

2-1 因數與倍數

一、因數與倍數的意義：

重點： a 、 b 皆為正整數，若 $a \div b = \text{正整數}$ （整除） $\Rightarrow \begin{cases} b \text{ 為 } a \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \\ a \text{ 為 } b \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$

$$\text{EX} : 35 \div 7 = 5 \Rightarrow \begin{cases} 7 \text{ 為 } 35 \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \\ 35 \text{ 為 } 7 \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

※(1) 1 為任意正整數的因數；任意正整數都是 1 的倍數。

(2) 如何判斷 0 是否為某數的因、倍數 $\Rightarrow$ 利用 **除法**

EX：

$$\begin{array}{l} 0 \div 5 = \underline{\hspace{1cm}} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 \div 0 = \underline{\hspace{1cm}} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right. \end{array}$$

EX1：判斷 18 與 22 是不是 432 的因數。

練習 1：判斷 15 是不是 635 的因數。

EX2：判斷 315 是否為 9 的倍數？

練習 2：判斷 60 是否為 8 的倍數。

練習 3：396 是下列哪些數的倍數？

1、4、11、19、36、396

重點：若 a 、 b 、 c 為正整數且 $a \div b = c$ ，則可以換成 $a = b \times c \Rightarrow \begin{cases} b、c \text{ 為 } a \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \\ a \text{ 為 } b、c \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$

$$\text{EX} : 12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 \text{ 皆為 } 12 \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \\ 12 \text{ 為 } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 \text{ 的 } \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

PS：因為 $12 = (-2) \times (-6)$ ，所以 -2、-6 也是 12 的因數，稱為負因數。12 也是 -2、-6 的倍數，稱為負倍數。雖國中只探討正因、倍數，亦須瞭解有負因、倍數的存在！

EX3：寫出 36 的所有正因數？共幾個？

練習 1：寫出 48 的所有正因數？共幾個？

EX4：下列哪些數是 3^4 的因數？

3 、 3^2 、 3^3 、 3^4 、 3^5

練習 2：在「 $\square$ 」中可以填入哪些整數，使得

$5^\square$ 是 5^4 的因數？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (F) 5

EX5: 若 $\frac{65}{x}$ 是正整數，則可能的正整數 x 共有多少個？ 4

EX6: 若 $3^5 \times 7^2 \times 11$ 是 $3^a \times 7^2$ 的倍數，則 a 最大是多少？ $a \leq 5$ $\therefore a$ 最大是 5

練習 3: 設 a 為正整數，若 $\frac{57}{a}$ 為正整數，則 a 為_____。答案：1、3、19、57

練習 4: 設甲 $= 2^{\square} \times 3 \times 5$ ，已知 20 是甲的因數，24 不是甲的因數，則 $\square = ?$

$$20 = 2^2 \times 5, 24 = 2^3 \times 3$$

20 是甲的因數 $\Rightarrow \square$ 最小是 2

24 不是甲的因數 $\Rightarrow \square < 3$

故 $\square = 2$

二、倍數的判斷法則：

(1) 2 倍的判別法：若一個正整數的個位數字是 0、2、4、6、8，則這個正整數一定是 2 的倍數，否則就不是 2 的倍數。

PS：正整數中，我們稱 2 的倍數為**偶數**，不是 2 的倍數就稱為**奇數**。

(2) 5 倍的判別法：如果一個正整數的個位數字是 0 或 5，那麼這個正整數就是 5 的倍數，否則就不是 5 的倍數。

EX7: (1) 如果六位數 25537 $\square$ 是 2 的倍數，那麼「 $\square$ 」內可以填入哪些數字呢？

(2) 如果五位數 42 $\square$ 70 是 2 的倍數，那麼「 $\square$ 」內可以填入 哪些數字呢？

EX8: (1) 如果四位數 123 $\square$ 是 5 的倍數，那麼「 $\square$ 」內可以填入哪些數字呢？

(2) 兩個三位數 141 及 23 $\square$ 的和是 5 的倍數，那麼「 $\square$ 」內可以填入哪些數字呢？

EX9: 當連續正整數的乘積 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 30$ 時，所得到的答案從末位數起會有連續幾個“0”？

7

練習 1: (1) 如果四位數 12 $\square$ 7 不是 2 的倍數，那麼「 $\square$ 」內可以填入哪些數字呢？

(2) 請問 500、501、502、 $\dots$ 、556 等數中，5 的倍數有幾個？

練習 2: 當連續正整數的乘積 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$ 時，所得到的答案從末位數起會有連續幾個“0”？

