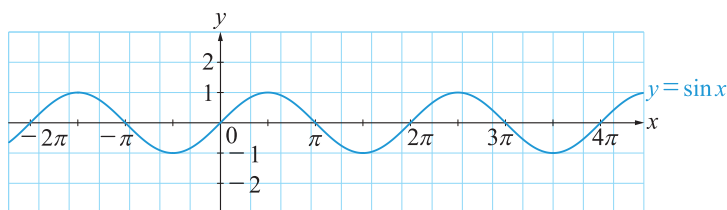
1. 給定一個函數  $f(x)$ ，

- (1) 自變數  $x$  所有可能值的最大範圍稱為此函數的**定義域**。
- (2) 函數值  $f(x)$  所有可能值的最大範圍稱為此函數的**值域**。
- (3) 函數除了要觀察  $x$  與  $f(x)$  的對應關係外，另一重點是觀察  $x$  值的變化所對應的  $f(x)$  值的變化。



- (4) 一般而言，對於函數  $f(x)$ ，如果存在一個常數  $T$ ，使得定義域內的每個  $x$  都滿足  $f(x+T) = f(x)$ ，則我們稱  $f(x)$  為**週期函數**。
  - (5) 如果  $T$  是滿足  $f(x+T) = f(x)$  的最小正數，則稱  $T$  為函數  $f(x)$  之**週期**。
2. 對於任意實數  $x$ ，我們將其視為  $x$  弧，並求出  $\sin x$  的值。將  $x$  與  $\sin x$  對應起來會得到一個函數的對應關係，稱此為**正弦函數**，並以  $f(x) = \sin x$  記之。
3. 正弦函數  $y = \sin x$  的圖形：

(1)  $y = \sin x$  的圖形：



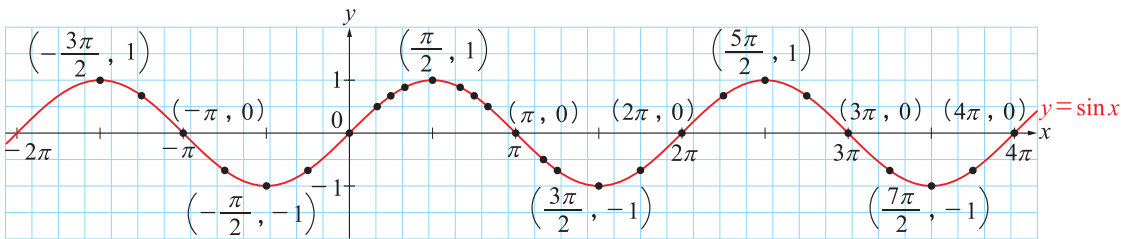
- (2) 繪製正弦函數圖形時，可將角度為軸上角（例如： $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$ ）所對應的點先繪出，再用曲線將這些點連結。

(3) 最好至少各標示一個最高點與一個最低點的坐標。

**說明：**利用計算機可得下表的數值(四捨五入至小數點後第一位，同學可自行檢驗)

|          |   |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |       |                  |                  |                  |                  |        |
|----------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------|
| $x$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
| $\sin x$ | 0 | 0.5             | 0.7             | 0.9             | 1               | 0.9              | 0.7              | 0.5              | 0     | -0.5             | -0.7             | -1               | -0.7             | 0      |

|          |                  |                  |                   |        |                   |                  |                   |        |                   |                   |        |                   |                  |                  |
|----------|------------------|------------------|-------------------|--------|-------------------|------------------|-------------------|--------|-------------------|-------------------|--------|-------------------|------------------|------------------|
| $x$      | $\frac{9\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $\frac{11\pi}{4}$ | $3\pi$ | $\frac{13\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $\frac{15\pi}{4}$ | $4\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\frac{5\pi}{4}$ | $-\pi$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ |
| $\sin x$ | 0.7              | 1                | 0.7               | 0      | -0.7              | -1               | -0.7              | 0      | 1                 | 0.7               | 0      | -0.7              | -1               | -0.7             |

