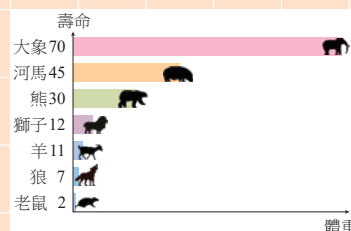


3 指數

國中學過形如 5^3 、 2^0 的指數，以及科學記號中 10^{-2} 的符號，這些都是次方為整數的指數。此外，還有次方為有理數或實數的數字，例如動物學家研究發現，許多哺乳動物的壽命與其體重的 $\frac{1}{4}$ 次方成正比，且基礎代謝率與其體重的 $\frac{3}{4}$ 次方成正比。其中的 $\frac{1}{4}$ 次方、 $\frac{3}{4}$ 次方是什麼意思呢？

本單元先複習國中學過的指數，進而延伸到有理數與實數的指數。



▲ 圖1



甲 正整數指數與指數律

對於實數 a 和正整數 n ，我們以記號 a^n 來表示 a 自乘 n 次的乘積，即

$$a^n = \overbrace{aa \cdots a}^{n \text{ 個}},$$

並將 a^n 讀作「 a 的 n 次方」，其中 a 稱為**底數**， n 稱為**指數**。習慣上，也將 a^2 讀作 a 的平方， a^3 讀作 a 的立方。

當 a, b 是實數， m, n 是正整數時，利用乘法的交換律與結合律可得：

$$(1) a^m a^n = \overbrace{(aa \cdots a)}^{m \text{ 個}} \overbrace{(aa \cdots a)}^{n \text{ 個}} = \overbrace{aa \cdots a}^{(m+n) \text{ 個}} = a^{m+n}.$$

$$(2) (a^m)^n = \overbrace{a^m a^m \cdots a^m}^{n \text{ 個}} = \overbrace{(aa \cdots a)(aa \cdots a) \cdots (aa \cdots a)}^{n \text{ 個}, m \text{ 個}, m \text{ 個}, \dots, m \text{ 個}} = \overbrace{aa \cdots a}^{mn \text{ 個}} = a^{mn}。$$

$$(3) a^n b^n = \overbrace{(aa \cdots a)}^{n \text{ 個}} \overbrace{(bb \cdots b)}^{n \text{ 個}} = \overbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}^{n \text{ 個}} = (ab)^n。$$

我們稱這些指數的運算性質為指數律，整理如下。

正整數指數的指數律

設 a, b 為實數，且 m, n 為正整數，則

$$(1) a^m a^n = a^{m+n}。$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}。$$

$$(3) a^n b^n = (ab)^n。$$

利用正整數指數的指數律來練習一道例題。

例題 1

利用指數律求下列各式的值：

$$(1) 2^3 \times 2^5。$$

$$(2) \left((-1)^2\right)^3。$$

$$(3) (-5)^3 \times 2^3。$$

解

$$(1) 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256。$$

$$(2) \left((-1)^2\right)^3 = (-1)^{2 \times 3} = (-1)^6 = 1。$$

$$(3) (-5)^3 \times 2^3 = ((-5) \times 2)^3 = (-10)^3 = -1000。$$

隨堂練習

利用指數律完成下列填空：

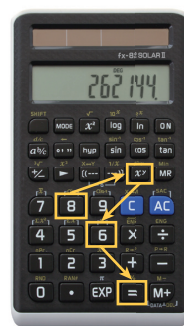
$$(1) (-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^{\square}。 \quad (2) (2^4)^{\square} = 2^{20}。 \quad (3) 2^{10} \times (-3)^5 = \square^5。$$

