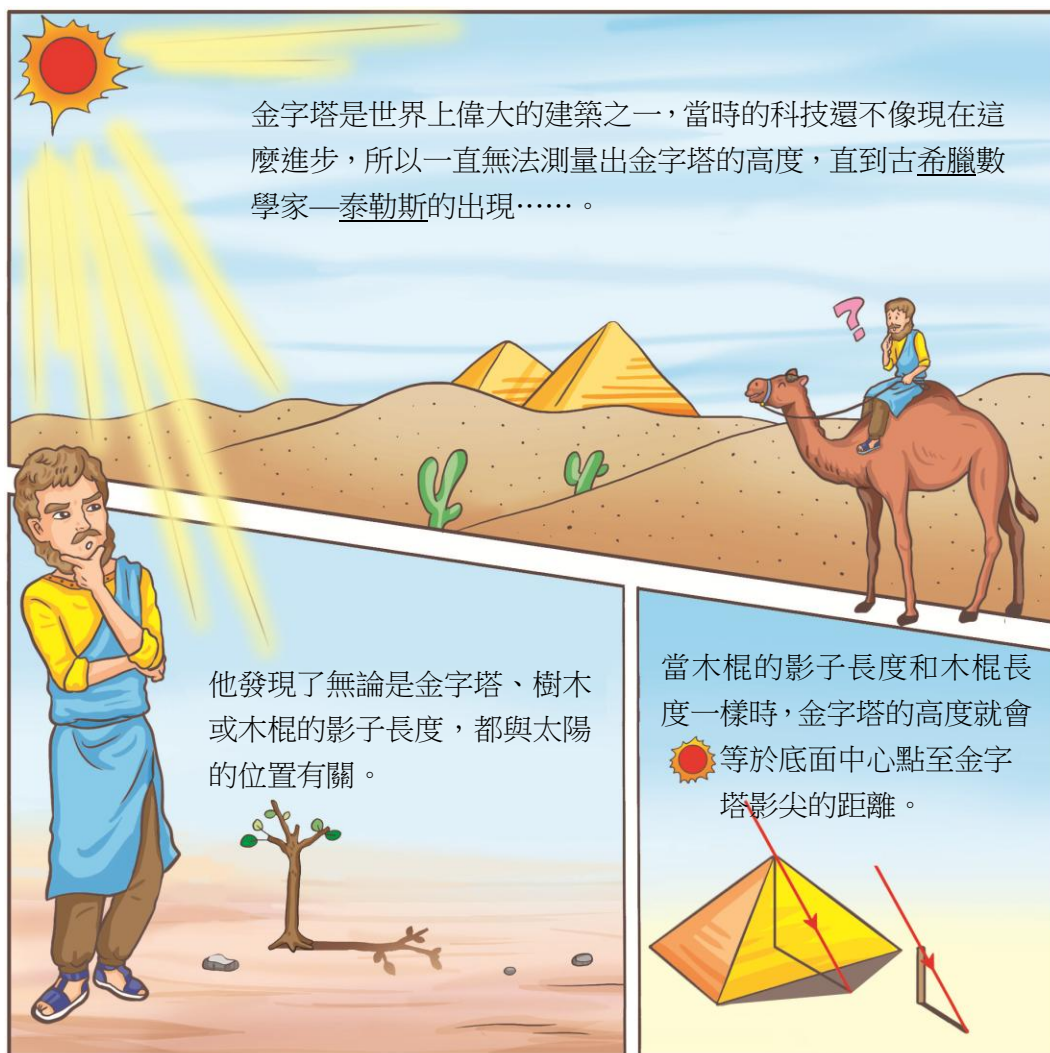


1 簡易測量

2 相似三角形的面積與邊長關係

3 相似直角三角形

主題 1 簡易測量



在上面的情況中，是否一定要在木棍的影子長度和木棍長度相同時，才能測量出金字塔的高度呢？我們在 1-3 節已經學過相似形的性質，現在就將這些性質應用在日常生活中的簡易測量，並求出問題的答案。

泰勒斯

(*Thales*, 西元前 624~546 年)，古希臘哲學家、幾何學家與天文學家。曾利用影子長算出金字塔的高度，還利用相似三角形，測量出在海上航行的船距離陸地有多遠。

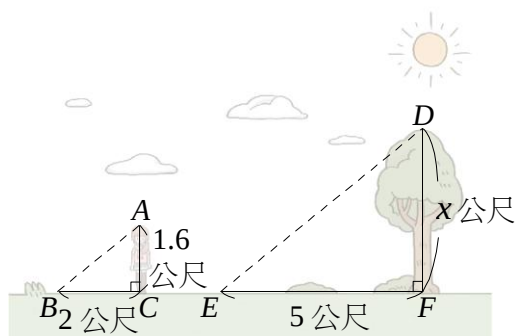


三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

例 1 利用相似形測量樹高學習內容 S-9-2

小妍的身高 160 公分, 如果在下午測得他被太陽照出的影長是 200 公分, 同時身旁一棵樹的影長是 5 公尺, 那麼這棵樹的高度為多少公尺?

