

第二章 按比例成長模型

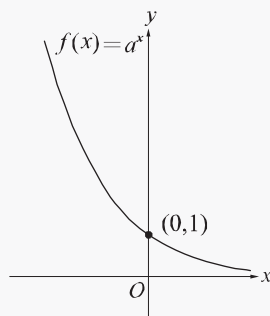
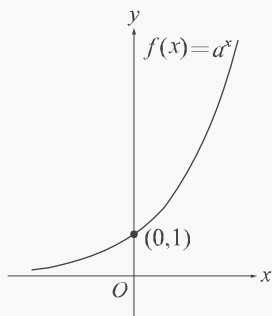
2-1 指數函數

重點整理

1. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f(x) = a^x$ 稱為以 a 為底的指數函數。

(1) $a > 1$ 。

(2) $0 < a < 1$ 。



(3) 定義域： $\mathbb{R}$ ，值域： $(0, \infty)$ 。

2. 指數函數 $f(x) = a^x$ 的圖形性質：

(1) $a > 1$ ： $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ ；

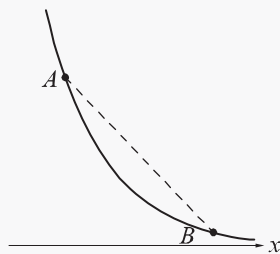
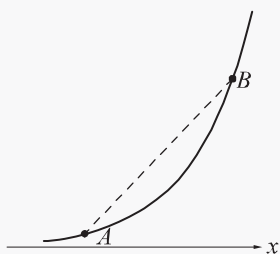
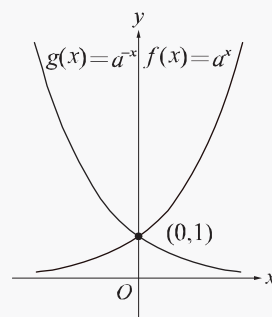
$0 < a < 1$ ： $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ 。

(2) 以 x 軸為漸近線。

(3) 圖形恆過 $(0, 1)$ 。

(4) $y = a^x$ 與 $y = a^{-x}$ 圖形對稱 y 軸。

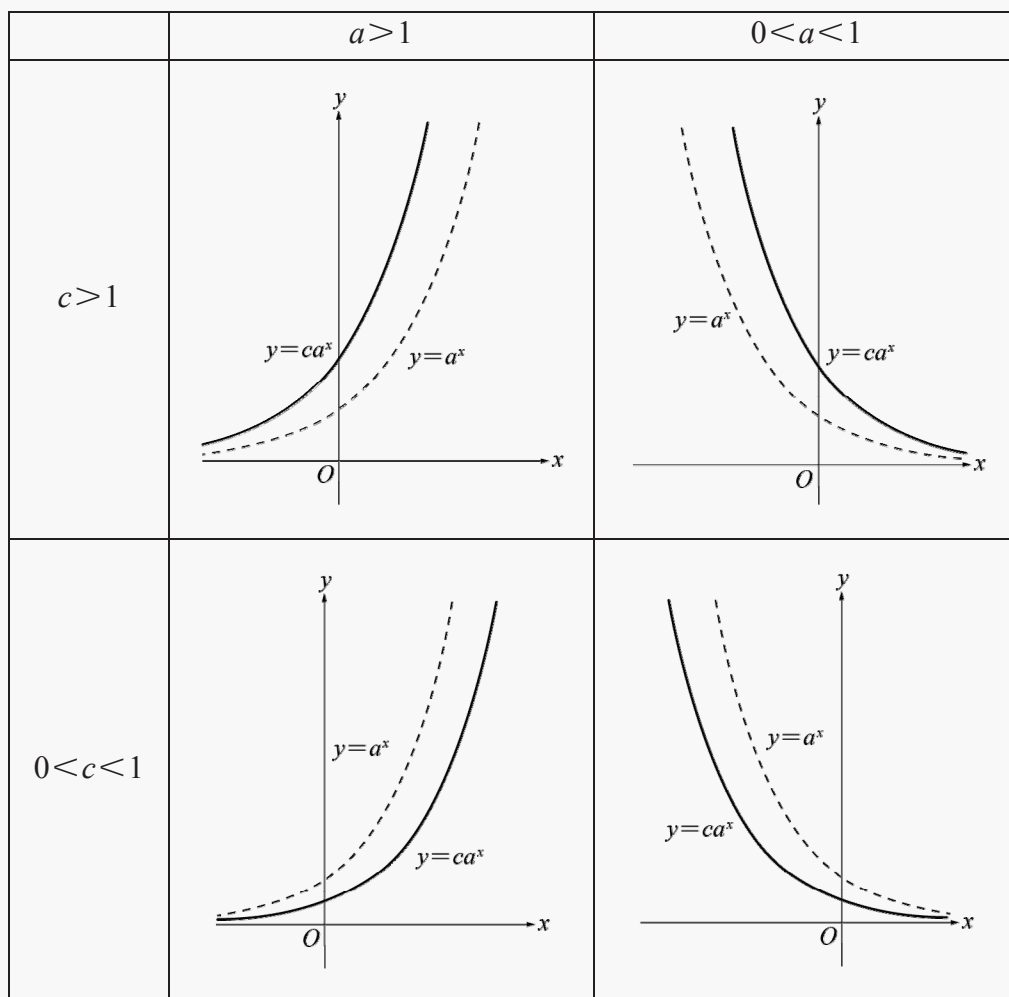
(5) $y = a^x$ 圖形凹向上，線段 AB 恆在函數圖形上方。



3. 按比例成長模型：

(1) 指數型成長的函數都可表為 $f(x) = ca^x$ ，其中 $f(0) = c$ 稱為初始值，代表開始觀察時的狀況。當自變數 x 固定間隔 h 變化到 $x+h$ 時， $\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$ (定值)。當 $a > 1$ 時， $f(x)$ 會按比例 a^h 成長；當 $0 < a < 1$ 時， $f(x)$ 會按比例 a^h 衰退。

