

主題二：平方根的意義

一、平方根的意義

以前我們學過平方的概念，例如：我們說3的平方是9，用式子我們可以表示為 $3^2 = 9$ ；又例如： $-\frac{1}{3}$ 的平方是 $\frac{1}{9}$ ，表示為 $(-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ ，若 $b^2 = a$ ，以前我們常常說 a 是 b 的平方，現在我們反過來敘述，我們說 b 是 a 的平方根(即 b 自己乘自己會等於 a)。

以上面的例子來說，由於

$3^2 = 9$ ，我們就說3是9的(正)平方根

$(-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ ，我們就說 $-\frac{1}{3}$ 是 $\frac{1}{9}$ 的(負)平方根。

動動腦：你認識的數之中，除了3乘3等於9之外，還有沒有其他數自己乘自己會等於9？

概念一點通：每個正數的平方根都會有兩個，一個是正的我們稱為正平方根，另一個是負的，我們稱為負平方根。

動動腦：0的平方根是什麼呢？(也就是哪個數字自己乘自己是0？)

重點提示：0的平方根就是0

練習 1:

1. 25 的平方根為_____ (提示:有兩個)
2. $\frac{1}{4}$ 的平方根為_____
3. (1) 12 的正平方根為_____
- (2) 7 的負平方根為_____
4. (1) 試求所有滿足 $a^2 = 8$ 的 a 。(共有兩個)
- (2) 試求所有滿足 $k^2 = 13$ 的 k 。(共有兩個)
5. (1) 17 的平方根為_____
- (2) 24 的平方根為_____

6. 試求 (1) $\sqrt{64}$ (2) $-\sqrt{81}$

7. 試求 (1) $\sqrt{0.01}$ (2) $-\sqrt{0.25}$

動動腦：你能找出 -4 的平方根嗎？為什麼？

重點提示：負數沒有平方根

想想看，我們知道一個不是 0 的數平方之後都會是正數，所以 $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3$ 是可以被我們接受的，這時我們發覺根號開出來的一定是正的，所以我們可以推斷：

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

二、利用乘方開方表估算根號的大小

有時候我們會好奇一個具有根號的數到底有多大，那個時候我們就會去找它附近有什麼整數然後再去估量它的大小。例如今天我們想要知道有 $\sqrt{137}$ 多大，那我們可能會想到 $\sqrt{137}$ 比 $\sqrt{121}$ 大一些， $\sqrt{137}$ 又比 $\sqrt{144}$ 小一些，所以我們可以說 $\sqrt{121} < \sqrt{137} < \sqrt{144}$ ，即 $11 < \sqrt{137} < 12$ ，用這個方法我們就知道 $\sqrt{137}$ 大概是 11 又多一點，但是問題來了，怎麼會想到 $\sqrt{121}$ 和 $\sqrt{144}$ 這兩個剛好根號開出來是整數的數拿來比較呢？所以我們常常會善用下面的表格來幫助我們。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

有了這個表格我們就輕鬆多了，例如有人問你 $\sqrt{300}$ 有多大，那你便可以用表格找到 $289 < 300 < 324$ ，所以 $\sqrt{289} < \sqrt{300} < \sqrt{324}$ ，即 $17 < \sqrt{300} < 18$ ，最後得到 $\sqrt{300}$ 是比 17 大一點點的數。

練習 2:

請利用上頁表格回答問題

- (1) $\sqrt{50}$ 介於哪兩個整數之間？
- (2) $\sqrt{120}$ 介於哪兩個整數之間？
- (3) $-\sqrt{32}$ 介於哪兩個整數之間？

