

在第 1 章所學的乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 中, 當 a 、 b 是根式時也一樣成立。

例 11 利用完全平方公式化簡根式 搭配習作 P26 基礎題 5(4) 自評 P91 第 5 題 (1)

利用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展開 $(3+2\sqrt{5})^2$, 並化簡其結果。

解

$$\begin{aligned} (a+b)^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3+2\sqrt{5})^2 \\ = 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 \\ = 9 + 12\sqrt{5} + 20 \\ = 29 + 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

隨堂練習

利用 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 展開 $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$, 並化簡其結果。

$$\begin{aligned} (\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 7 - 2\sqrt{21} + 3 \\ &= 10 - 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

Thinking

1. 分別計算 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 和 $(\sqrt{5})^2$,
 並運用此結果判別 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
 和 $\sqrt{5}$ 是否相等?

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \\ = (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

所以 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 和 $\sqrt{5}$ 不相等。

2. 分別計算 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ 和 $(\sqrt{2})^2$,
 並運用此結果判別 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
 和 $\sqrt{2}$ 是否相等?

$$\begin{aligned} (\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 \\ = (\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\ = 7 - 2\sqrt{35} + 5 = 12 - 2\sqrt{35} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

所以 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ 和 $\sqrt{2}$ 不相等。

例 12 利用平方差公式化簡根式

搭配習作 P26 基礎題 5(5) 自評 P91 第 5 題 (2)

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$ ，並化簡其結果。

解

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) \\ = a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) \\ = 3^2 - (\sqrt{5})^2 \\ = 9 - 5 \\ = 4\end{aligned}$$

隨堂練習利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ，並化簡其結果。

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5}) &= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 3 - 5 \\ &= -2\end{aligned}$$

如果要將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 化成最簡根式，必須有理化分母。同樣地，化簡 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 也要有理化分母，此時可利用平方差公式，將 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 乘以 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，化簡過程如下：

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

有理化的好處是：有些根式乍看之下不能合併，但如果可以化為同類方根，便可以進一步合併，也就是將答案化簡。例如：

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$



答案也可表示成

$$\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

例 13 利用平方差公式有理化分母

搭配習作 P26 基礎題 5(6) 自評 P91 第 6 題

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡下列各式：

(1) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$

思路分析

分母是 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 時，
分母、分子同乘以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 。

解 (1) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$

$$= \frac{3 \times (\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2) \times (\sqrt{7}+2)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{分母、分子} \\ \text{同乘以} \end{array} \right\} (\sqrt{7}+2)$$

$$= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}$$

$$= \sqrt{7}+2$$



$$\begin{aligned} &(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) \\ &= (\sqrt{7})^2 - 2^2 \\ &= 7-4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

思路分析

分母是 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 時，
分母、分子同乘以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 。

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$$= \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}) \times (\sqrt{6}-\sqrt{5})} \quad \left. \begin{array}{l} \text{分母、分子} \\ \text{同乘以} \end{array} \right\} (\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{12}-\sqrt{10}$$

$$= 2\sqrt{3}-\sqrt{10}$$



$$\begin{aligned} &(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 6-5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

隨堂練習利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡下列各式：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$

$$= \frac{1 \times (\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2) \times (\sqrt{3}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{-1}$$

$$= -\sqrt{3}+2$$