

根式也滿足乘法的交換律與結合律，我們來看下面的例題。

$a\sqrt{b} \times c$ 的運算 學習內容 N-8-1

計算下列各式的值。

(1) $(-2) \times 3\sqrt{5}$

(2) $4\sqrt{2} \times \frac{1}{6}$

(3) $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

解

$$\begin{aligned} (1) (-2) \times 3\sqrt{5} \\ &= (-2) \times 3 \times \sqrt{5} \\ &= -6 \times \sqrt{5} \\ &= -6\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 4\sqrt{2} \times \frac{1}{6} \\ &= 4 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{6} \\ &= 4 \times \frac{1}{6} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \langle \text{方法一} \rangle \\ &\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ \langle \text{方法二} \rangle \\ &\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{2 \times \sqrt{3}}{3 \times 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\frac{3}{5} \times 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{5} \times 5 \times \sqrt{2} \\ &= 3 \times \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{12} \times (-16)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{12} \times \sqrt{5} \times (-16) \\ &= \frac{1}{12} \times (-16) \times \sqrt{5} \\ &= -\frac{4}{3} \times \sqrt{5} \\ &= -\frac{4}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

(3) $\frac{3\sqrt{7}}{4} \times \frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\sqrt{7} \times 1}{4 \times 9} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{12} \end{aligned}$$

易 重新布題

計算下列各式的值。

易 重新布題

計算下列各式的值。

(1) $\frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\sqrt{6} \times 3\sqrt{11}$

● 根式的乘除運算

1. 根式的乘法運算

我們知道 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，那 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 呢？

根據平方根的意義：「若 $b^2 = a$ ，則 b 是 a 的平方根。」

因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = 2 \times 5$ ，

所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 是 2×5 的正平方根，又 $\sqrt{2 \times 5}$ 也是 2×5 的正平方根，

因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ 。我們可以得到以下結論：

Key point 根式的乘法運算

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$



我們可以利用
計算機來檢驗

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \times \sqrt{5} &\rightarrow 2 \times 5 = 10 \rightarrow \sqrt{10} = 3.16227766 \\ \sqrt{2 \times 5} &\rightarrow 2 \times 5 = 10 \rightarrow \sqrt{10} = 3.16227766 \end{aligned}$$

例 2

根式的乘法運算 學習內容 N-8-1

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

(2) $(-\frac{2}{3}\sqrt{5}) \times 4\sqrt{7}$

(3) $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$

1 練習兩根式的乘法運算，知道
 $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$ 。

解

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} (2) (-\frac{2}{3}\sqrt{5}) \times 4\sqrt{7} &= (-\frac{2}{3}) \times \sqrt{5} \times 4 \times \sqrt{7} \\ &= (-\frac{2}{3}) \times 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} = -\frac{8}{3}\sqrt{35} \end{aligned}$$

$$(3) 7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 7 \times \sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{2} = 7 \times 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 35 \times 2 = 70$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{11}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{5 \times 11} \\ &= \sqrt{55} \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{5})$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times (-\frac{1}{5}) \times \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{5}) \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \\ &= -\frac{1}{10}\sqrt{10} \end{aligned}$$

(3) $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} &= 3 \times \sqrt{6} \times 4 \times \sqrt{6} \\ &= 3 \times 4 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \\ &= 12 \times 6 \\ &= 72 \end{aligned}$$

中 重新布題

若 $a = -3\sqrt{2}$ 、 $b = 4\sqrt{2}$ 、 $c = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ 、 $d = \frac{9}{2}\sqrt{5}$ ，則：

2. 根式的除法運算

我們知道 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 5}$ 呢？
 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 的值可用 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 表示，因為 $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$ ，
 所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，又 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 也是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ 。
 我們可以得到以下結論：

Point 根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$



我們可以利用
計算機來檢驗

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \rightarrow 2 \div 5 = 0.632455532$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \rightarrow 2 \div 5 = 0.632455532$$

例 3

根式的除法運算 學習內容 N-8-1

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{35} \div \sqrt{5}$ (2) $(-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3})$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

解

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{5} = \sqrt{35 \div 5} = \sqrt{7}$$

$$(2) (-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3}) = -\frac{12\sqrt{6}}{8\sqrt{3}} = -\frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{6}{3}} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \div \sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \div \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \sqrt{98} \div \sqrt{14} = \sqrt{98 \div 14} = \sqrt{7}$$