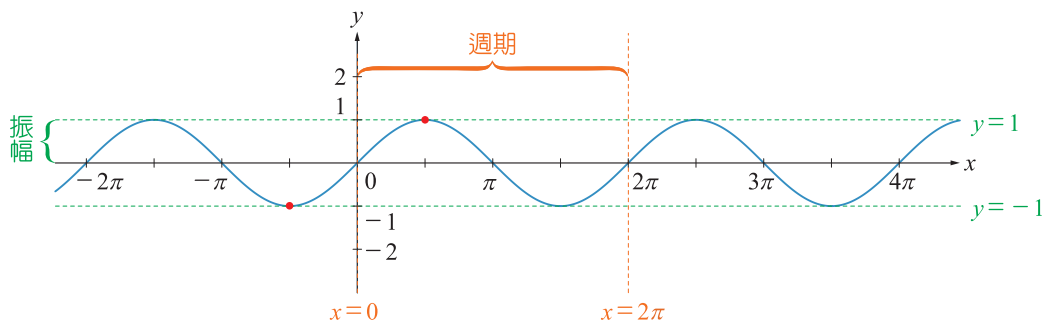


將  $x$  值當作橫坐標，所得的函數值  $y=f(x)$  當作縱坐標，分別將對應的點  $(x, y)$  標示在坐標平面上，再以平滑曲線將這些點連接起來，就可以得到函數  $f(x)=\sin x$  的圖形。

觀察可知有下列現象：

- ①  $x$  的值沒有任何限制。
- ②  $\sin x$  值介於  $-1$  與  $1$  之間。
- ③ 正弦函數的圖形每  $2\pi$  單位長就會循環一次。

4. 正弦函數  $y=\sin x$  的圖形性質：



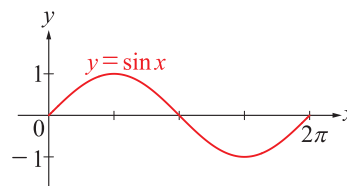
- (1) 定義域為所有實數，值域為區間  $[-1, 1]$ 。
- (2) 振幅為  $1$ 。
- (3) 週期為  $2\pi$ 。
- (4) 圖形對稱原點。
- (5) 正弦函數的圖形並不是由許多半圓或弓形所組成。

.....

**例題 3 正弦函數的圖形**

配合課本例題 4

把正弦函數  $y = \sin x$  的圖形想像成高高低低的山，則從原點開始順著函數圖形往右走，試問走到  $x = 5\pi$  的時候是上坡還是下坡？

**解****Notes**

由於正弦函數圖形具有週期性的現象，因此，若  $\theta$  在  $[0, 2\pi]$  內的同界角為  $\alpha$ ，則  $x = \theta$  時的情形與  $x = \alpha$  時的情形相同。

**類題**

把正弦函數  $y = \sin x$  的圖形想像成高高低低的山，則從原點開始順著函數圖形往右走，試問走到  $x = \frac{25\pi}{4}$  的時候是上坡還是下坡？

**解**

**主題三 正弦函數圖形的平移與伸縮**

配合課本 P.28 ~ P.36

**1. 正弦函數  $y=\sin x$  圖形的平移：**設  $h, k > 0$ ，則

- (1) 函數  $y=\sin x+k$  的圖形是將  $y=\sin x$  的圖形向上平移  $k$  個單位長。
- (2) 函數  $y=\sin x-k$  的圖形是將  $y=\sin x$  的圖形向下平移  $k$  個單位長。
- (3) 函數  $y=\sin(x+h)$  的圖形是將  $y=\sin x$  的圖形向左平移  $h$  個單位長。
- (4) 函數  $y=\sin(x-h)$  的圖形是將  $y=\sin x$  的圖形向右平移  $h$  個單位長。

**2. 正弦函數  $y=\sin x$  圖形的伸縮：**設  $a > 0$ ，則

- (1) 函數  $y=a \sin x$  的圖形是將  $y=\sin x$  的圖形上每一點的縱坐標都乘上  $a$  倍而得。
- (2) 函數  $y=\sin ax$  的圖形是將  $y=\sin x$  的圖形上每一點的橫坐標都乘上  $\frac{1}{a}$  倍而得。

**3. 平移不會改變圖形的週期與振幅。****4. 伸縮對週期與振幅的影響：**設  $a > 0$ ，則

- (1)  $y=a \sin x$  的週期不變，振幅變為原來的  $a$  倍。
  - (2)  $y=\sin ax$  的週期變為原來的  $\frac{1}{a}$  倍（即週期變成  $\frac{2\pi}{a}$ ），振幅不變。
- .....