我們可以使用計算機，更快速地求指數的值。以 8^6 為例，只要依序按下

$$8 \text{ } x^y \text{ } 6 \text{ } =$$

如圖 2，就可以得到 8^6 的值。

來做一題正整數指數的應用問題。



▲圖2

例題 2

將一張厚度為 0.01 公分足夠大的紙，一直對摺。問：

- (1) 對摺 10 次後厚度為幾公分？
- (2) 在理想的情況下，要摺幾次它的厚度會超過地球到月球的距離 384400 公里呢？

解

- (1) 每對摺一次，紙張厚度加倍。若對摺 n 次，則紙張厚度為

$$0.01 \times 2^n \text{ 公分。}$$

將 $n = 10$ 代入上式，得

$$0.01 \times 2^{10} = 0.01 \times 1024 = 10.24。$$

故對摺 10 次後厚度為 10.24 公分。

- (2) 分別用不同的 n 代入 0.01×2^n ，利用計算機求近似值並列表如下。

n	10	20	30
紙張厚度	10.24 公分	105 公尺	107 公里
n	40	41	42
紙張厚度	109951 公里	219902 公里	439805 公里

由上表可知：當對摺 42 次時，紙張的厚度就會超過地球到月球距離了。

隨堂練習

在理想的情況下，將一張厚度為 0.01 公分足夠大的紙，一直對摺。問：對摺 25 次後，紙張厚度最接近下列哪一個選項？

- (1) 臺北 101 高度約 509 公尺 (2) 七星山高度約 1120 公尺
(3) 玉山高度約 3952 公尺 (4) 聖母峰高度約 8844 公尺。

實際的情況紙張是無法無限次的對摺下去，目前金氏世界紀錄為 13 次，是由美國麻州聖馬可中學的師生所保持。

前面討論的指數都只限於正整數，接下來將逐步把指數的範圍由正整數推廣至整數、有理數與實數，例如 $10^0, 10^{-1}, 5^{\frac{1}{2}}, 3^{\sqrt{2}}, \dots$ 等，同時希望指數律仍然成立。

乙 整數指數與指數律

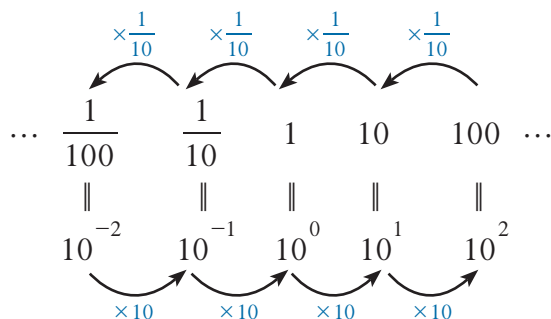
在國中時期曾經學過以科學記號表示正數，例如：

$$0.0345 = 3.45 \times 10^{-2}, 0.00345 = 3.45 \times 10^{-3},$$

其中 $10^{-2} = 0.01 = \frac{1}{100}$ ， $10^{-3} = 0.001 = \frac{1}{1000}$ 。這些形如 10^n 的數，指數每增加

1，其值就變成原來的 10 倍；相反的，指數每減少 1，其值就變成原來的 $\frac{1}{10}$ 倍。

依照這樣的規律有如下圖 3 的對應關係。



▲ 圖3

一般而言，對零指數和負整數指數定義如下：

整數指數的定義

設 a 是不為零的實數，且 n 為正整數，定義

$$(1) a^0 = 1 \circ \quad (2) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \circ$$

整數指數是否仍滿足指數律呢？我們先檢驗指數均為負整數的情形：設 a, b 是不為零的實數，且 m, n 均為正整數，則

$$(1) a^{-m} a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} \circ$$

$$(2) (a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m} \right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m} \right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m} \right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)} \circ$$

$$(3) (a^{-n})(b^{-n}) = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{(ab)^n} = (ab)^{-n} \circ$$

同學可以自行檢驗指數不全為負整數的情形。事實上，當指數是整數指數時，指數律仍然是成立的，因此，可以把國中學過的正整數指數律推廣到整數指數律。

整數指數的指數律

設 a, b 是不為零的實數，且 m, n 為整數，則

$$(1) a^m a^n = a^{m+n} \circ \quad (2) (a^m)^n = a^{mn} \circ \quad (3) a^n b^n = (ab)^n \circ$$