(2) $y = a^x$ 的圖形 $\xrightarrow{\text{鉛直伸縮}c\text{倍}}$ $y = ca^x$ 的圖形。(c 為正數)



一 觀念是非題：正確請填○，錯誤請填×，每題 2 分，共 10 分

(×) 1. $(0.3)^{1.2} > (0.3)$ 。

(○) 2. $3^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{3}} > 3^{\frac{1}{4}}$ 。

(×) 3. 若 $(0.2)^a > (0.2)^b$ ，則 $a > b$ 。

(×) 4. $y=k$ 與 $y=2^x$ 兩圖形，恆有交點。

(○) 5. $\frac{2^{0.3}+2^{0.7}}{2} > \sqrt{2}$ 。

解 1. ×： $0 < a < 1, x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow (0.3)^{1.2} < (0.3)$

2. ○： $y=3^x$ 為嚴格遞增函數。

3. ×： $y=(0.2)^x$ 為嚴格遞減函數，故 $(0.2)^a > (0.2)^b \Rightarrow a < b$ 。

4. ×： $y=-2$ 與 $y=2^x$ 沒有交點。

5. ○： $y=2^x$ 圖形凹向上，故 $\frac{2^{0.3}+2^{0.7}}{2} > \sqrt{2^{0.3} \cdot 2^{0.7}} = \sqrt{2}$ 。

二 基礎題：每題 10 分，共 80 分

1. 觀察下列函數，請問哪些函數代表“指數型成長”？哪些是“線性成長”？

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	0.5	1	2	4.5

x	0	1	2	3
$f_2(x)$	8	16	32	64

x	0	1	2	3
$f_3(x)$	50	40	32	25.6

x	0	1	2	3
$f_4(x)$	-3	4	11	18

x	0	1	2	3
$f_5(x)$	0.3	0.9	2.7	8.1

x	0	1	2	3
$f_6(x)$	55	40	25	10

解 觀察各函數的值，可以得知：

配合課本例題 1

當 $x=0, 1, 2, 3$ 時，

$f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 、 $f_5(x)$ 的函數值成等比，故 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 、 $f_5(x)$ 代表指數型成長。

$f_4(x)$ 、 $f_6(x)$ 的函數值成等差，故 $f_4(x)$ 、 $f_6(x)$ 代表線性成長。

2. 將 $y=10^x$ 的圖形，右移 1 單位，再上移 90 單位後，可得一新圖形，若兩圖形交於 (a, b) ，求交點坐標。

配合課本 P.45

解 $y=10^x \xrightarrow{\text{右移 1 單位}} y=10^{x-1} \xrightarrow{\text{上移 90 單位}} y=10^{x-1}+90$ 。

兩圖形交於 (a, b) ，

分別代入得 $\begin{cases} b=10^a \\ b=10^{a-1}+90 \end{cases}$ ，解得 $a=2, b=100$ 。

故交點坐標為 $(2, 100)$ 。

3. 觀察 $y = (0.7)^x$ 的圖形，比較 $a = \sqrt{0.7}$ ， $b = (\frac{10}{7})^{-1.3}$ ， $c = (0.49)^{0.5}$ 三數的大小關係。

解 將以上三數都化成以 0.7 為底數的指數：

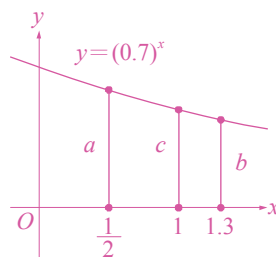
$$a = \sqrt{0.7} = (0.7)^{\frac{1}{2}},$$

$$b = (\frac{10}{7})^{-1.3} = ((0.7)^{-1})^{-1.3} = (0.7)^{1.3},$$

$$c = (0.49)^{0.5} = ((0.7)^2)^{0.5} = (0.7)^1,$$

因為 $y = (0.7)^x$ 是嚴格遞減函數（即 x 愈大， y 愈小），
所以 $a > c > b$ 。

配合課本例題 2



4. 試解下列方程式：

(1) $3^{2x-1} = \frac{1}{27}$ 。(3 分)

(2) $3^x = 5$ 。(3 分)

(3) $5^{2x} = (\sqrt{5})^{3x+4}$ 。(4 分)

配合課本例題 3

解 (1) $3^{2x-1} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^{-3} \Rightarrow 2x-1 = -3 \Rightarrow x = -1$ 。

(2) $3^x = 5 \Leftrightarrow (10^{\log 3})^x = 10^{\log 5} \Rightarrow (\log 3) x = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}$ 。

(3) $5^{2x} = (\sqrt{5})^{3x+4} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{\frac{3x+4}{2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{3x+4}{2} \Rightarrow x = 4$ 。

5. 試解下列不等式：

(1) $3^x < 5$ 。(3 分)

(2) $(0.1)^{5x-3} < \frac{1}{100000}$ 。(3 分)

(3) $(2^x - 8)(2^x - 64) < 0$ 。(4 分)

配合課本例題 4

解 (1) $3^x < 5 \Leftrightarrow (10^{\log 3})^x < 10^{\log 5} \Leftrightarrow 10^{(\log 3)x} < 10^{\log 5} \Leftrightarrow (\log 3)x < \log 5$
 $\Leftrightarrow x < \frac{\log 5}{\log 3}$ 。

