

2-2

根式的運算

① 根式運算的基本性質 ② 根式的四則運算

主題 1 根式運算的基本性質

1 在進行根式的運算之前，先讓學生知道其與數的運算規律相同。

由 2-1 節知道 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $-\sqrt{5}$ 、……分別代表不同的數，這些帶有根號的數像整數、分數一樣，也能做加、減、乘、除的運算，而且滿足加法、乘法的交換律、結合律及分配律。

我們將含有根號的算式稱為**根式**，例如： $2+\sqrt{3}$ 、 $1\div\sqrt{5}$ 、 $3\times\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8}-1$ 等都是根式。接下來就來討論根式運算的基本性質。

● 根式的表示

在第一冊學過代數式的表示方法，而根式也可以利用同樣的形式來表示：

代數式的表示	根式的表示
$3\times x$ 可寫成 $3x$	$3\times\sqrt{5}$ 可寫成 $3\sqrt{5}$
$(-\frac{1}{2})\times x$ 可寫成 $-\frac{1}{2}x$ 或 $-\frac{x}{2}$	$(-\frac{1}{2})\times\sqrt{5}$ 可寫成 $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ 或 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
$x\div 3$ 可寫成 $\frac{x}{3}$ 或 $\frac{1}{3}x$	$\sqrt{5}\div 3$ 可寫成 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 或 $\frac{1}{3}\sqrt{5}$

Key point 根式的表示

若 $a\neq 0$ ， $b\geq 0$ ，則：

(1) 乘法： $a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$ 。

(2) 除法： $\sqrt{b}\div a=\frac{\sqrt{b}}{a}$ (或 $\frac{1}{a}\sqrt{b}$)。

學習內容

N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。

根式也滿足乘法的交換律與結合律，我們來看下面的例題。

例 1

$a\sqrt{b} \times c$ 的運算 學習內容 N-8-1

◆ 搭配習作
P.24 第 1 題

計算下列各式的值。

(1) $(-2) \times 3\sqrt{5}$

(2) $4\sqrt{2} \times \frac{1}{6}$

(3) $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

解

$$\begin{aligned} (1) & (-2) \times 3\sqrt{5} \\ &= (-2) \times 3 \times \sqrt{5} \\ &= -6 \times \sqrt{5} \\ &= -6\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 4\sqrt{2} \times \frac{1}{6} \\ &= 4 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{6} \\ &= 4 \times \frac{1}{6} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \langle \text{方法一} \rangle \\ & \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ & \langle \text{方法二} \rangle \\ & \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{2 \times \sqrt{3}}{3 \times 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\frac{3}{5} \times 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{5} \times 5 \times \sqrt{2} \\ &= 3 \times \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{12} \times (-16)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{12} \times \sqrt{5} \times (-16) \\ &= \frac{1}{12} \times (-16) \times \sqrt{5} \\ &= -\frac{4}{3} \times \sqrt{5} \\ &= -\frac{4}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

(3) $\frac{3\sqrt{7}}{4} \times \frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\sqrt{7} \times 1}{4 \times 9} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{12} \end{aligned}$$

易 重新布題

下列敘述正確的打「○」，錯誤的打「×」。

(×) (1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$ 可寫成 $5\sqrt{5}$ 。

(×) (2) $4 \times \sqrt{\frac{3}{8}}$ 可寫成 $\sqrt{4\frac{3}{8}}$ 。

(×) (3) $\sqrt{6} \div \frac{7}{5}$ 可寫成 $\frac{7}{5}\sqrt{6}$ 。

(○) (4) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ 可寫成 $(\sqrt{2})^3$ 。

易 重新布題

計算下列各式的值。

(1) $(-5) \times (-2\sqrt{3})$ (2) $(-2\sqrt{13}) \times (-4)$

(3) $\frac{3}{4}\sqrt{2} \times (-\frac{1}{6})$ (4) $(-\frac{1}{5}) \times 4\sqrt{5}$

答：(1) $10\sqrt{3}$

(2) $8\sqrt{13}$

(3) $-\frac{1}{8}\sqrt{2}$

(4) $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$

● 根式的乘除運算

1. 根式的乘法運算

我們知道 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，那 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 呢？

根據平方根的意義：「若 $b^2 = a$ ，則 b 是 a 的平方根。」

因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = 2 \times 5$ ，

所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 是 2×5 的正平方根，又 $\sqrt{2 \times 5}$ 也是 2×5 的正平方根，

因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ 。我們可以得到以下結論：

Key point 根式的乘法運算

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$



我們可以利用
計算機來檢驗

$$\begin{array}{l} \sqrt{2} \times \sqrt{5} \rightarrow 2 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x} \times 5 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x} = 3.16227766 \\ \sqrt{2 \times 5} \rightarrow 2 \times 5 = 10 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x} = 3.16227766 \end{array}$$