**例題 4 正弦函數的平移(一)**

配合課本例題 5、6

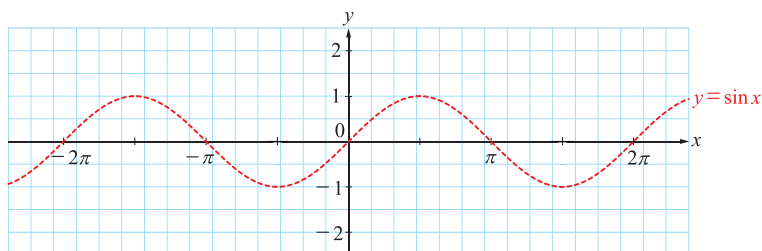
試利用  $y = \sin x$  描繪出下列函數的圖形，並回答其值域、週期、振幅：

(1)  $y = \sin x + 1$ 。

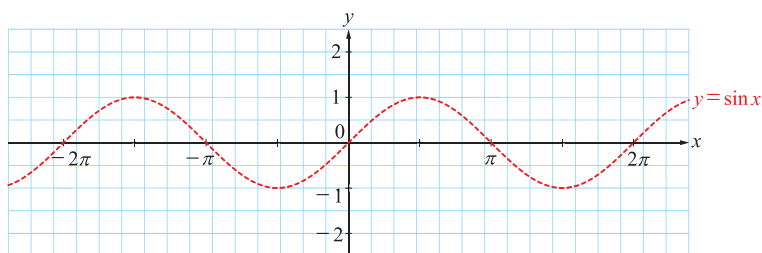
(2)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

**解**

(1)



(2)



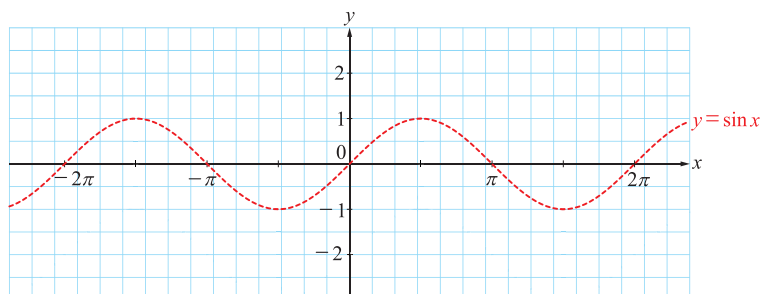
## 類題

試利用  $y = \sin x$  描繪出下列函數的圖形，並回答其值域、週期、振幅：

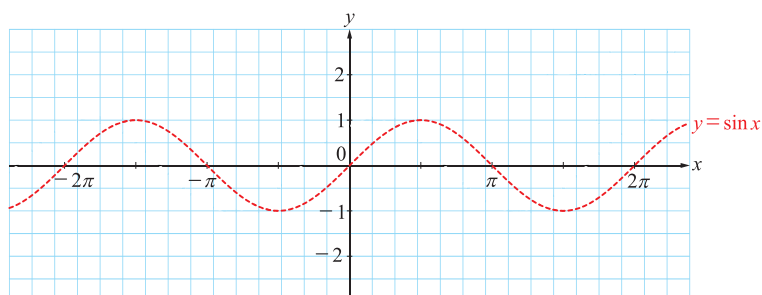
(1)  $y = \sin x - 2$ 。

(2)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

**解** (1)



(2)





**例題 5 正弦函數的平移(二)**

常見段考題

- (1) 試說明函數  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$  圖形與  $y = \sin x$  的位置關係。
- (2) 試求函數  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$  的值域、週期、振幅。

**解****類題**

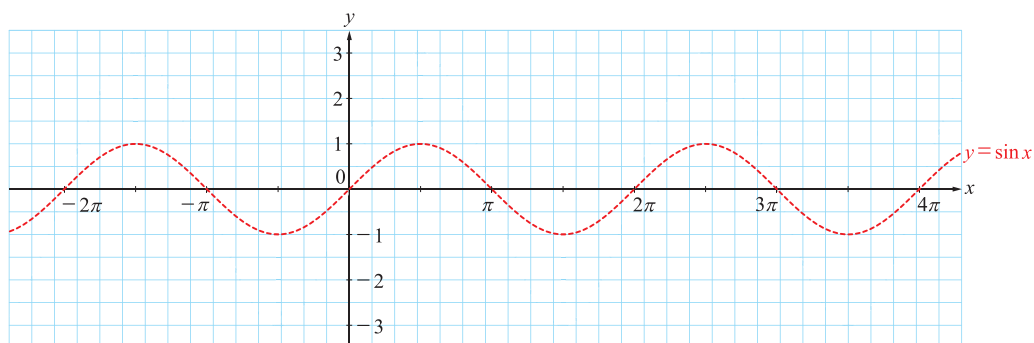
- (1) 試說明函數  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$  圖形與  $y = \sin x$  的位置關係。
- (2) 試求函數  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$  的值域、週期、振幅。