(2) $(0.1)^{5x-3} < \frac{1}{100000} \Leftrightarrow (0.1)^{5x-3} < (0.1)^5 \Leftrightarrow 5x-3 > 5 \Leftrightarrow x > \frac{8}{5}$ 。

(3) $(2^x - 8)(2^x - 64) < 0 \Leftrightarrow 8 < 2^x < 64 \Leftrightarrow 2^3 < 2^x < 2^6 \Leftrightarrow 3 < x < 6$ 。

6. 將函數 $y=5^x$ 化成以 10 為底的指數函數，即 $y=5^x=10^{kx}$ 。

(1) 試求定值 k 等於多少？(5 分)

(2) $y=5^x$ 的圖形水平伸縮 α 倍得到 $y=10^x$ 的圖形，試求 α 的值。(5 分)

解 (1) $\because 5 = 10^{\log 5}$
 $\therefore 5^x = (10^{\log 5})^x = 10^{(\log 5)x}$ ，故 $k = \log 5$ 。

(2) $y = 5^x = 10^{(\log 5)x} \xrightarrow{\text{水平伸縮 } \log 5 \text{ 倍}} y = 10^x$ ， $\alpha = \log 5$ 。

點 (m, n) 在 $y=5^x$ 的圖形上 $\Leftrightarrow n = 5^m = (10^{\log 5})^m = 10^{m \log 5}$

$\Leftrightarrow$ 點 $(m \log 5, n)$ 在 $y=10^x$ 圖形上。

7. 在實驗室中培養大腸桿菌，在某個時段中，大約每隔 15 分鐘數量會成長為兩倍，已知一開始培養皿中有 10^{12} 個大腸桿菌，試回答下列問題：

(1) 45 分鐘之後培養皿中有多少個大腸桿菌？(5 分)

(2) 若開始觀察的 t 分鐘之後培養皿中大腸桿菌數量為 $f(t)$ ，試以 t 表示 $f(t)$ 。
(5 分)

配合課本例題 6

解 (1) $\because$ 大約每隔 15 分鐘大腸桿菌數量會成長為兩倍，

$\therefore$ 45 分鐘之後大腸桿菌數量會成長為一開始數量的 $2^3 = 8$ 倍。

45 分鐘之後培養皿中有 8×10^{12} 個大腸桿菌。

(2) t 分鐘後大腸桿菌數量會成長為一開始數量的 $2^{\frac{t}{15}}$ 倍，故 $f(t) = 10^{12} (2^{\frac{t}{15}})$ 。

8. 半衰期為放射性物質衰變至原質量一半所需的時間，已知元素碘 131 的半衰期約為 8 天，設經過 n 天衰變後，剩下的碘 131 小於原質量的 $\frac{1}{100}$ 。(已知 $2^{6.64} \approx 100$ 。)

(1) 請列出一個指數不等式表示上述的敘述。(4 分)

(2) 試求 n 的最小值。(6 分)

解 (1) 根據半衰期的意義，設一開始碘元素的質量為 m ，

n 天衰變後的質量為 $m(\frac{1}{2})^{\frac{n}{8}}$ ，因為剩下的元素碘小於原質量的 $\frac{1}{100}$ ，

所以 $m(\frac{1}{2})^{\frac{n}{8}} < \frac{1}{100}m$ ，故可用指數不等式表示： $(\frac{1}{2})^{\frac{n}{8}} < \frac{1}{100}$ 。

(2) $(\frac{1}{2})^{\frac{n}{8}} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{8}} > 100 \approx 2^{6.64}$ ， $\frac{n}{8} > 6.64$ ， $n > 53.12$ ， $n \geq 54$ 。

故 n 的最小值為 54。

三

進階題：共 10 分

1. 求下列不等式的解：

(1) $9^x + 3^x - 2 \geq 0$ 。(5 分)

(2) $(\frac{1}{4})^x - \frac{5}{4} \cdot 2^{-x} + \frac{1}{4} < 0$ 。(5 分)

解 (1) $(3^x)^2 + 3^x - 2 \geq 0, (3^x + 2)(3^x - 1) \geq 0,$

$$\because 3^x + 2 > 0$$

$$\therefore 3^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 3^x \geq 1$$

故 $x \geq 0$ 。

(2) $(\frac{1}{2})^{2x} - \frac{5}{4}(\frac{1}{2})^x + \frac{1}{4} < 0$

$$\Rightarrow 4[(\frac{1}{2})^x]^2 - 5(\frac{1}{2})^x + 1 < 0$$

$$\Rightarrow [4(\frac{1}{2})^x - 1][(\frac{1}{2})^x - 1] < 0,$$

$$\frac{1}{4} < (\frac{1}{2})^x < 1, (\frac{1}{2})^2 < (\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^0, 2 > x > 0,$$

故 $0 < x < 2$ 。

2-2 對數

重點整理

1. 對數的定義：

設 a, b 為正數且 $a \neq 1$ ，若 b 可以表成 a 的乘幂，即 $b = a^t$ ，則乘幂 t 用符號 $\log_a b$ 表示，稱為“以 a 為底 b 的對數，”簡稱對數。其中 a 稱為**底數**， b 稱為**真數**，即 $a^{\log_a b} = b$ 。