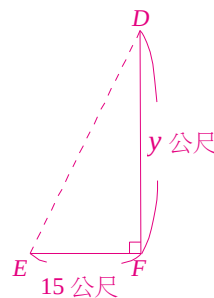
解 $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$,
 $\therefore \angle B = \angle E$ (同位角相等),
 又 $\angle C = \angle F = 90^\circ$,
 故 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (AA 相似性質),
 可知 $\overline{AC} : \overline{DF} = \overline{BC} : \overline{EF}$.
 160 公分 = 1.6 公尺,
 200 公分 = 2 公尺,
 假設樹的高度是 x 公尺,
 $1.6 : x = 2 : 5$, 得 $x = 4$,
 故樹高為 4 公尺。



隨堂練習

小翊的身高 170 公分, 如果在某時刻測得他被太陽照出的影長是 85 公分, 同時附近一棟建築物的影長是 15 公尺, 則此棟建築物的高度為多少公尺?

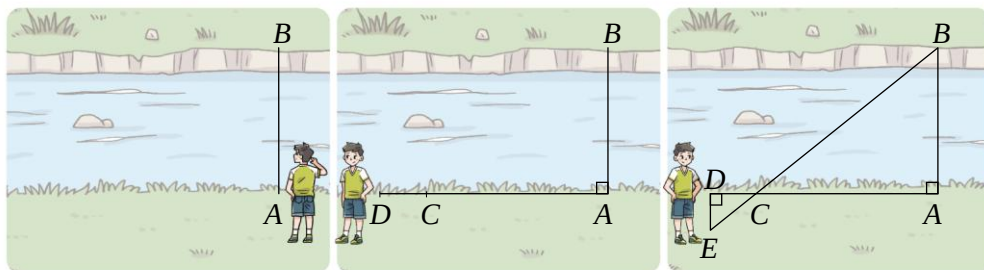
170 公分 = 1.7 公尺
 85 公分 = 0.85 公尺
 假設建築物的高度為 y 公尺
 由 $\overline{AC} : \overline{DF} = \overline{BC} : \overline{EF}$
 $1.7 : y = 0.85 : 15$, 得 $y = 30$
 故此棟建築物的高度為 30 公尺



三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

例 2 利用相似形測量河寬學習內容 S-9-2

下圖是小翊站在岸邊 A 點測量河寬的經過。



要如何測量河的寬度 ($\overline{AB}$) 呢？

我順著與河寬垂直的河岸走 20 步到達 C 點，由 C 點再繼續往前走 5 步到 D 點。

沿 $\overline{CD}$ 的垂直方向，朝離開河的方向前進直到 E 點，使 B、C、E 在同一條直線上。

若小翊走的每一步距離都相等，且 $\overline{DE} = 2$ 公尺，則 $\overline{AB}$ 為多少公尺？

解 $\because \overline{AB} \perp \overline{AD}, \overline{DE} \perp \overline{AD}$,

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DE}$, 得 $\angle B = \angle E$ (內錯角相等),

又 $\angle A = \angle D = 90^\circ$,

故 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (AA 相似性質),

可知 $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CA} : \overline{CD}$,

$$\overline{AB} : 2 = 20 : 5,$$

得 $\overline{AB} = 8$ (公尺), 故河寬為 8 公尺。

隨堂練習

如右圖，小妍利用三角形的相似性質測量河寬 $\overline{DE}$ ，若他測量出 $\overline{AB} = 10$ 公尺、 $\overline{CD} = 4$ 公尺， $\overline{BD} = 9$ 公尺，則河寬 $\overline{DE}$ 為多少公尺？

$$\because \angle B = \angle CDE = 90^\circ, \angle E = \angle E$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE \text{ (AA 相似性質)}$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{BE} : \overline{DE}$$

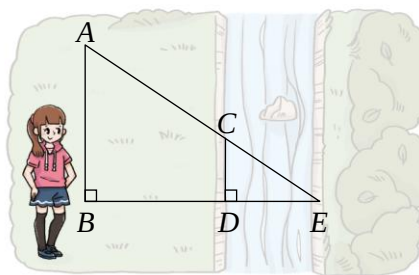
$$\text{設 } \overline{DE} = x \text{ 公尺}$$