**解**

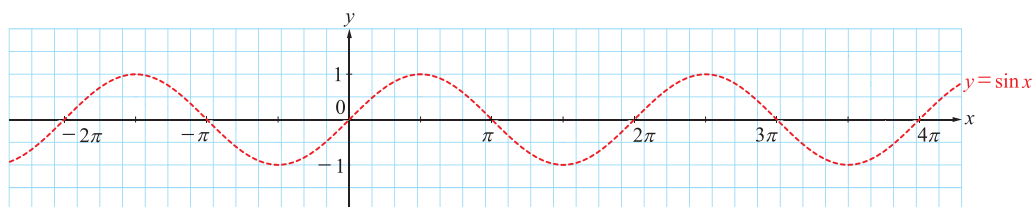
**例題 6 正弦函數的伸縮(一)**

配合課本例題 7

試利用  $y = \sin x$  描繪出  $y = 3 \sin x$  的圖形，並回答其值域、週期、振幅。

**解****類題**

試利用  $y = \sin x$  的圖形描繪出  $y = \frac{1}{3} \sin x$  的圖形，並回答其值域、週期、振幅。

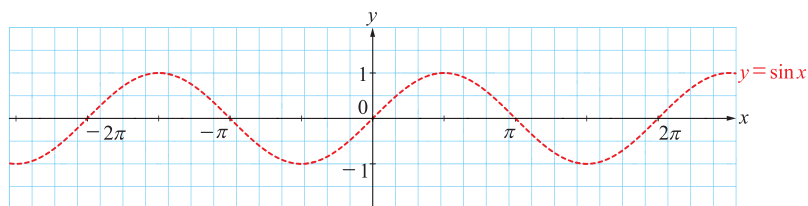
**解**

## 例題 7 正弦函數的伸縮(二)

配合課本例題 8

試利用  $y = \sin x$  的圖形描繪出  $f(x) = \sin 3x$  的圖形，並回答其值域、週期、振幅。

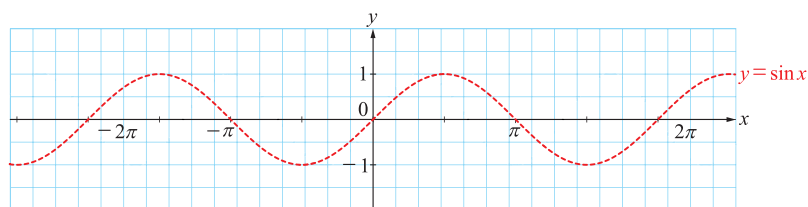
解



### 類題

試利用  $y = \sin x$  的圖形描繪出  $f(x) = \sin \frac{3x}{2}$  的圖形，並回答其值域、週期、振幅。

解



**例題 8 正弦函數的伸縮與平移**

常見段考題

試回答函數  $y = 3 \sin 2x + 1$  的值域、週期、振幅。

**解****類題**

試回答函數  $y = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - 1$  的值域、週期、振幅。

**解****例題 9 由圖形觀察函數的變化方式**

常見段考題

右圖為三角函數  $y = 3 \sin(ax - b)$  的部分圖形，其中  $a > 0$ ，則下列各項敘述何者正確？(多選)