2. 常用對數的對數律：

設 x, y 為兩正數， r 為實數，則

$$(1) \log x + \log y = \log xy。$$

$$(2) \log x - \log y = \log \frac{x}{y}。$$

$$(3) \log x^r = r \log x。$$

3. 換底公式：

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ， $\log_a b$ 可化成 b 與 a 的常用對數之商。

$$\text{即 } \log_a b = \frac{\log b}{\log a}。$$

一 觀念是非題：正確請填○，錯誤請填×，每題 2 分，共 10 分

(○) 1. $10^{\log 3} = 3$ 。

(×) 2. $5^{\log_3 5} = 3$ 。

(×) 3. $\log 4 + \log 3 = \log 7$ 。

(×) 4. $\log_2 x$ 恆為正數。

(×) 5. 設 x 為非零實數， $\log x^2 = 2 \log x$ 。

解 1. ○：由對數定義可得 $10^{\log 3} = 3$ 。

2. ×： $5^{\log_5 3} = 3$ 。

3. ×： $\log 4 + \log 3 = \log (4 \times 3) = \log 12$ 。

4. ×： $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ 。

5. ×：例如： $\log(-3)^2 = 2 \log(-3)$ 是錯誤的。事實上： $\log x^2 = 2 \log |x|$ 。

二 基礎題：每題 10 分，共 80 分

1. 求下列各式中 x 的值：

(1) $2^x = 5$ ， $x = \underline{\log_2 5}$ 。(3 分)

(2) $\log_x 3 = 2$ ， $x = \underline{\sqrt{3}}$ 。(4 分)

(3) $\log_{0.1} x = 3$ ， $x = \underline{0.001}$ 。(3 分)

配合課本例題 1

解 (1) $x = \log_2 5$ 。

(2) $\log_x 3 = 2$ ， $x^2 = 3$

$\because x > 0 \quad \therefore x = \sqrt{3}$

(3) $\log_{0.1} x = 3 \Rightarrow 0.1^3 = x \quad \therefore x = 0.001$

2. 已知實數 k 、 p 滿足 $10^{\frac{5k}{3}} = 32$ 且 $10^{\frac{2p}{3}} = 25$ ，試求下列各小題：

(1) 將 k 化成 $k = \log m$ ，求 m 的值。(5 分)

(2) 試求 $k+p$ 的值。(5 分)

配合課本 P.56、P.59

解 (1) $10^{\frac{5k}{3}} = 32 \Rightarrow \frac{5k}{3} = \log 32 \Rightarrow k = \frac{3}{5} \log 32 = \log (32)^{\frac{3}{5}} = \log (2^5)^{\frac{3}{5}} = \log 8$ ，

故 $m = 8$ 。

(2) $10^{\frac{2p}{3}} = 25 \Rightarrow \frac{2p}{3} = \log 25 \Rightarrow p = \frac{3}{2} \log 25 = \log (25)^{\frac{3}{2}} = \log (5^2)^{\frac{3}{2}} = \log 125$ ，

$k+p = \log 8 + \log 125 = \log 1000 = 3$ 。

3. 下列哪些選項正確？(多選)

(A) $\log_2(-3)^2 = 2 \log_2(-3)$ (B) $\log_{\sqrt{3}} 1 = 1$

(C) $\log_{(2^a)}(2^b) = \frac{b}{a}$ (D) $\log_{(-2)} 4 = 2$

(E) $\log 5 = 1 - \log 2$

配合課本 P.57、P.59

解 (A) $\log_2(-3)$ 沒有意義。

(B) $\log_{\sqrt{3}} 1 = 0$ 。

(C) $\log_{(2^a)}(2^b) = \frac{\log 2^b}{\log 2^a} = \frac{b \log 2}{a \log 2} = \frac{b}{a}$ 。

(D) $\log_{(-2)} 4$ 沒有意義。

(E) $1 = \log 10 = \log(5 \times 2) = \log 5 + \log 2$ ，故 $\log 5 = 1 - \log 2$ 。

故選(C)(E)。

4. 求下列各式的值：

(1) $\log \frac{7}{36} + 2 \log 3 - \log \frac{7}{25} + 4 \log 2$ 。(3 分)

(2) $\log_3 54 - 2 \log_3 2 + \log_3 6$ 。(4 分)

(3) $\log_3 5 \times \log_{25} 7 \times \log_7 81$ 。(3 分)

配合課本例題 3、P.62

解 (1) $\log \left(\frac{7}{36} \times 3^2 \div \frac{7}{25} \times 2^4 \right) = \log(25 \times 2^2) = \log 100 = 2$ 。

(2) $\frac{\log 54}{\log 3} - \frac{\log 2^2}{\log 3} + \frac{\log 6}{\log 3}$
 $= \frac{1}{\log 3} \times \log \frac{54 \times 6}{2^2} = \frac{1}{\log 3} \times \log(27 \times 3) = \log_3 81 = 4$ 。

(3) $\frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 7}{\log 25} \times \frac{\log 81}{\log 7} = \frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 7}{2 \log 5} \times \frac{4 \log 3}{\log 7} = 2$ 。

5. 在養分充足的條件下，細菌的數量會以指數增長的方式成長，假設 A 細菌的數量每四個小時可以成長為三倍，細菌 B 的數量每四個小時可以成長為四倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量都等於 N ，經過了 x 小時細菌 A 、細菌 B 的數量分別以 $f(x)$ 、 $g(x)$ 來表示。

(1) 試寫出 $f(x)$ 、 $g(x)$ 。(5 分)

(2) 大約經過 t 小時，細菌 B 的數量是細菌 A 的數量的 6 倍，請估計 t 的值。
(四捨五入至整數位)，(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)(5 分)