例 2

根式的乘法運算 學習內容 N-8-1 — 1 —

◆ 搭配習作
P.24 第 1 題

1 練習兩根式的乘法運算，知道
 $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$ 。

計算下列各式的值。

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} \quad (2) \left(-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right) \times 4\sqrt{7} \quad (3) 7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$$

解

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} (2) \left(-\frac{2}{3}\sqrt{5}\right) \times 4\sqrt{7} &= \left(-\frac{2}{3}\right) \times \sqrt{5} \times 4 \times \sqrt{7} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right) \times 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} = -\frac{8}{3}\sqrt{35} \end{aligned}$$

$$(3) 7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 7 \times \sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{2} = 7 \times 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 35 \times 2 = 70$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$\begin{array}{lll} (1) \sqrt{5} \times \sqrt{11} & (2) \frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right) & (3) 3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \\ = \sqrt{5 \times 11} & = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \sqrt{2} & = 3 \times \sqrt{6} \times 4 \times \sqrt{6} \\ = \sqrt{55} & = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} & = 3 \times 4 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \\ & = -\frac{1}{10}\sqrt{10} & = 12 \times 6 \\ & & = 72 \end{array}$$

易 重新布題

計算下列各式的值。

$$(1) \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) 2\sqrt{6} \times 3\sqrt{11}$$

$$(3) -\frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{4}{9}\sqrt{3} \quad (4) 6\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{ll} \text{答：(1) } \frac{\sqrt{21}}{8} & (2) 6\sqrt{66} \\ (3) -\frac{2}{3}\sqrt{6} & (4) 84 \end{array}$$

中 重新布題

若 $a = -3\sqrt{2}$ 、 $b = 4\sqrt{2}$ 、 $c = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ 、 $d = \frac{9}{2}\sqrt{5}$ ，則：

$$(1) a \times b = ? \quad (2) b \times d = ?$$

$$(3) a \times c = ? \quad (4) b \times c = ?$$

$$\begin{array}{ll} \text{答：(1) } -24 & (2) 18\sqrt{10} \\ (3) -\frac{5}{2}\sqrt{6} & (4) \frac{10}{3}\sqrt{6} \end{array}$$

2. 根式的除法運算

我們知道 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 5}$ 呢？
 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 的值可用 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 表示，因為 $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$ ，
 所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，又 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 也是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ 。
 我們可以得到以下結論：

Key point 根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$



我們可以利用
計算機來檢驗

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \rightarrow 2 \div 5 = 0.4$$

$$\sqrt{0.4} \rightarrow 0.632455532$$

$$2 \div 5 = 0.4$$

$$\sqrt{0.4} = 0.632455532$$

例 3

根式的除法運算 學習內容 N-8-1

◆ 搭配習作
P.24 第 1 題

1 練習任意兩個根式的除法，算法和過去一樣：除以一個數就是乘上這個數的倒數。

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{35} \div \sqrt{5}$

(2) $(-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

解

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{5} = \sqrt{35 \div 5} = \sqrt{7}$$

$$(2) (-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3}) = -\frac{12\sqrt{6}}{8\sqrt{3}} = -\frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{6}{3}} = -\frac{3}{2} \sqrt{2}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \div \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \div \frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{98} \div \sqrt{14}$

$$= \sqrt{98 \div 14}$$

$$= \sqrt{7}$$

(2) $9\sqrt{35} \div (-3\sqrt{7})$

$$= -\frac{9\sqrt{35}}{3\sqrt{7}}$$

$$= -3 \times \sqrt{\frac{35}{7}}$$

$$= -3\sqrt{5}$$

(3) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}} \div \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{21}}$

$$= \sqrt{\frac{33}{7} \times \frac{21}{11}}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

易 重新布題

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{45} \div (-\sqrt{5})$

(2) $(-4\sqrt{21}) \div 2\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{5\frac{5}{6}} \div (-\sqrt{5\frac{1}{4}})$

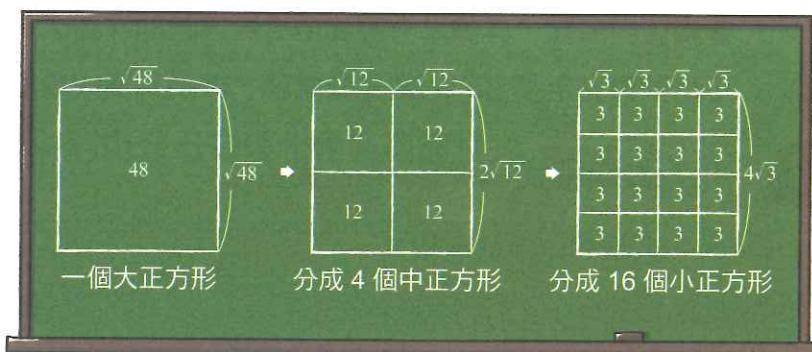
答：(1) -3 (2) $-2\sqrt{3}$ (3) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$