練習一道整數指數定義的例題。

例題 3

求下列各式的值：

$$(1) (\pi^{25} + 64^{10})^0 \quad (2) \frac{3^5}{3^7} \circ$$

解

$$(1) (\pi^{25} + 64^{10})^0 = 1 \circ$$

$$(2) \frac{3^5}{3^7} = 3^5 \times 3^{-7} = 3^{5+(-7)} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \circ$$

隨堂練習

求下列各式的值：

$$(1) \frac{1}{(3^{107} + \pi^2)^0} \quad (2) \frac{2^{-1}}{2^{-3}} \circ$$

由例題3(2)的方法，可得當 a 為非零實數，且 m, n 為正整數時，

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \circ$$

而當 m, n 為整數時，因為 $a^{m-n} a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$ ，所以上式亦成立。

再來看一道利用整數指數的指數律的例題。

例題 4

利用指數律求下列各式的值：

$$(1) (-5)^3 \times (-5)^{-4} \quad (2) (4^{-1})^{-2} \quad (3) 21^{-2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}。$$

解

$$(1) (-5)^3 \times (-5)^{-4} = (-5)^{3+(-4)} = (-5)^{-1} = -\frac{1}{5}。$$

$$(2) (4^{-1})^{-2} = 4^{(-1) \times (-2)} = 4^2 = 16。$$

$$(3) 21^{-2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = \left(21 \times \frac{1}{7}\right)^{-2} = (3)^{-2} = \frac{1}{9}。$$

隨堂練習

利用指數律完成下列填空：

$$(1) \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times 3^{-8} = 3^{\square} \quad (2) (2^{\square})^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \quad (3) 2^{-10} \times 3^{-5} = \square^{-5}。$$

接著來看一道與乘法公式結合的例題。

例題 5

已知 $a > 0$ 且 $a + a^{-1} = 3$ ，求下列各式的值：

- (1) $a^2 + a^{-2}$ 。 (2) $a^3 + a^{-3}$ 。

解

- (1) 將 $a + a^{-1} = 3$ 兩邊平方，得

$$(a + a^{-1})^2 = 3^2,$$

展開得

$$a^2 + 2aa^{-1} + a^{-2} = 9,$$

$$\text{即 } a^2 + a^{-2} = 9 - 2 = 7。$$

- (2) 將 $a + a^{-1} = 3$ 兩邊三次方，得

$$(a + a^{-1})^3 = 3^3,$$

展開得

$$a^3 + 3a^2a^{-1} + 3aa^{-2} + a^{-3} = 27,$$

$$\text{即 } a^3 + a^{-3} = 27 - 3(a + a^{-1}) = 27 - 3 \times 3 = 18。$$

隨堂練習

已知 $a > 0$ 且 $a - a^{-1} = 2$ ，求下列各式的值：

- (1) $a^2 + a^{-2}$ 。 (2) $a^4 + a^{-4}$ 。



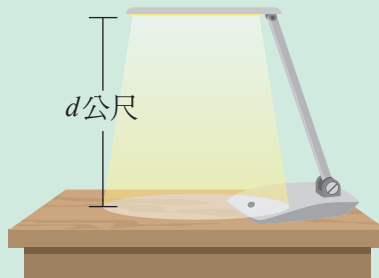
以下的例題是生活中跟整數指數有關的應用問題，其中提到的照度是每單位面積接收到光源亮度的量，單位是勒克斯，照度的大小除了取決於光源的強度之外，也與被照明物和光源之間的距離有關。

例題 6

設某檯燈與被照明物的距離為 d 公尺時，被照明物表面的照度為 E 勒克斯，且 E 與 d 的關係式為

$$E = 300d^{-2}。$$

已知此檯燈高度為 0.4 公尺，求放置於桌面上時，檯燈正下方的照度 E 的值。



解

將 $d = 0.4$ 代入 $E = 300d^{-2}$ ，得

$$E = 300 \times 0.4^{-2} = 300 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = 300 \times \frac{25}{4} = 1875 \text{ (勒克斯)}。$$