解 (1) 依題意， $f(x) = N(3^{\frac{x}{4}})$ ， $g(x) = N(4^{\frac{x}{4}})$ 。

(2) $\because$ 大約經過 t 小時，細菌 B 的數量是細菌 A 的數量的 6 倍

$$\therefore N(4^{\frac{t}{4}}) = 6 \times N(3^{\frac{t}{4}}) \Rightarrow 4^{\frac{t}{4}} = 6 \times 3^{\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow (10^{\log 4})^{\frac{t}{4}} = 10^{\log 6} \times (10^{\log 3})^{\frac{t}{4}} \Rightarrow (\log 4) \frac{t}{4} = \log 6 + (\log 3) \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \log 6}{\log 4 - \log 3} = \frac{4(\log 2 + \log 3)}{2 \log 2 - \log 3} \approx 24.91 \approx 25。$$



6. 右圖是函數 $f(x) = 3^{x-2}$ 的部分圖形，試求下列各小題：

(1) 水平線 $y=5$ 與 $f(x)$ 圖形交點 A 的 x 坐標。(用對數表示)(5 分)

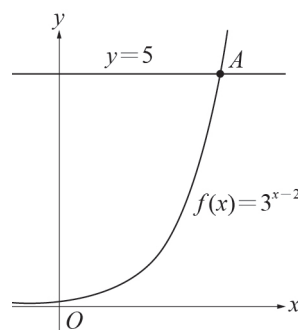
(2) 利用計算機求 A 點 x 坐標的近似值。(四捨五入至小數點後第二位)(5 分)

配合課本 P.56

解 (1) $3^{x-2} = 5 \Rightarrow x-2 = \log_3 5$

$$\Rightarrow x = 2 + \log_3 5 = \log_3 9 + \log_3 5 = \log_3 45。$$

$$(2) x = \log_3 45 = \frac{\log 45}{\log 3} \approx 3.464 \approx 3.46。$$





7. (1) 試用科學記號 $a \times 10^n$ 表示 $(\frac{1}{16})^{200}$ 的近似值。(a 四捨五入至小數點後第四位) (5 分)

(2) 試問 $(\frac{1}{16})^{200}$ 從小數點後第幾位開始不為 0，而第一個不為 0 的數字是多少？(5 分)

配合課本例題 7

解 (1) $(\frac{1}{16})^{200} = a \times 10^n \Rightarrow \log(\frac{1}{16})^{200} = n + \log a$

$$\Rightarrow -200 \log 16 \approx -240.824 = -241 + 0.176 = n + \log a$$

$$\text{即 } n = -241, \log a = 0.176 \Rightarrow a = 10^{0.176} \approx 1.4997。$$

故 $(\frac{1}{16})^{200}$ 的近似值為 1.4997×10^{-241} 。

(2) $\because (\frac{1}{16})^{200}$ 的近似值為 1.4997×10^{-241}

$\therefore (\frac{1}{16})^{200}$ 從小數點後第 241 位開始不為 0，

而第一個不為 0 的數字是 1

8. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1$ ， $\log a_3$ ， $\log a_6$ 依序也成等差數列。

(1) 試求 a_1 與 d 的關係。(5 分)

(2) 試求數列 $\log a_1$ ， $\log a_3$ ， $\log a_6$ 的公差。(5 分)

解 (1) $\because$ 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公差 d

$$\therefore a_3 = a_1 + 2d, a_6 = a_1 + 5d$$

$\because \log a_1$ ， $\log a_3$ ， $\log a_6$ 依序也成等差數列

$$\therefore 2\log a_3 = \log a_1 + \log a_6 \Rightarrow \log a_3^2 = \log a_1 a_6$$

$$\Rightarrow a_3^2 = a_1 a_6 \Rightarrow (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 5d) \Rightarrow a_1 = 4d。$$

(2) $\log a_3 - \log a_1 = \log \frac{a_3}{a_1} = \log \frac{a_1 + 2d}{a_1} = \log \frac{4d + 2d}{4d} = \log \frac{3}{2}。$

三 進階題：共 10 分

1. 已知 $x, y, z > 1$ 且 $a > 0, a \neq 1$ ，若 $\log_x a = 2, \log_y a = 3, \log_z a = 12$ ，試求 $\log_{xyz} a$ 。

解 $\log_x a = 2 \Rightarrow \frac{\log a}{\log x} = 2 \Rightarrow \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{2}$ ，同理， $\frac{\log y}{\log a} = \frac{1}{3}, \frac{\log z}{\log a} = \frac{1}{12}$ 。

$$\log_{xyz} a = \frac{\log a}{\log xyz} = \frac{\log a}{\log x + \log y + \log z} = \frac{1}{\frac{\log x}{\log a} + \frac{\log y}{\log a} + \frac{\log z}{\log a}},$$

$$\text{又 } \frac{\log x}{\log a} + \frac{\log y}{\log a} + \frac{\log z}{\log a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}。$$

$$\text{故 } \log_{xyz} a = \frac{12}{11}。$$

2-3 對數函數

重點整理

1. 對數函數的定義：

設底數 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，給任一個正實數 x ，對應了唯一 $\log_a x$ 的值，此對應關係 $x \rightarrow \log_a x$ 是一個函數，稱為**對數函數**。

2. 對數函數與其圖形的性質

(1) 對數函數 $f(x) = \log_a x$ 的定義域為 $\{x | x > 0\}$ ，值域為 $\mathbb{R}$ ，圖形必通過 $(1, 0)$ 。