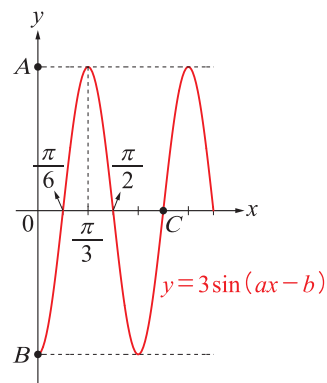
(A)  $B(0, -3)$

(B)  $b = \frac{\pi}{6}$

(C)  $C\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

(D)  $y$  的週期為  $\frac{2\pi}{3}$

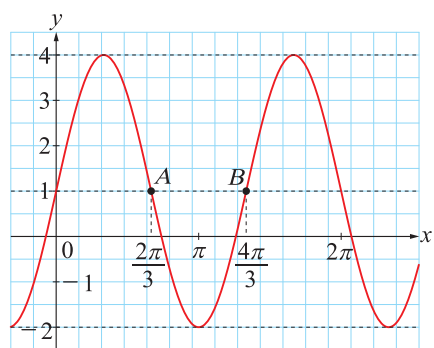
(E) 其圖形可由  $y = 3 \sin 3x$  向右平移  $\frac{\pi}{6}$  單位而得

**解**

## 類題

設  $a, b, c > 0$ ，若  $y = a \sin bx + c$  的圖形如右，試求序組  $(a, b, c)$ 。

解



## 例題 10 三角函數圖形解方程式與不等式

常見段考題

- (1) 設  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ，則  $x$  的解為\_\_\_\_\_。
- (2) 設  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ ，則  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

解

## 類題

- (1) 設  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則  $x$  的解為\_\_\_\_\_。
- (2) 設  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若  $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

解

## 主題四 正弦波

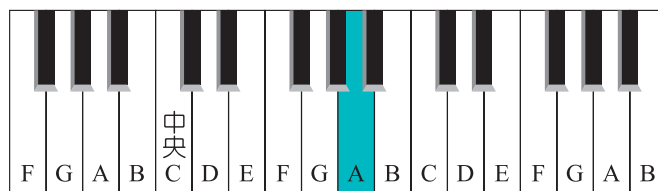
配合課本 P.36 ~ P.38

1. 在數學上，將正弦函數做任意的平移與伸縮，所得的函數  $B + A \sin(\omega x + \phi)$  稱為**正弦波**，這是用來研究與模擬週期現象的數學模型。
2. 聲音是正弦波的一種，是由空氣振動形成聲波而得，常表示為  $A \sin(2\pi f x)$ ，其中  $x$  的單位為秒。物理學上定義，**頻率**  $f$  為週期  $T$  的倒數（即  $f = \frac{1}{T}$ ），單位為赫茲 Hz（次 / 秒）。
3. 空氣振動愈快（頻率愈高），音高就愈高。
4. 在音樂理論上，規定 A4（音樂課唱的 1a）的音高稱為標準音高。這個純音的聲波函數是  $f(x) = \sin(880\pi x)$ ，其中  $x$  的單位為秒。

## 例題 11 聲波

配合課本例題 10

在音樂理論上，規定 A4 (音樂課唱的 1a) 的音高稱為標準音高，其聲波函數是  $f(x) = \sin(880\pi x)$ ，其中  $x$  的單位為秒。試回答下列問題：



- (1) 此函數的週期為何？
- (2) 此函數的頻率為何？
- (3) 設 E4 的聲波函數為  $f(x) = \sin ax$ ，若由 A4 往下 5 個半音 E4 (即音樂課唱的 mi) 的聲波頻率為 A4 的  $\frac{3}{4}$  倍，則 E4 這個音的聲波函數為何？

解

素養題

## 類題

有五個聲音的聲波函數：

$$f_1(x) = 3 \sin(20\pi x), f_2(x) = 50 \sin(40\pi x), f_3(x) = \sin(200\pi x),$$

$$f_4(x) = 10 \sin(1000\pi x), f_5(x) = 20 \sin(3000\pi x),$$

若某一臺鋼琴能發出的聲波頻率是 30Hz 到 3000Hz，則下列哪些是此鋼琴能發出的聲波？(多選)

- (A)  $f_1$                       (B)  $f_2$                       (C)  $f_3$                       (D)  $f_4$                       (E)  $f_5$

解

**例題 12 正弦函數模型的應用問題**

常見段考題

已知某海濱浴場海浪的高度  $y$  (單位：公尺) 是時間  $t$  ( $0 \leq t \leq 24$ ，單位：時) 的函數，記作  $y=f(t)$ ，下表是某日各時的浪高數據：

|     |     |     |     |     |     |     |     |      |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| $t$ | 0   | 3   | 6   | 9   | 12  | 15  | 18  | 21   | 24  |
| $y$ | 1.5 | 1.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 1.0 | 0.5 | 0.99 | 1.5 |