(3) 9 倍的判別法：如果一個正整數的各位數字和是 9 的倍數，那麼這個正整數就是 9 的倍數，否則就不是 9 的倍數。

EX: 1926 =

(4) 3 倍的判別法：如果一個正整數的各位數字和是 3 的倍數，那麼這個正整數就是 3 的倍數，否則就不是 3 的倍數。

EX: 2367 =

EX10: 657369、100012、257256，哪些是 9 的倍數？

EX11: 判斷 48651、258147 是否為 3 的倍數？

EX12: 有一五位數 3610□，若：

(1) 它是 5 的倍數，則□可以為 0、5

(2) 它是 9 的倍數，則□可以為 8

(3) 它是 3 的倍數，則□可以為 2、5、8

EX13: 若 694□是 6 的倍數，試問□可為多少？

練習：

(1) 1010101010101010 是否為 9 的倍數？

是

(2) 如果三位數 6□4 不是 9 的倍數，那麼「□」內可以填入哪些數字？

0、1、2、3、4、5、6、7、9

(3) 如果四位數 27□4 是 3 的倍數，那麼「□」內可以填入哪些數字呢？2、5、8

(4) 若 486□是 18 的倍數，試問□為多少？

(5) 11 倍的判別法：如果一個正整數的奇位的數字和與偶位的數字和的差是 11 的倍數，則這個正整數就是 11 的倍數，否則就不是 11 的倍數。

EX: $1935 =$

EX14: (1) 2647183 是不是 11 的倍數？
(2) 8354 是不是 11 的倍數？

EX15: 設一五位數 $5438\square$ 可被 33 整除，則 $\square = ?$
4

練習 1: 如果四位數 $57\square 9$ 是 11 的倍數，那麼 $\square$ 內可以填入哪些數字呢？ $\square = 0$

練習 2: 下列這些數中，哪些數是 11 的倍數？
222、1683、550、61482、54455445
1683、550、54455445

三、質數與合數：

一個大於 1 的整數，除了 1 與本身 以外，再也沒有其它的因數，這樣的整數稱為質數，否則就稱為合數。

EX: 7 的因數: $1、7 \Rightarrow 7$ 為質數。

8 的因數: $1、2、4、8 \Rightarrow 8$ 為合數。

PS: (1) 1 不是質數也不是合數。

(2) 質數中唯一的偶數也是最小的質數是: _____

EX16: 判別 9 和 19 是質數還是合數？

EX17: 設「 $a \star b$ 」代表大於 a 小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \star 15 = 2$ ，若 $40 \star c = 3$ ，則 c 可能為那一個數？
(A) 44 (B) 46 (C) 47 (D) 50 D

練習 1: 判別 51 和 52 是質數還是合數。

練習 2: 設「 $a \ominus b$ 」代表大於 a 小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \ominus 15 = 2$ ，若 $30 \ominus c = 2$ ，則 c 可能為那一個數？

答案: 38、39、40

※如何篩選 1 到 50 之間的所有質數

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

(1) 1 不是質數，因此刪去 1

(2) 保留 2 並刪去其餘 2 的倍數

(3) 保留 3 並刪去其餘 3 的倍數

(4) 保留 5 並刪去其餘 5 的倍數

(5) 保留 7 並刪去其餘 7 的倍數

練習：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

※判斷一個數是否為質數的規則：

<進階題>

1. 荃雅國中一年甲班有 18 名學生訂購營養午餐，若午餐費總共交了★65★ 元（★ 為相同且識別不清的阿拉伯數字），假設每人的營養午餐費均相同且為正整數，試問每人須繳交多少元午餐費？

481

2. 有兩張密碼卡 $\boxed{4}\boxed{}\boxed{5}$ 、 $\boxed{678}\boxed{}$ ，其 $\boxed{}$ 表同一數字，已知第一張卡為一個三位數，且為 9 的倍數；而第二張卡為一個四位數，且為 4 的倍數，則 $\boxed{} = ?$ **0**

3. 設 a 為整數，欲使 $\frac{91}{a+1}$ 為正整數，則 a 可能的值有哪些？

答案：0、6、12、90

解析：91 的正因數有 1、7、13、91

$$a+1=1、7、13、91$$

$$\therefore a=0、6、12、90$$

4. 225 可以分解成 a 、 b 兩數的乘積，如果 a 、 b 都是合數，求 $a+b=$ _____。

答案：30 或 34

5. 有一正整數介於 200 到 300 之間，恰有三個正因數，則此正整數 = _____。

答案：289

解析：除了 1 和本身外，還有 1 個因數

6. 試問共有多少個正整數 n ，使得 $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} \cdots + \frac{10}{n}$ 為整數？答：_____ 個。