(2) 圖形的遞增與遞減：

當 $a > 1$ 時， $f(x) = \log_a x$ 的圖形由左而右上升， $f(x)$ 為嚴格遞增函數。

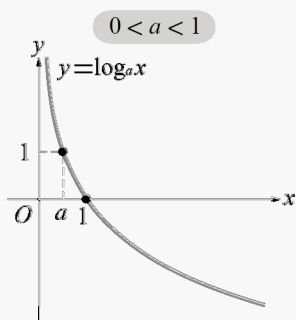
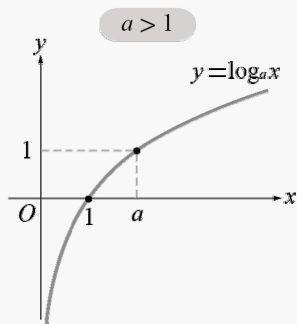
$$x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 = a^{\log_a x_1} > x_2 = a^{\log_a x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \quad (\text{注意 } y = a^x \text{ 為嚴格遞增函數})$$

當 $0 < a < 1$ 時， $f(x) = \log_a x$ 的圖形由左而右下降， $f(x)$ 為嚴格遞減函數。

$$x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 = a^{\log_a x_1} > x_2 = a^{\log_a x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \quad (\text{注意 } y = a^x \text{ 為嚴格遞減函數})$$



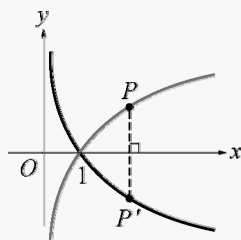
(3) $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 兩者的圖形對稱於 x 軸，

其中 a 為異於 1 的正數。

設 $P(m, n)$ 在 $y = \log_a x$ 上 $\Leftrightarrow n = \log_a m$

$$\Leftrightarrow -n = -\log_a m = \log_{\frac{1}{a}} m$$

$$\Leftrightarrow (m, -n) \text{ 在 } y = \log_{\frac{1}{a}} x \text{ 上。}$$



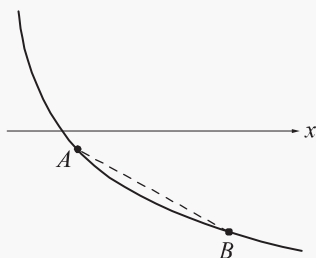
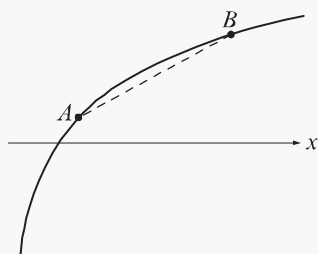
(4) 圖形的凹向性：

$a > 1$ 時： $y = \log_a x$ 圖形的凹口向下 (弦在圖形下方)。

$0 < a < 1$ 時： $y = \log_a x$ 圖形的凹口向上 (弦在圖形上方)。

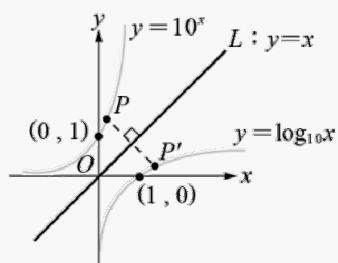
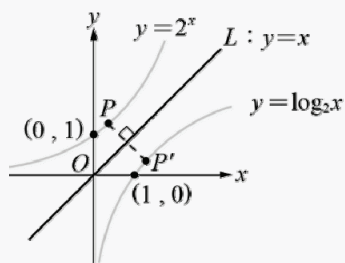
(圖形在線段 AB 上方)。

(圖形在線段 AB 下方)。



3. 同底的指數與對數函數的關係：

函數 $f(x) = 2^x$ 的圖形與函數 $g(x) = \log_2 x$ 的圖形和函數 $f(x) = 10^x$ 的圖形與函數 $g(x) = \log_{10} x$ 的圖形恆對稱於直線 $L: y = x$ 。



一 觀念是非題：正確請填○，錯誤請填×，每題 2 分，共 10 分

- (○) 1. 設 $f(x)=\log x$ ， $f(5)>f(3)$ 。
(○) 2. 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上任取兩點 A, B ，直線 AB 的斜率一定是正數。
(○) 3. $y=\log_2 x$ 與 $y=2^x$ 的圖形對稱直線 $y=x$ 。
(×) 4. $y=\log_2 x$ 的圖形可以經由水平平移得到 $y=\log_2(4x)$ 的圖形。
(○) 5. $y=\log x$ 的圖形可以經由鉛直伸縮得到 $y=\log_2 x$ 的圖形。

解 1. ○： $f(x)=\log x$ 為嚴格遞增函數。

2. ○： $\because y=\log_2 x$ 為嚴格遞增函數

$\therefore$ 圖形上任取兩點連線的斜率必為正數

3. ○： $y=\log_2 x$ 與 $y=2^x$ 的圖形對稱直線 $y=x$ 。

4. ×： $y=\log_2(4x)=2+\log_2 x$ ， $y=\log_2 x$ 可以經由鉛直上移 2 單位得到
 $y=\log_2(4x)$ 。

5. ○： $\because y=\log_2 x=\frac{\log x}{\log 2}$

$\therefore y=\log x$ 可以經由鉛直伸縮 $\frac{1}{\log 2}$ 倍得到 $y=\log_2 x$

二 基礎題：每題 10 分，共 80 分

1. 試問下列各小題中最大的數為何？

(1) $\log_5 3$ 、1、 $\log_5 0.5$ 、0。(3 分)

(2) $\log_{0.5} 0.4$ 、1、 $\log_{0.5} 5$ 、0。(3 分)

(3) $\log_2 3$ 、0、 $\log_{0.5} 0.3$ 、1。(4 分)