隨堂練習

承例題 6，已知可將此檯燈調高至 0.8 公尺，求調整後的照度 E_1 是原先的照度 E_2 之幾倍？

由隨堂練習可發現：當光源的距離變為原先的 2 倍時，照度變為原先的 $\frac{1}{4}$ 。

事實上，照度會與光源距離的平方呈反比的關係。

丙 有理數指數與指數律

若某細菌的數量每過 1 小時會變為原來的 2 倍，則 2 小時、3 小時後，其數量分別會變為原來的 2^2 、 2^3 倍。依此數學模型，經過 $\frac{1}{3}$ 小時（20 分鐘）後，細菌的數量可記為原來的 $2^{\frac{1}{3}}$ 倍。在符合指數律的前提下，要怎麼定義 $2^{\frac{1}{3}}$ 呢？



▲圖4

首先，國中學過 $\pm\sqrt{5}$ 的平方都是 5，但只有 $x = \sqrt{5}$ 是唯一滿足 $x^2 = 5$ 的正數。事實上，當 $a > 0$ 且 n 為正整數時，都恰有一個正數 x 會滿足 $x^n = a$ ，我們將此正數以符號 $\sqrt[n]{a}$ 表示，稱為 a 的**正 n 次方根**。例如：

符號 $\sqrt[3]{2}$ 代表滿足 $x^3 = 2$ 的（唯一）正數，

即 $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ 。因此可知 $\sqrt[n]{a} > 0$ 且 $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 。

接著，如果指數律 $(a^m)^n = a^{mn}$ 在 $m = \frac{1}{n}$ 時成立，那要怎麼定義有理數指數呢？以 $2^{\frac{1}{3}}$ 為例：因為此時 $(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^{\frac{1}{3} \times 3} = 2$ ，所以 $2^{\frac{1}{3}}$ 是滿足 $x^3 = 2$ 的正數，即

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}。$$

因此，我們規定

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ 且 } a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m。$$

最後，又因為 $((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$ ，所以 $(\sqrt[n]{a})^m$ 是滿足 $x^n = a^m$ 的正數，即

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}。$$

將以上內容整理如下。

有理數指數的定義

設 a 為正實數，且 n 為正整數， m 為整數，定義

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (2) a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad .$$

利用有理數指數的定義來做一道例題。

例題 7

以根式表示下列各數：

$$(1) 3^{\frac{1}{2}} \quad (2) 2^{1.5} \quad (3) 5^{-\frac{2}{3}} \quad .$$

解

$$(1) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad .$$

$$(2) 2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \quad .$$

$$(3) 5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5} \quad .$$

隨堂練習

$$(1) \text{以根式表示 } 7^{\frac{2}{3}} \text{ 與 } 7^{0.2} \quad .$$

$$(2) \text{已知 } r \text{ 為有理數，且 } 3^r = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{，求 } r \text{ 的值。}$$

有理數指數也會滿足指數律。

有理數指數的指數律

設 a, b 為正實數，且 p, q 都是有理數，則

$$(1) a^p a^q = a^{p+q} \circ \quad (2) (a^p)^q = a^{pq} \circ \quad (3) a^p b^p = (ab)^p \circ$$

利用有理數指數的指數律來練習一道例題。

例題 8

利用指數律，求下列各式的值：

$$(1) \left(\sqrt[3]{2^5}\right)^{\frac{12}{5}} \circ \quad (2) 7^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{2}} \circ$$

解

$$(1) \left(\sqrt[3]{2^5}\right)^{\frac{12}{5}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{12}{5}} = 2^{\frac{5}{3} \times \frac{12}{5}} = 2^4 = 16 \circ$$

$$(2) 7^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(7 \times \frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{2}} = (4)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8 \circ$$

隨堂練習

利用指數律，求下列各式的值：

$$(1) \left(\sqrt[5]{7^3}\right)^{\frac{10}{3}} \circ \quad (2) 5^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{16}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \circ$$

接著練習一道與乘法公式結合的例題。

例題 9

已知 $a > 0$ 且 $a + a^{-1} = 4$ ，求 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ 的值。

解

因為

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = a + 2\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{-\frac{1}{2}}\right) + a^{-1} = 4 + 2 = 6,$$

且 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} > 0$ ，所以 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ 。

