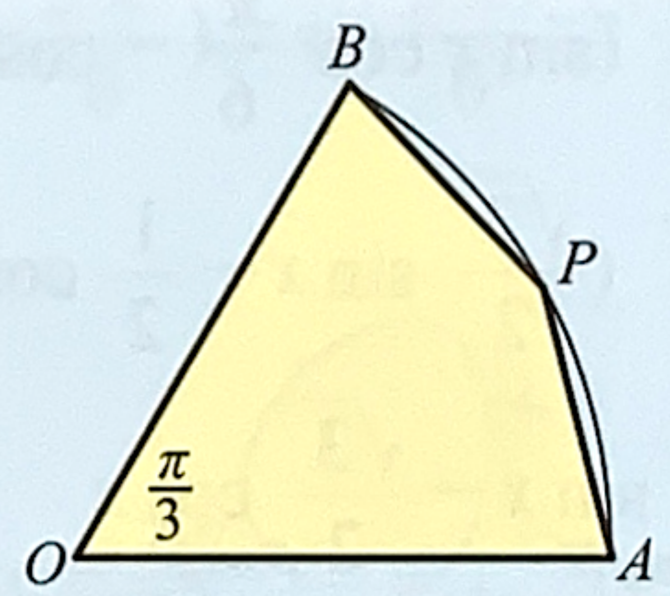
隨堂練習

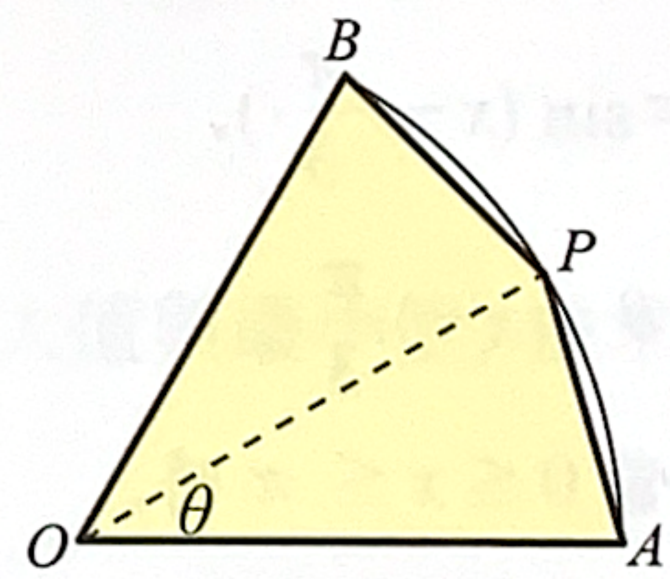
試求函數 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos x$ 在 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ 的範圍內之最大值與最小值.

例題 5

已知扇形 OAB 的圓心角為 $\dfrac{\pi}{3}$, 半徑為 1, P 為 AB 弧上的動點, 試求四邊形 $OAPB$ 的最大面積.



解



連接 $\overline{OP}$, 令 $\angle AOP=\theta$, 其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$,

四邊形 $OAPB$ 的面積

$=\triangle AOP$ 的面積 $+\triangle BOP$ 的面積

$=\dfrac{1}{2}\,\overline{OA}\times\overline{OP}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\,\overline{OP}\times\overline{OB}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left[\sin\theta+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\sin\theta+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

由 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$,

所以 $0+\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$,

因此當 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 時, 即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 時, $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$,

四邊形 $OAPB$ 的面積最大值為 $\dfrac{1}{2}$.

隨堂練習

斜邊長為 10 的直角三角形中, 試求周長的最大值.

除了求函數的極值之外, 解三角方程式時, 也可以利用疊合的方法.

例題 6

已知 $0 \leq x \leq 2\pi$, 求方程式 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ 的實數解.

解

因為 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$, 所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

由於 $0 \leq x \leq 2\pi$, 即 $\frac{\pi}{3} \leq x+\frac{\pi}{3} \leq 2\pi+\frac{\pi}{3}$,

則 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ 或 $2\pi+\frac{\pi}{6}$, 因此, $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$.

隨堂練習

已知 $0 \leq x \leq 2\pi$, 求方程式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ 的實數解.

事實上, 由於餘弦函數 $y=\cos x$ 圖形是正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的平移, 因此函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 除了可以疊合成正弦函數, 亦可疊合成餘弦函數, 只需利用 $\sin t=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$, 即可將疊合而成的函數作正、餘弦函數之間的轉換了. 請看以下的例題：