經長期觀測， $y=f(t)$  的曲線可近似地看成是函數  $y=A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b$ ，其中  $\omega > 0$ ，則序組  $(A, \omega, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**解****類題**

某動物園貓熊館打造一個圓形摩天輪，當摩天輪開始運轉時，在摩天輪的圓仔恰坐在離地最近的位置上， $x$  分鐘後，圓仔離地的高度  $y$  (單位：公尺) 可表為

$$y = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{25}x - \frac{\pi}{2}\right) + 6, \text{ 試問：}$$

- (1) 摩天輪轉一圈需            分鐘。
- (2) 圓仔離地最高的高度為            公尺。

**解**



## 1-2 實力演練

### 基礎題

1. 有一循環小數  $0.\overline{31452}$ ，其小數點後的數字依 3、1、4、5、2 的順序輪流出現，不斷地重複。請問  $0.\overline{31452}$  小數點後第 57 位的數字為何？(單選)

(A) 3                      (B) 1                      (C) 4                      (D) 5                      (E) 2

主題一

2. 將  $y = \sin x$  的圖形想像成高高低低的山，從原點開始順著函數圖形往右走到  $x = \frac{25\pi}{2}$ ，則總共會登頂(最高點)多少次？(單選)

(A) 5 次                      (B) 6 次                      (C) 7 次                      (D) 8 次                      (E) 9 次

主題二

3.  $y = \sin 2x$  經過平移後，所得圖形與  $y = \sin 2x$  的圖形重合，則平移的方式可能為下列哪些選項？(多選)

(A) 水平左移  $\pi$  單位                      (B) 水平左移  $2\pi$  單位                      (C) 水平右移  $\frac{\pi}{2}$  單位  
(D) 鉛直上移 2 單位                      (E) 鉛直上移  $2\pi$  單位

主題三

4. 已知函數  $y = 4 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$  的最大值  $M$  及最小值  $m$ ，則  $M + m =$  \_\_\_\_\_。

主題三

5. 設函數  $f(x) = 1 + 2 \sin 3x$ ，關於  $f(x)$  的描述下列哪些選項是正確的？（多選）

(A) 定義域為任意實數

(B) 值域為  $[-2, 2]$

(C) 週期為  $6\pi$

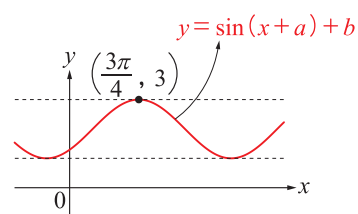
(D) 振幅為 2

(E) 頻率為 3

主題三

6. 右圖為  $y = \sin(x + a) + b$  的部分圖形，其中  $0 < a < 2\pi$ ，試求數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

主題三



7. 設  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若  $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，則  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

主題三

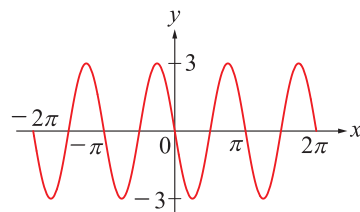
8. 在音樂領域裡依據十二平均律的原理，由 A4 往上  $k$  個半音的聲波函數為  $f(x) = \sin(880\pi \times 2^{\frac{k}{12}} x)$ ， $x$  的單位為秒。已知 D5 是 A4 往上 5 個半音，試求：
- (1) D5 這個音的聲波函數為\_\_\_\_\_。
- (2) D5 這個音的頻率為\_\_\_\_\_赫茲。(已知  $2^{\frac{5}{12}} \approx 1.3$ )

主題四

## 進階題

9. 右圖是下列哪一個函數的圖形？(單選)

- (A)  $y = \sin x$   
 (B)  $y = 3 \sin x$   
 (C)  $y = -3 \sin x$   
 (D)  $y = 3 \sin 2x$   
 (E)  $y = -3 \sin 2x$



〔新北高中〕 主題三

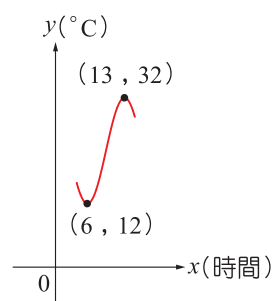
10. 將函數  $y = \sin x$  的圖形水平伸縮為 2 倍，然後鉛直伸縮為 4 倍，再向上平移 1 單位，可得圖形  $\Gamma$ ，則  $\Gamma$  所表示的函數是\_\_\_\_\_。