隨堂練習

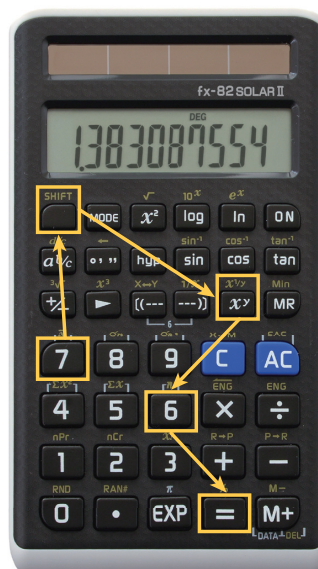
已知 $a > 0$ 且 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，求 $a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}$ 的值。

我們也可以使用計算機來求有理數指數的值。

以 $7^{\frac{1}{6}}$ 為例，只要依序按下

$$7 \text{ [SHIFT]} [x^{\frac{1}{y}}] 6 \text{ [=]}$$

如圖 5 所示，就可以得到 $7^{\frac{1}{6}}$ 的近似值。



▲圖5

來做一道與引言相關的應用問題。

例題 10

生物學家克萊柏發現多數哺乳動物（例如老鼠、貓、牛等）的基礎代謝率 B （千卡/天）與其體重 M （公斤）會滿足關係式

$$B = kM^{\frac{3}{4}},$$

其中 k 為大於 0 的常數。設老鼠的基礎代謝率為 b （千卡/天），體重為 m （公斤）。以下是克萊柏定律常見的釋例，試回答下列問題：

- (1) 設一隻貓的體重約為一隻老鼠的 100 倍，試問：貓的基礎代謝率 B （千卡/天）約為老鼠的幾倍？試選出最接近的選項。（單選）
 ① 10 倍 ② 20 倍 ③ 30 倍 ④ 40 倍 ⑤ 50 倍。
- (2) 設一頭牛的基礎代謝率約為一隻老鼠的 1000 倍，試問：牛的體重 M （公斤）約為老鼠的幾倍？

解

由題意可得，老鼠的基礎代謝率與體重的關係為

$$b = km^{\frac{3}{4}}。 \quad ①$$

- (1) 由題意可得，貓的體重為 $100m$ （公斤）且

$$B = k(100m)^{\frac{3}{4}}, \quad ②$$

由 $\frac{②}{①}$ 可得

$$\frac{B}{b} = \frac{k(100m)^{\frac{3}{4}}}{km^{\frac{3}{4}}} = 100^{\frac{3}{4}} = (10^2)^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} \approx 32。$$

故選 ③。

(2) 由題意可得，牛的基礎代謝率為 $1000b$ （千卡/天）且

$$1000b = kM^{\frac{3}{4}}, \quad \text{③}$$

由 $\frac{\text{③}}{\text{①}}$ 可得

$$1000 = \frac{kM^{\frac{3}{4}}}{km^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{3}{4}},$$

可推得 $\frac{M}{m} = (1000)^{\frac{4}{3}} = 10000$ 。

故牛的體重約為老鼠的 10000 倍。

數學超展開

科學家基於克萊伯定律繼續延伸，並發現不同的比例關係。例如哺乳動物的表面積與其體重的 $\frac{2}{3}$ 次方成正比等。更進一步，發現各器官的代謝率也跟體重有著次方的關係，例如人類大腦的代謝率與體重的 0.7 次方成正比、腎臟的代謝率與體重的 0.85 次方成正比等，如右表所示。

器官	次方
大腦	0.7
腎臟	0.85
肝臟	0.86
心臟	0.98
肌肉	1
骨骼	1.1

隨堂練習

服用止痛藥經過 h 小時後，殘留在身體裡的量為原來的 y 倍，其中 y 與 h 的關係為

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}。$$

問：

- (1) 當殘留的藥量為原來的 $\frac{1}{64}$ 倍時，才會被認定為代謝完成，那麼服用一顆止痛藥，至少需要幾個小時才能代謝完成？
- (2) 服用一顆止痛藥三天後，殘留在身體裡的量為原來的幾倍？