答案：4

解析： $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{10}{n} = \frac{55}{n}$ 為整數

$$\Rightarrow n=1、5、11、55$$

<題庫>

- ()1. 有任意一個三位數，我們在它後面重複加上這三位數字，使它成為一個六位數，例如 122 → 122122，請問這一個六位數一定可以被下列哪三個數整除？
(A) 2, 7, 11 (B) 2, 11, 13 (C) 4, 7, 13 (D) 7, 11, 13 【94 高市正興一上段 1】

答案：D

解析：六位數為三位數的 1001 倍

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

- ()2. 有 6 個數：4、10、14、55、77、121，若要將它們分為兩組，每一組三個數，且每組的乘積相同，則下列哪一個數字與 77 同一組？
(A) 4 (B) 10 (C) 14 (D) 121

答案：A

- ()3. 甲為正整數，規定符號「☆甲」：代表甲數所有正因數的個數，例如：
☆(2)=2，因為 2 的正因數有二個：就是 1 和 2
☆(4)=3，因為 4 的正因數有三個：就是 1、2 和 4
那麼☆(10)之值為多少？
(A) 3 (B) 4 (C) 10 (D) 11 【94 宜縣冬山一上段 1】

答案：B

解析：10 的正因數有：1、2、5、10

$$\therefore \star(10) = 4$$

- ()4. $18 = 5 + 13$ 可以用兩個質數的和來表示，則 20、25、30、35 四數中，哪一個不能用兩個質數的和來表示？
(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35

答案：D

- ()5. 3^{10} 的所有因數共有多少個？
(A) 10 (B) 11 (C) 20 (D) 22

答案：D

- () 6. 鄧不利多校長因為退休後 18% 的優惠存款被取消，為了生計只好在家養豬過生活，但豬隻飼養過多希望與人換雞，起初他希望一頭豬可以跟別人換 40 隻雞，但大家都覺得不划算也就沒有人跟他換，所以他只好將數目調降，但他仍然堅持一頭豬換雞的數目要高於 20 隻，結果終於有人要跟他換了，已知他最後獲得 1189 隻雞，請問他一頭豬跟人換幾隻雞？
(A) 23 (B) 29 (C) 31 (D) 37 【94 竹市培英一上段 2】

答案：B

解析： $1189 = 29 \times 41$

故一頭豬換 29 隻雞

- () 7. 下列哪一個數不是 $2^3 \times 3^4 \times 5$ 的因數？
(A) -2 (B) 1 (C) 80 (D) 360

答案：C

1. 從 1 到 99 之間的所有整數，刪去 2、3、5、7 的倍數後，所剩下的最大整數是_____。

答案：97

2. 設甲數 $= 2^a \times 3 \times 7$ ，已知 56 是甲數的因數，但 48 不是甲數的因數，則 $a =$ _____。【94 港明一上段 2】

答案：3

解析： $56 = 2^3 \times 7$

$$\Rightarrow a \geq 3$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$\Rightarrow a < 4 \Rightarrow a = 3$$

3. 分母是 30 的分數，周董從分子減去 4，可約成 $\frac{3}{5}$ ，求原分數為_____。【94 中市光明一上段 1】

答案： $\frac{22}{30}$

解析： $3 \times 6 + 4 = 22$

$$\therefore \text{原分數} = \frac{22}{30}$$

4. 將一大包彈珠分給 12 位小朋友，若每位小朋友分到的彈珠一樣多，會剩下 7 顆，將一小包彈珠分給 12 位小朋友，若每位小朋友分到的彈珠一樣多，會剩下 5 顆，則拿 3 大包和 2 小包彈珠，改分給 4 位小朋友，使每位分到的彈珠一樣多，則最少會剩下_____顆彈珠。【94 高市國昌一上段 2】

答案：3

解析： $7 \times 3 + 2 \times 5 = 31$

$$31 \div 4 = 7 \cdots 3$$

5. 若正整數甲數是 24 的倍數，也是 36、48 的倍數，且 $|\text{甲數}| < 500$ ，則甲數有_____個。

答案：3

6. 已知 a 為正整數，且 $\frac{18}{a}$ 為正整數，則 a 的值可能為_____。

答案：1、2、3、6、9、18

7. 若 $\frac{65}{\text{乙數}}$ 為正整數，且乙數是正整數，則乙數=_____。

答案：1、5、13 或 65

