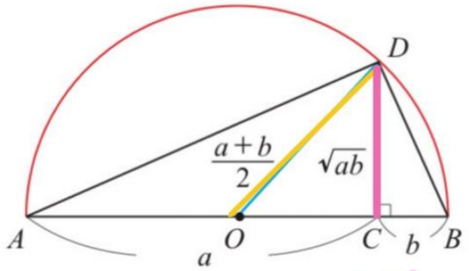
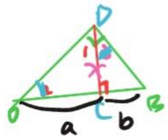
在 a, $b>0$ 時也可以用幾何的方式來說明算幾不等式.





$a:x=x:b$

$x^2=ab$

$\therefore x=\sqrt{ab}$

圖 1

$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

如圖 1 所示, 作線段 $\overline{AB}$ 上的一點 C, 使得 $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$. 以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓, 圓心為 O, 若 D 點在圓周上且 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$, 則

$$\overline{OD}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{a+b}{2},\text{ 且 }\overline{CD}=\sqrt{ab}\ (\triangle ACD\sim\triangle DCB).$$

觀察圖形顯然有 $\overline{OD}\geq\overline{CD}$, 且 $a=b$ 時, 等號 $\overline{OD}=\overline{CD}$ 成立, 此即**算幾不等式**.

例題 7

兩正數 a, b 的乘積 $ab=64$, 試求 $a+b$ 的最小值.

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{64}$

$a+b\geq16$

解 由算幾不等式知

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}=\sqrt{64}=8,$$

等號成立時, $a=b=8$

得 $a+b\geq16$, 故 $a+b$ 的最小值為 16. (最小值發生於 $a=8$, $b=8$ 時) □

隨堂練習

(1) 已知兩正數 a, b 的乘積 $ab=144$, 試求 $a+b$ 的最小值.

(2) 兩正數 a, b, 若 $a+b=18$, 試求 ab 的最大值.

(1) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{144}$

$\therefore a+b\geq24$, 故 $\min=24$

(2) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$9\geq\sqrt{ab}$

$81\geq ab$

故 $\mathrm{Max}=81$

接著，我們來看一題算幾不等式的應用問題.

例題 8

一矩形游泳池的面積為 49 平方公尺，試求此游泳池的最小周長為何？並求出此時游泳池的長、寬各為多少公尺？

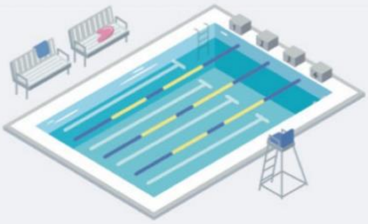


圖 2

7m

已知 $ab=49$

求 $2(a+b)$ 之 min=?

解 設游泳池的長、寬分別為 a、b 公尺.

故由游泳池的面積為 49 平方公尺，得 $ab=49$，且周長為 $2(a+b)$ 公尺.

由算幾不等式知

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}=\sqrt{49}=7,$$

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$a+b\geq 14$

故 min周長 = 28 #

得 $a+b\geq 14$.

當算幾不等式之"等號成立"時，$2(a+b)$ 有最小值 28，此時 $a=b=\frac{a+b}{2}=7$.

故當游泳池的長、寬皆為 7 公尺時，有最小周長為 28 公尺. 等號成立之時 □

$\begin{cases}a=b\\a+b=14\end{cases}$ 故 $a=b=7$

隨堂練習

兩正數 a, b 的乘積 $ab=50$，試求 $2a+b$ 的最小值為何？並求出此時 a, b 各為多少？

$\frac{2a+b}{2}\geq\sqrt{2a\cdot b}$

$\frac{2a+b}{2}\geq\sqrt{100}$

$\therefore 2a+b\geq 20$

故 $2a+b$ 之 min = 20

等號成立 $\begin{cases}2a=b\\2a+b=20\end{cases}\rightarrow 2a=b=10$ $\begin{cases}a=5\\b=10\end{cases}$

在第 33 頁的故事中，設駿馬南北向各跑 a 里，東西向各跑 b 里，由故事可列式為 $2a+2b=100$，求 ab 的最大值. 根據算幾不等式，我們就可以得到，在 $a=b=25$ 里時，可圍出最多土地面積為 625 平方里!