引起動機

我們知道，一般自行車的車輪都是圓形的。騎乘時，可以利用車輪滾動的圈數來計算出距離，像是自行車使用的碼表，都會在車輪的鋼絲裝上一個感應磁鐵，記錄車輪滾動的圈數。最後將車輪滾動的圈數乘上圓周長，就可以知道騎乘的距離是多少了。你知道除了圓周長外，圓還有哪些性質呢？

P.88 內文

數學素養UP

2-1 點、直線與圓之間的位置關係

過去我們已經認識一些平面幾何圖形及其性質，如三角形、平行四邊形、梯形等。接下來，我們要介紹另一個常見的平面圖形。

主題 1 圓

圓

在平面上，與一個固定點距離相等的所有點，組成的圖形稱為**圓**。這個固定點稱為**圓心**，圓心到圓上任一點的連線段稱為**半徑**。如圖 1，O 點是圓 O 的圓心，$\overline{OA}$ 是圓 O 的半徑。

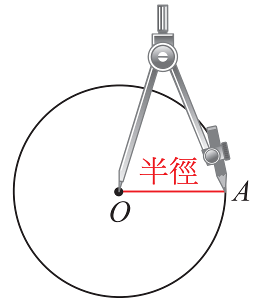


圖 1

弦

將圓上相異兩點所連接的線段稱為**弦**，通過圓心的弦稱為**直徑**，而直徑是該圓最長的弦。如圖 2，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 都是弦，其中 $\overline{CD}$ 為直徑。

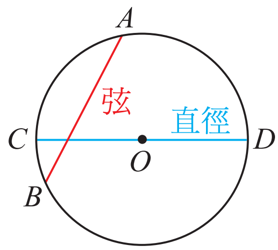


圖 2

弧

每一條弦都會將圓分成兩部分，每一部分都稱為**弧**。當弦為直徑時，這兩個弧會一樣大，稱為**半圓**。如果弦不是直徑，弧就不一樣大，其中較大的弧稱為**優弧**，較小的弧稱為**劣弧**。如圖 3，$\overline{AB}$ 將圓分成大小兩弧，兩弧皆可記為 $\overset{\frown}{AB}$，但為了加以區別，通常將劣弧表示為 $\overset{\frown}{AB}$；而優弧可在弧上另取一點 C，表示為 $\overset{\frown}{ACB}$。$\overset{\frown}{AB}$ 除了可用來表示這段弧，也可以表示它的長度。

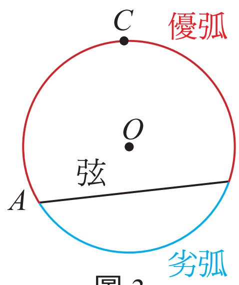


圖 3

弓形

圓的一弦將圓分成兩個弧，此弦與任一弧所圍成的圖形稱為弓形，如圖 4。

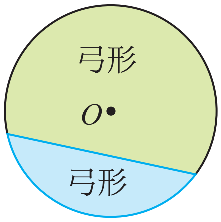


圖 4

圓心角

以圓心為頂點，兩半徑為邊所夾的角，稱為圓心角。如圖 5，$\angle 1$、$\angle 2$ 都是圓心角。

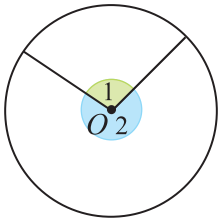


圖 5

扇形

在圓上，兩半徑與一弧所圍成的圖形，稱為扇形。如圖 6，半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 將圓分成兩個扇形，在沒有特別指定下，我們所說的扇形 AOB 通常是指圓心角較小的扇形，如圖 6 中的藍色部分。

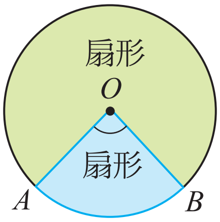
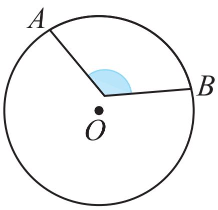