中 重新布題

若 $a = -\sqrt{24}$ 、 $b = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ ，則 $a \div b = ?$

答：-3

最簡根式與有理化



無論如何切割，大正方形的面積始終不變，雖然邊長的表達方式不同，但實際長度是相同的。

由上圖可知道 $\sqrt{48} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ ，這些根式看起來雖然不一樣，但它们的值都相等。如果可以将根式化簡成 $a\sqrt{b}$ 的形式，其中 a 為整數、分數或小數， b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，就稱 $a\sqrt{b}$ 為**最簡根式**，所以 $4\sqrt{3}$ 是最簡根式， $3\sqrt{2}$ 、 $-7\sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{2}\sqrt{15}$ 等也都是最簡根式。

圖解筆記

最簡根式
整數、分數、小數

$a\sqrt{b}$

- ① 正整數
- ② 標準分解式中，質因數次數都是 1

若有下列幾種情形，就**不是**最簡根式：

- (1) 根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1。

例如： $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3}$ 、 $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$ 。

- (2) 分數的分母含有根式。例如： $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $-\frac{9}{\sqrt{6}}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。

- (3) 根號內的數為分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 、 $-\sqrt{0.1}$ 。

2 根式的化簡中，不管被開方數是分數或小數，最後化為最簡根式時都必須是整數。

隨堂練習

◆ 搭配習作
P.24 第 2 題

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$\sqrt{2.7}$ $\sqrt{18}$ $-\sqrt{42}$ $\frac{8}{3}\sqrt{15}$ $\frac{7}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{\frac{6}{11}}$ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$

易 重新布題

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$\sqrt{6.3}$ $\sqrt{28}$ $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ $4\sqrt{\frac{1}{3}}$
 $\sqrt{85}$ $-\sqrt{72}$ $\frac{3}{5}\sqrt{24}$ $\frac{4}{\sqrt{3}}$

易 重新布題

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{52}$ $\frac{\sqrt{39}}{2}$
 $6\sqrt{\frac{1}{10}}$ $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{12}}$ $-\sqrt{0.001}$ $\frac{\sqrt{26}}{2}$

第79頁提到的三種不是最簡根式的情形，又該如何化簡呢？

1. 當根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於1：

可以針對完全平方的因數先做處理，讓根式變成最簡根式。

例4

化為最簡根式 學習內容 N-8-1

◆搭配習作
P.25 第3題

1 一般化簡根式時都會要求化為最簡根式，以利計算及合併，且在教學時需提醒學生 $\sqrt{b^2c} = b\sqrt{c}$ 只有在 b 、 c 均為正整數時才會成立，避免學生發生如 $\sqrt{(-3)^2 \times 2} = -3\sqrt{2}$ 的情形。

解

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{5^3}$

(2) $\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{8} \times \sqrt{45}$

(1) $\sqrt{5^3}$

$= \sqrt{5^2 \times 5}$

$= \sqrt{5^2} \times \sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{18}$

$= \sqrt{2 \times 3^2}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{3^2}$

$= \sqrt{2} \times 3$

$= 3\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{8} \times \sqrt{45}$

$= \sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{3^2 \times 5}$

$= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{5}$

$= 6\sqrt{10}$

Hint

根式相乘時，可先將根號內的數相乘之後再化簡，也可以先各自化簡之後再相乘。

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{2^5}$

$= \sqrt{2^4 \times 2}$

$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{2}$

$= 2^2 \times \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{80}$

$= \sqrt{2^4 \times 5}$

$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{5}$

$= 2^2 \times \sqrt{5}$

$= 4\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$

$= \sqrt{2^2 \times 3} \times \sqrt{2^2 \times 5}$

$= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{15}$

易重新布題

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{3^5}$

(2) $\sqrt{540}$

(3) $\sqrt{48 \times 42}$

(4) $\sqrt{27} \times \sqrt{63}$

答：(1) $9\sqrt{3}$

(2) $6\sqrt{15}$

(3) $12\sqrt{14}$

(4) $9\sqrt{21}$

易重新布題

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{6 \times 28 \times 24}$

(2) $\sqrt{8 \times 20 \times 65}$

(3) $\sqrt{39 \times 26 \times 3}$

(4) $\sqrt{30 \times 12 \times 75}$

答：(1) $24\sqrt{7}$

(2) $20\sqrt{26}$

(3) $39\sqrt{2}$

(4) $30\sqrt{30}$