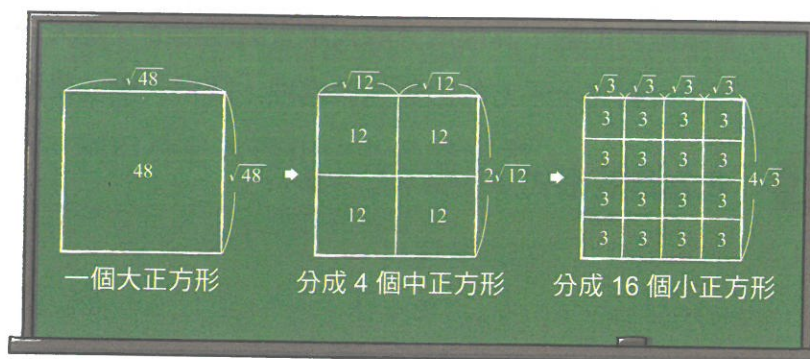
$$(2) 9\sqrt{35} \div (-3\sqrt{7}) = -\frac{9\sqrt{35}}{3\sqrt{7}} = -3 \times \sqrt{\frac{35}{7}} = -3\sqrt{5}$$

$$(3) \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}} \div \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{33}{7} \times \frac{21}{11}} = \sqrt{9} = 3$$

中 重新布題

若 $a = -\sqrt{24}$ 、 $b = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ ，則 $a \div b = ?$

最簡根式與有理化



無論如何切割，大正方形的面積始終不變，雖然邊長的表達方式不同，但實際長度是相同的。

由上圖可知道 $\sqrt{48} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ ，這些根式看起來雖然不一樣，但它们的值都相等。如果可以將根式化簡成 $a\sqrt{b}$ 的形式，其中 a 為整數、分數或小數， b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，就稱 $a\sqrt{b}$ 為**最簡根式**，所以 $4\sqrt{3}$ 是最簡根式， $3\sqrt{2}$ 、 $-7\sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{2}\sqrt{15}$ 等都是最簡根式。

圖解筆記

最簡根式
整數、分數、小數

$$a\sqrt{b}$$

- ① 正整數
② 標準分解式中，質因數次數都是 1

2 根式的化簡中，不管被開方數是分數或小數，最後化為最簡根式時都必須是整數。

若有下列幾種情形，就**不是**最簡根式：

- (1) 根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1。

例如： $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3}$ 、 $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$ 。

- (2) 分數的分母含有根式。例如： $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $-\frac{9}{\sqrt{6}}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。

- (3) 根號內的數為分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 、 $-\sqrt{0.1}$ 。

隨堂練習

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$\sqrt{2.7}$ $\sqrt{18}$ $-\sqrt{42}$ $\frac{8}{3}\sqrt{15}$ $\frac{7}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{\frac{6}{11}}$ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$

易 重新布題

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$\sqrt{6.3}$ $\sqrt{28}$ $\frac{2}{\sqrt{7}}$ $4\sqrt{\frac{1}{2}}$

易 重新布題

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{50}$ $\sqrt{39}$

理

第 79 頁提到的三種不是最簡根式的情形，又該如何化簡呢？

1. 當根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1：

可以針對完全平方的因數先做處理，讓根式變成最簡根式。

4

化為最簡根式 學習內容 N-8-1

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{5^3}$

(2) $\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{8} \times \sqrt{45}$

(1) $\sqrt{5^3}$

$$= \sqrt{5^2 \times 5}$$

$$= \sqrt{5^2} \times \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

(2) $\sqrt{18}$

$$= \sqrt{2 \times 3^2}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{3^2}$$

$$= \sqrt{2} \times 3$$

$$= 3\sqrt{2}$$

(3) $\sqrt{8} \times \sqrt{45}$

$$= \sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{3^2 \times 5}$$

$$= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{10}$$

Hint

根式相乘時，可先將根號內的數相乘之後再化簡，也可以先各自化簡之後再相乘。

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{2^5}$

$$= \sqrt{2^4 \times 2}$$

$$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{2}$$

$$= 2^2 \times \sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

(2) $\sqrt{80}$

$$= \sqrt{2^4 \times 5}$$

$$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{5}$$

$$= 2^2 \times \sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

(3) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$

$$= \sqrt{2^2 \times 3} \times \sqrt{2^2 \times 5}$$

$$= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{15}$$

課外探索 P.281

◆ 常見的分母有理化因式

2. 當分數的分母含有根式：

可以利用擴分將分子、分母同乘以某數，讓此分數變成最簡根式。

將分母化為不帶有根號的過程，稱為**分母有理化**。

例 5

利用分母有理化化為最簡根式 學習內容 N-8-1

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

(1) $\frac{2}{\sqrt{10}}$

$$= \frac{2 \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{5}$$

分母有理化

(2) $\frac{5}{\sqrt{12}}$

(2) $\frac{5}{\sqrt{12}}$

$$= \frac{5}{\sqrt{2^2 \times 3}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

分母有理化

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

$$= \frac{2 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) $\frac{3}{\sqrt{32}}$

$$= \frac{3}{\sqrt{2^5}}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

易 重新布題

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\frac{3}{\sqrt{12}}$

(2) $\frac{2}{\sqrt{14}}$

(3) $\frac{6}{\sqrt{15}}$

(4) $-\frac{8}{\sqrt{20}}$

易 重新布題

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{8 \times 20 \times 65}$