主題三

11. 南投縣清境農場在某一天，當日最低溫在清晨 6 時，最高溫在下午 13 時。若當天 6 時至 13 時的溫度變化曲線為

$y = A \sin(Cx + D) + B$ ，其中  $A > 0$ ，如右圖。則數對  $(A, B)$  = \_\_\_\_\_。

主題四



12. 有一圓形的摩天輪，中心軸高 20 公尺，直徑 36 公尺，逆時針方向運轉一圈，需時 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，阿暉恰坐在離地面最近的位置上， $x$  分鐘後，阿暉離地面高度為  $y = a \sin(bx + c) + d$  (單位：公尺)， $a > 0$ ， $b > 0$ ， $0 < c < 2\pi$ ，下列哪些選項正確？(多選)

(A)  $a + d = 38$

(B)  $a = 20$

(C)  $b = \frac{\pi}{15}$

(D)  $c = \frac{3\pi}{2}$

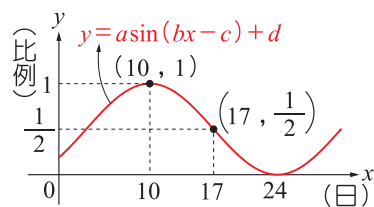
(E)  $d = 18$

[新北高中] 主題四

13. 阿月欲觀察月球亮面的比例，遂在某月的每天夜晚同一時間拍攝月球照片，並計算月球亮面的比例。最後根據所得的資料，繪製示意圖形如右，並發現可用正弦函數

$y = a \sin(bx - c) + d$  (其中  $a, b, d$  為正數,  $0 \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ ) 來描

述所觀察的資料。試選出下列正確的選項。(多選)



(A) 週期為 30 天

(B)  $b = \frac{\pi}{7}$

(C)  $c = \frac{3\pi}{7}$

(D)  $c = 3b$

(E)  $a = d$

[高師大附中] 主題四

## 混合題

14. 右圖為正弦波函數  $f(x)$  的圖形，試回答下列問題：

(1) 函數  $f(x)$  的振幅為何？(單選)

- (A) -1      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) 4

(2) 請選出下列正確的選項。(多選)

(A) 函數的週期為  $\frac{2\pi}{3}$

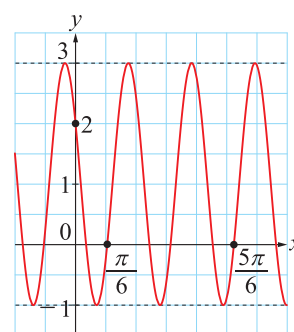
(B)  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f(\pi)$

(C)  $f(0) = 0$

(D)  $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2$

(E) 對所有的實數  $x$ ，皆滿足  $f(x) = f(x + 2\pi)$

(3) 若  $f(x) = a \sin\left(bx + \frac{5\pi}{6}\right) + c$ ，其中  $a > 0$ ， $b > 0$ ，試求出  $a$ ， $b$ ， $c$  的值。



主題四



解題影音

## 大考實戰題

15. 地球受到太陽照射過來的紫外線強度以 UVI 數值表示，一單位 UVI 的照射強度相當於每平方公尺 100 焦耳的能量。根據上述，試回答下列問題。
- (1) 已知某日某地的日照時數(日出到日落)恰為 12 小時，且該地當天日出後  $x$  小時 ( $0 \leq x \leq 12$ ) 的 UVI 數值，可用函數  $f(x) = a \sin(bx)$  來表示，其中  $a, b > 0$ 。假設日照時 UVI 數值為正，非日照時 UVI 數值為 0 (即  $f(0) = f(12) = 0$ )，且當天日出後 2 小時的 UVI 數值為 4。試求  $a$ 、 $b$  之值。
- (2) 承第(1)題，今某人要在該日 UVI 數值介於  $4\sqrt{2}$  和  $4\sqrt{3}$  之間(含)時做日光浴。將他可以做日光浴的時間設為日出後  $t$  小時，試求  $t$  的最大可能範圍。

[114學測 B(改)] 主題四