丁 實數指數與指數律

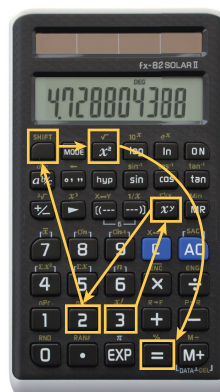
定義了有理數指數後，接著可將指數擴張至所有的實數，也就是說，要探討當 r 是無理數時， a^r 這個符號的意義。以 $3^{\sqrt{2}}$ 為例，我們利用 $\sqrt{2}$ 的範圍，來探討 $3^{\sqrt{2}}$ 的值。利用計算機列表如下：

$\sqrt{2}$ 的範圍	$3^{\sqrt{2}}$ 的範圍 ($a < 3^{\sqrt{2}} < b$)	
	a	b
$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$	$3^{1.4} \approx 4.7$	$3^{1.5} \approx 5.2$
$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	$3^{1.41} \approx 4.71$	$3^{1.42} \approx 4.76$
$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$	$3^{1.414} \approx 4.728$	$3^{1.415} \approx 4.733$
$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$	$3^{1.4142} \approx 4.7287$	$3^{1.4143} \approx 4.7293$
$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$	$3^{1.41421} \approx 4.72879$	$3^{1.41422} \approx 4.72884$
$1.414213 < \sqrt{2} < 1.414214$	$3^{1.414213} \approx 4.728801$	$3^{1.414214} \approx 4.728807$

上表中 $3^{\sqrt{2}}$ 的範圍最後會逼近一個實數，我們就定義它為 $3^{\sqrt{2}}$ 。其實，計算機也可快速地得到 $3^{\sqrt{2}}$ 的近似值，只要依序按下

$$3 \quad x^y \quad 2 \quad \text{SHIFT} \quad \sqrt{} \quad =$$

如圖6所示，就可以得到 $3^{\sqrt{2}}$ 的近似值。



▲圖6

一般而言，仿照以上的方法逼近的實數就是實數指數的值。這樣定義出來的實數指數仍滿足指數律（證明方式超出高中範圍，在此不加以討論）。

實數指數的指數律

設 a, b 為正實數， r, s 是任意實數，則

$$(1) a^r a^s = a^{r+s} \quad (2) (a^r)^s = a^{rs} \quad (3) a^r b^r = (ab)^r$$

利用實數指數的指數律練習一道例題。

例題 11

利用指數律，求下列各式的值：

$$(1) 10^{\sqrt{2}} \times 100^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} \quad (2) (3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}} \quad (3) \left(\frac{3}{2}\right)^{2\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{12}}$$

解

$$(1) 10^{\sqrt{2}} \times 100^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} = 10^{\sqrt{2}} \times (10^2)^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} = 10^{\sqrt{2}} \times 10^{1-\sqrt{2}} = 10$$

$$(2) (3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = 3^4 = 81$$

$$(3) \left(\frac{3}{2}\right)^{2\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{12}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2\sqrt{3}} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right)^{2\sqrt{3}} = 1$$

隨堂練習

利用指數律，求下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\sqrt{3}} \quad (2) \left(9^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \quad (3) \frac{3^{\sqrt{18}}}{27^{\sqrt{2}}}$$

來看一道指數有未知數的例題。

例題 12

已知 $2^a = 3$ ，求下列各式的值：

$$(1) 4^{a-1} \quad (2) 9 \times 8^{-a+1}$$

解

$$(1) 4^{a-1} = 4^a \times 4^{-1} = \frac{(2^a)^2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$(2) 9 \times 8^{-a+1} = 9 \times 8^{-a} \times 8 = 72 \times (2^3)^{-a} = 72(2^a)^{-3} = 72 \times \frac{1}{27} = \frac{8}{3}$$