圖 6

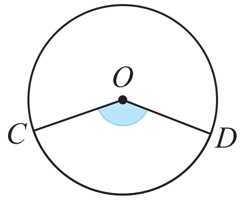
隨堂練習

1. 下列各角何者是圓 O 的圓心角？答：________。

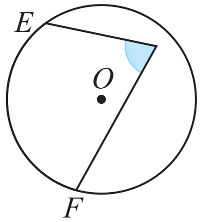
(A)



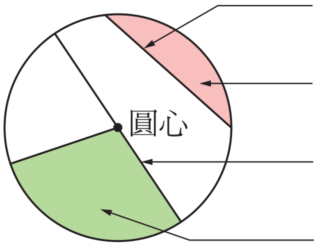
(B)



(C)



2. 在下列空格中填入適當名稱。



連接圓上任兩點的線段：________。

圓的一弦和一弧所圍成的圖形：________。

通過圓心的弦：________。

兩半徑和一弧所圍成的圖形：________。

阿基米德（*Archimedes*，西元前 287～212 年），希臘數學家，史上第一位用正多邊形的面積計算出 $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$ 的數學家，即確定 π 值約為 3.14。

弧長與扇形面積

我們在國小時學過圓周長和圓面積的公式：

圓周長＝直徑×圓周率；圓面積＝半徑×半徑×圓周率。

其中**圓周率**是「圓周長與直徑的比值」，約為 3.14。

事實上，圓周率無法以有限小數或分數來表示，在數學上以符號「π」（讀作「ㄆㄞ」）來表示它。當一圓的半徑為 r，可得：

圓周長＝$2r\times\pi=2\pi r$；圓面積＝$r\times r\times\pi=\pi r^2$。

此時，弧長與扇形面積又該如何計算呢？

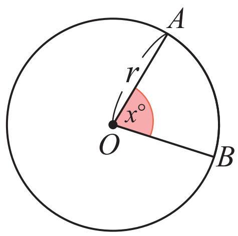


圖 7

如圖 7，圓心角 $\angle AOB=x°$，由於周角是 $360°$，

因此 $\angle AOB$ 是周角的 $\frac{x}{360}$ 倍，

所以 $\angle AOB$ 所對的 $\overparen{AB}$ 長度就是圓周長的 $\frac{x}{360}$ 倍。

所夾的扇形 AOB 面積就是圓面積的 $\frac{x}{360}$ 倍。也就是說：

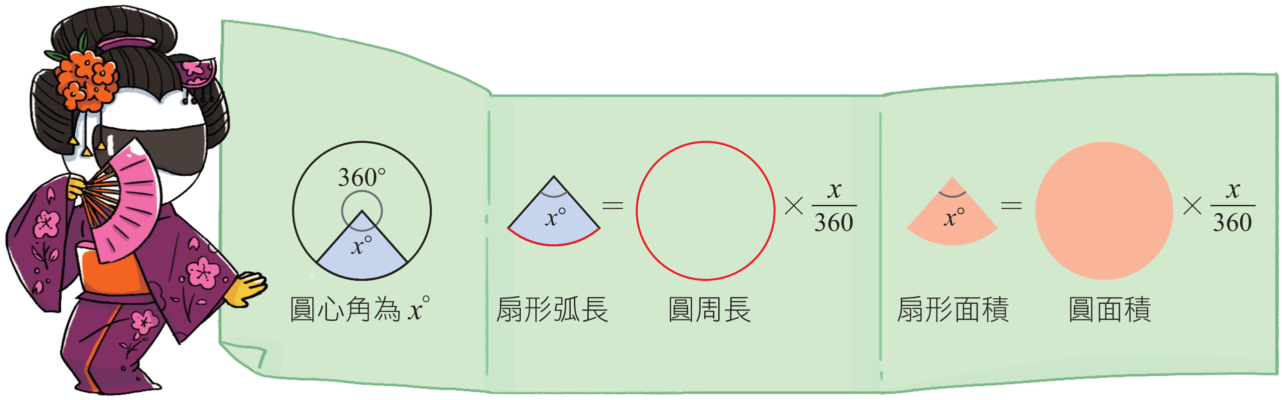
Key point

弧長與扇形面積

當一圓的半徑為 r，其中一弧所對應的圓心角為 $x°$，則：

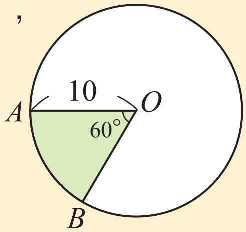
(1) 弧長＝圓周長×$\frac{x}{360}$＝$2\pi r\times\frac{x}{360}$。