配合課本例題 1

解 (1) $\because y=\log_5 x$ 為嚴格遞增函數

$\therefore 1=\log_5 5 > \log_5 3 > 0=\log_5 1 > \log_5 0.5$ ，最大的數是 1

(2) $\because y=\log_{0.5} x$ 為嚴格遞減函數

$\therefore \log_{0.5} 0.4 > 1=\log_{0.5} 0.5 > 0=\log_{0.5} 1 > \log_{0.5} 5$ ，最大的數是 $\log_{0.5} 0.4$

(3) $\because y=\log_2 x$ 為嚴格遞增函數

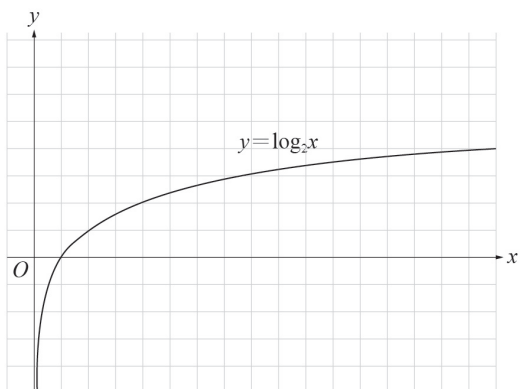
$\therefore \log_{0.5} 0.3 = \log_2 \frac{1}{0.3} > \log_2 3 > 1 = \log_2 2 > 0 = \log_2 1$ ，

最大的數是 $\log_{0.5} 0.3$

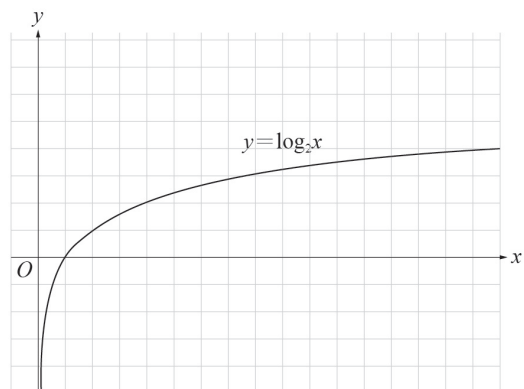
2. 利用 $y = \log_2 x$ 的圖形畫出下列圖形：

配合課本習題 A3

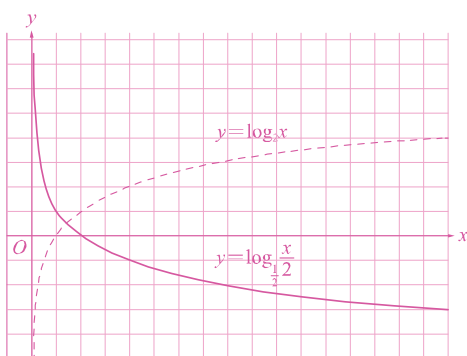
(1) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$ (5 分)



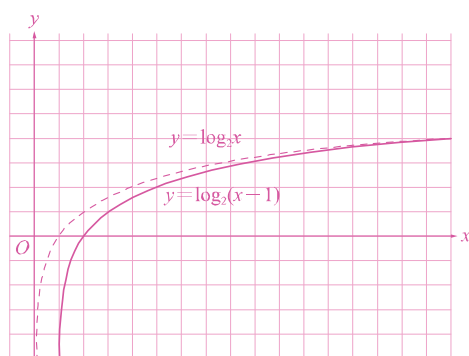
(2) $y = \log_2(x-1)$ (5 分)



解 (1) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$ 。



(2) $y = \log_2(x-1)$ 。



3. 解下列方程式：

(1) $\log_2(2x+7) - \log_2 x = 2$ 。(5分)

(2) $\log(2x) + \log(x-4) = 1$ 。(5分)

配合課本例題 2

解 (1) $\log_2(2x+7) - \log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{2x+7}{x} = \log_2 4 \Rightarrow \frac{2x+7}{x} = 4$

$\Rightarrow x = \frac{7}{2}$ (代入方程式對數有意義)，故 $x = \frac{7}{2}$ 。

(2) $\log(2x) + \log(x-4) = 1 \Rightarrow \log 2x(x-4) = \log 10 \Rightarrow 2x(x-4) = 10$

$\Rightarrow x = 5$ 或 -1 (-1 會使對數沒意義，故不合)，故 $x = 5$ 。

4. 解下列不等式：

(1) $\log(2x-4) < 1$ 。(5分)

(2) $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}}(x-4) > -1$ 。(5分)

配合課本例題 3

解 (1) $\log(2x-4) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 > 0 \\ \log(2x-4) < \log 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 2x-4 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 7。$

(2) $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}}(x-4) > -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-4 > 0 \\ \log_{\frac{1}{5}} x(x-4) > \log_{\frac{1}{5}} 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-4 > 0 \\ x(x-4) < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 5。$

5. 已知函數 $f(x) = b + \log_a x$ 的 4 個函數值如下表。

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8
$f(x)$	$8-k$	p	k	$p-4$

試求下列兩小題：

(1) 函數 $f(x)$ 。(5 分)

(2) k 與 p 的值。(5 分)