隨堂練習

已知 $3^a = 2$ ，求下列各式的值：

$$(1) 9^{a+1} \quad (2) 36 \times 27^{-a-1}$$



最後來做一道應用問題。

例題 13

蛋糕從 180°C 的烤箱拿出來放在 30°C 的室溫下，經過 t 分鐘後的溫度 $H^{\circ}\text{C}$ 符合牛頓提出的冷卻定律，公式為

$$H = 30 + (180 - 30)a^{-t},$$

其中 $a > 0$ 為蛋糕的冷卻係數。已知 6 分鐘後測量蛋糕的溫度為 48.75°C ，求蛋糕的冷卻係數 a 的值（四捨五入到小數點以下第一位）。

解

依題意將 $H = 48.75$, $t = 6$ 代入，得

$$48.75 = 30 + (180 - 30)a^{-6},$$

整理可得 $a^6 = 8$ 。

故 $a = 8^{\frac{1}{6}} \approx 1.4$ 。

隨堂練習

牛頓的冷卻定律提到：麵包出爐的溫度為 $h^{\circ}\text{C}$ 時，在 30°C 的室溫下經過 t 分鐘後的溫度 $H^{\circ}\text{C}$ 會滿足關係式

$$H = 30 + (h - 30)(1.25)^{-t}。$$

已知 3 分鐘後測量麵包的溫度為 55.6°C ，求麵包出爐時的溫度（四捨五入到整數位）。

3 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) $2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^3}$ 。

☐ (2) $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ 。

☐ (3) $\sqrt[5]{2^3} = (\sqrt[5]{2})^3$ 。



一、基礎題

1 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 (\sqrt{5} + \sqrt{2})^3$ 。 (2) $\left((\sqrt{5})^3\right)^{-2}$ 。

(3) $64^{\frac{2}{3}}$ 。

(4) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-0.5} \times \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5}$ 。

2 設 $a > 0$ ，化簡下列各式：

(1) $(a^3 a^{-2})^{-3}$ 。

(2) $\frac{(2a^{-1})^{\frac{1}{3}}}{(4a)^{-\frac{4}{3}}}$ 。

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)$ 。



- 3 天文學家波德於 1766 年提出有名的「波德法則」：行星與太陽的平均距離 d 天文單位可用數學式子

$$d = \alpha + \beta \times 2^n$$

表示，其中 n 值與行星的對應表如下：

行星	金星	地球	火星
n	0	1	2

已知金星與太陽平均距離為 0.7 天文單位，且火星與太陽的平均距離為 1.6 天文單位，求 α 及 β 的值。

- 4 海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其速度 V （公尺／秒）的公式為

$$V = (10h)^{\frac{1}{2}},$$

其中 h 為海水深度（公尺）。已知 2004 年的南亞海嘯發生於平均水深約 3890 公尺的印度洋，求此海嘯的速度最接近以下哪一個等級的選項？

- (1) 獵豹約 36 公尺／秒
- (2) 高鐵約 80 公尺／秒
- (3) 飛機約 200 公尺／秒
- (4) 聲音約 340 公尺／秒。

- 5 已知 $2^a + 2^{-a} = 3$ ，求下列各式的值：

(1) $4^a + 4^{-a}$ 。 (2) $8^a + 8^{-a}$ 。 (3) $(\sqrt{2})^a + (\sqrt{2})^{-a}$ 。

- 6 已知 $4^a = 5$ ，求 $8^a - 2^{a+2}$ 的值。

二、進階題

- 7 設 $a = 2^{0.3}$ ， $b = 2^{0.01}$ ，選出所有正確的選項。

(1) $a^{10} = 8$ (2) $b^{30} = a$ (3) $2ab^2 = 2^{1.32}$ (4) $\frac{a}{2b} = 2^{0.28}$ 。

- 8 已知 $9^a = \sqrt{2} + 1$ ，求 $\frac{27^a + 27^{-a}}{3^a + 3^{-a}}$ 的值。

- 9 芮氏規模為地震大小的標度，芮氏規模每增加 1，釋放的能量約變為 32 倍。

(1) 已知芮氏規模 7 所釋放的能量是芮氏規模 3 的 2^n 倍，求 n 的值。

(2) 問：芮氏規模 5.1 所釋放的能量是芮氏規模 3 的幾倍？（四捨五入到整數位）