(2) 扇形面積＝圓面積×$\frac{x}{360}$＝$\pi r^2\times\frac{x}{360}$。



例 1 求弧長、扇形周長和面積

如右圖，圓 O 的半徑為 10 公分，圓心角 $\angle AOB=60^{\circ}$，



則：(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為多少公分？

(2) 扇形 AOB 的周長為多少公分？

(3) 扇形 AOB 的面積為多少平方公分？

計算機操作

AC 10 ÷ 3 × SHIFT π EXP =

10.47197551

可以利用計算機上的 π 鍵，求出含有圓周率的近似值喔！

解 (1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度 $=2\pi\times10\times\dfrac{60}{360}$

$=\dfrac{10}{3}\pi$ (公分)。

(2) 扇形 AOB 的周長 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}$

$=\dfrac{10}{3}\pi+10+10$

$=\dfrac{10}{3}\pi+20$ (公分)。

Hint

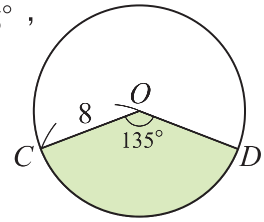
扇形周長＝弧長＋半徑×2。

(3) 扇形 AOB 的面積 $=\pi\times10^{2}\times\dfrac{60}{360}$

$=\dfrac{50}{3}\pi$ (平方公分)。

隨堂練習

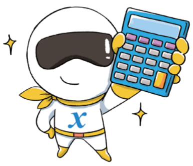
如右圖，圓 O 的半徑為 8 公分，圓心角 $\angle COD=135^{\circ}$，



則：(1) $\overset{\frown}{CD}$ 的長度為多少公分？

(2) 扇形 COD 的周長為多少公分？

(3) 扇形 COD 的面積為多少平方公分？



有些計算機上會有 π 的按鍵，這就代表圓周率的意思。

(操作方式可參閱書末 P.[9]～[10]「計算機教學」)

例 2　已知扇形面積或弧長求圓心角

(1) 已知一扇形的面積為 48π 平方公分，半徑為 12 公分，求此扇形的圓心角。

(2) 已知半徑為 15 公分的圓中，有一弧長為 5π 公分，求此弧所對應的圓心角。

解

(1) 假設圓心角為 x°，

$\pi \times 12^2 \times \dfrac{x}{360} = 48\pi$，

得 $x = 120$，

所以圓心角為 120°。

(2) 假設圓心角為 y°，

$2\pi \times 15 \times \dfrac{y}{360} = 5\pi$，

得 $y = 60$，

所以圓心角為 60°。

Hint

也可以這樣算：

(1) 圓面積 $= \pi \times 12^2 = 144\pi$，

扇形面積占圓面積的 $\dfrac{48\pi}{144\pi} = \dfrac{1}{3}$，

所以此扇形的圓心角 $= 360^\circ \times \dfrac{1}{3} = 120^\circ$。

(2) 圓周長 $= 2\pi \times 15 = 30\pi$，

弧長占圓周長的 $\dfrac{5\pi}{30\pi} = \dfrac{1}{6}$，

所以此扇形的圓心角 $= 360^\circ \times \dfrac{1}{6} = 60^\circ$。

隨堂練習

(1) 已知一扇形的面積為 2π 平方公分，半徑為 4 公分，求此扇形的圓心角。

(2) 已知半徑為 9 公分的圓中，有一弧長為 2π 公分，求此弧所對應的圓心角。