配合課本例題 2

解 (1) 依題意： $f(\frac{1}{2}) = p$ ， $f(8) = p-4$ ，

$$\Rightarrow b + \log_a \frac{1}{2} = p \text{ 且 } b + \log_a 8 = p-4，$$

$$\text{兩式相減可得 } \log_a \frac{1}{2} - \log_a 8 = 4 \Rightarrow \log_a \frac{1}{16} = 4 \Rightarrow a^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow a = \frac{1}{2}，$$

$$f(\frac{1}{8}) = 8-k，f(2) = k \Rightarrow b + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 8-k \text{ 且 } b + \log_{\frac{1}{2}} 2 = k，$$

$$\text{兩式相加可得 } 2b + 3 - 1 = 8 \Rightarrow b = 3，\text{ 故 } f(x) = 3 + \log_{\frac{1}{2}} x。$$

$$(2) k = f(2) = 2，p = f(\frac{1}{2}) = 4。$$

6. 根據「牛頓冷卻定律」，烘烤起司蛋糕出爐 t 分鐘之後溫度 $T(t)$ 可表為

$$T(t) = \alpha \cdot 3^{kt} + 4 (^{\circ}\text{C})。$$

已知剛出爐時，蛋糕的溫度為 184°C ，經過 5 分鐘後，降為 94°C 。

(1) 試求常數 α 與 k 的值。(5 分)

(2) 利用(1)所求 k 的值，估計 15 分鐘後，蛋糕的溫度約為多少度？(5 分)

(四捨五入至整數位)。

配合課本 P.76

解 (1) 依題意： $T(0) = \alpha + 4 = 184$ ， $\alpha = 180$ ，

$$T(5) = \alpha \cdot 3^{5k} + 4 = 94$$

$$\Rightarrow 180 \cdot 3^{5k} = 90$$

$$\Rightarrow 3^{5k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 5k = \log_3 0.5 \Rightarrow k = \frac{1}{5} \log_3 0.5。$$

$$(2) \because 3^{5k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3^k = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{5}} \Rightarrow T(t) = 180 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5}} + 4$$

$$\therefore T(15) = 180 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{15}{5}} + 4 \approx 26.5 \approx 27 (^{\circ}\text{C})$$

7. 設 $f(x) = 3\log_2 x + 4$ ，在 $f(x)$ 的圖形上取兩點 $A(m, n)$, $B(r, s)$ ，且 $m > r$ ，已知直線 AB 的斜率是 3， $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{10}$ ，試求 A, B 兩點的坐標。

解 依題意： $f(m) = n, f(r) = s \Rightarrow \begin{cases} 3\log_2 m + 4 = n \\ 3\log_2 r + 4 = s \end{cases}$

配合課本習題 A7

$$\Rightarrow n - s = 3(\log_2 m - \log_2 r) \Rightarrow n - s = 3\log_2 \frac{m}{r}$$

$\therefore$ 直線 AB 的斜率是 3， $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{10}$

$$\therefore \frac{n-s}{m-r} = 3 \text{ 且 } \sqrt{(m-r)^2 + (n-s)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-s=3 \\ m-r=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{m}{r} = 1 \\ m-r=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{r} = 2 \\ m-r=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=7 \\ s=4 \end{cases},$$

故 $A(2, 7), B(1, 4)$ 。



8. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y = \log_{10} x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形於 P, Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y = \log_{10} x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形於 R, S 兩點。

(1) 試求直線 QS 的斜率。(5 分)

(2) 試問四邊形 $PQSR$ 的面積最接近哪一個正整數？(5 分) (已知 $\log 2 \approx 0.3010$)

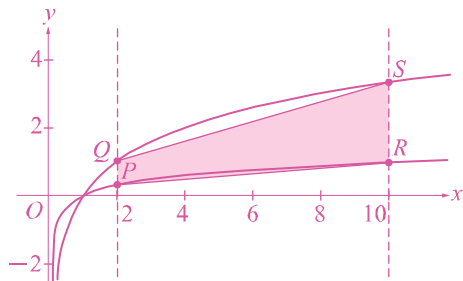
解 (1) 依題意 $P(2, \log_{10} 2)$ 、 $Q(2, \log_2 2)$ 、 $S(10, \log_2 10)$ 、 $R(10, \log_{10} 10)$

$$\text{直線 } QS \text{ 的斜率} = \frac{\log_2 10 - \log_2 2}{10 - 2} = \frac{\log_2 5}{8}。$$

(2) 如圖，四邊形 $PQSR$ 的面積 $= \frac{1}{2}(\overline{QP} + \overline{SR}) \times (10 - 2)$

$$\overline{QP} + \overline{SR} = (1 - \log_{10} 2) + (\log_2 10 - 1) = (1 - 0.3010) + \frac{1 - 0.3010}{0.3010} \approx 2.99。$$

四邊形 $PQSR$ 的面積 $= \frac{1}{2}(\overline{QP} + \overline{SR}) \times (10 - 2)$ 最接近 12。



三 進階題：共 10 分

1. 在社群媒體發布廣告，可以用 $f(d) = P(1 - 8^{-\frac{d}{4}})$ 來近似廣告發布後 d 天觸及此廣告的人數，其中 P 為粉絲的數目。根據這個數學模型回答下列問題：

(1) 廣告發布 4 天後，大約會有多少百分比的粉絲會觸及此廣告？(4 分)

(2) 請問此廣告發布多少天後，就會有 95% 的粉絲會觸及此廣告？(6 分)

(四捨五入至整數位， $\log 2 \approx 0.3010$)

解 (1) $\frac{f(4)}{P} = 1 - 8^{-1} = \frac{7}{8} = 87.5\%$ 。

(2) 設 n 天之後就會有 95% 的粉絲會觸及此廣告

$$\Rightarrow 1 - 8^{-\frac{n}{4}} = 0.95 \Rightarrow 8^{-\frac{n}{4}} = 0.05$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-n}{4}\right) \log 8 = \log 0.05$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-n}{4}\right)(3 \log 2) = -1 - \log 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{4(1 + \log 2)}{3 \log 2} \approx 5.76 \approx 6 \text{ (天)}。$$