$$\text{則 } 10 : 4 = (9 + x) : x$$

$$10x = 36 + 4x$$

$$x = 6$$

故河寬為 6 公尺



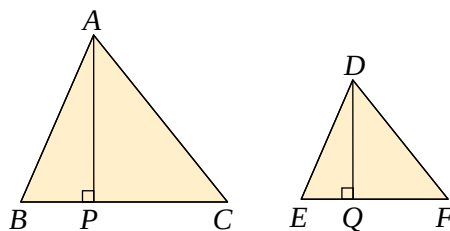
主題 2 相似三角形的面積與邊長關係

我們知道相似三角形的對應邊成比例，那麼相似三角形對應高的比跟對應邊的比有什麼關係呢？

例 3 相似三角形對應高的比＝對應邊的比 **學習內容 S-9-2**

如右圖， $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別為 D 、 E 、 F 。若 $\overline{AP}$ 、 $\overline{DQ}$ 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{EF}$ 上的高。試說明 $\overline{AP}:\overline{DQ}=\overline{AB}:\overline{DE}$ 。

說明 $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$,
 $\therefore \angle ABP = \angle DEQ$,
 又 $\angle APB = \angle DQE = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle ABP \sim \triangle DEQ$ (AA 相似性質),
 故 $\overline{AP}:\overline{DQ} = \overline{AB}:\overline{DE}$ 。



因此可以知道：

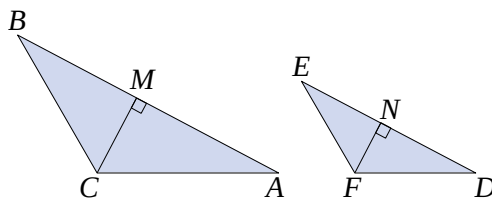
Key point 兩個相似三角形的對應高關係

兩個相似三角形中，對應高的比＝對應邊的比。

隨堂練習

如右圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別為 D 、 E 、 F 。若 $\overline{CM}$ 、 $\overline{FN}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DE}$ 上的高，且 $\overline{CM}:\overline{FN}=3:2$ ， $\overline{BC}=12$ ，則 $\overline{EF}=?$

$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$
 $\therefore \overline{BC}:\overline{EF} = \overline{CM}:\overline{FN}$
 $12:\overline{EF} = 3:2$
 $3\overline{EF} = 24$, $\overline{EF} = 8$



三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

兩個相似三角形的面積比，與對應邊長平方的比有什麼關係？

說明 如右圖， $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，

$\overline{AP}$ 和 $\overline{DQ}$ 分別為三角形的對應高，

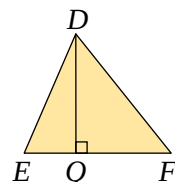
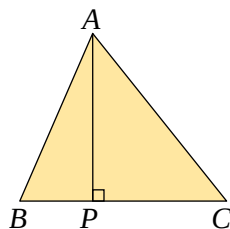
則 $\overline{AP}:\overline{DQ}=\overline{BC}:\overline{EF}$ ，

$$\text{即 } \frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC \text{ 面積}}{\triangle DEF \text{ 面積}} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AP}}{\frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DQ}}$$

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \times \frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2}$$

故 $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積 $=\overline{BC}^2:\overline{EF}^2$ 。



由上述可知：

Key point 兩個相似三角形的面積關係

兩個相似三角形中，面積的比＝對應邊長平方的比。

數學好好玩 袖珍博物館

位於臺北的袖珍博物館，成立於民國 86 年 3 月 28 日，是亞洲第一座專門以收藏當代袖珍藝術品為主題的博物館。

目前館內約有兩百多件收藏品，其中最著名的是一棟大型娃娃屋《玫瑰豪宅》，更曾獲得國際袖珍藝術雜誌評價「25 年來十大傑出作品」，吸引不少國外遊客前往欣賞。而這些袖珍作品大部分

都嚴格遵守國際標準比例，微縮成實物的 $\frac{1}{12}$ 製作，但其中又以《樹上礦坑》為最細緻的作品，是將實物縮放 $\frac{1}{120}$ 後所做成的。

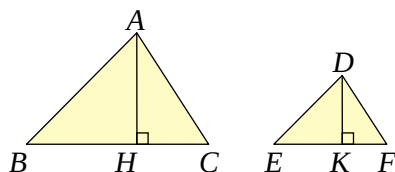


三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

圖照來源：袖珍博物館

例 4 相似三角形的邊長與面積關係學習內容 S-9-2

如右圖， $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ， A 、 B 、 C 的對應點分別為 D 、 E 、 F ，其中 $\overline{AH}$ 與 $\overline{DK}$ 是對應高，且 $\overline{AH}:\overline{DK}=3:2$ ，若 $\triangle ABC$ 的面積為 15，則 $\triangle DEF$ 的面積為多少？



解 設 $\triangle DEF$ 的面積為 x ，

$$\because \triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AH}:\overline{DK}=3:2,$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 的面積}:\triangle DEF \text{ 的面積}=\overline{BC}^2:\overline{EF}^2,$$

$$15:x=3^2:2^2, \text{ 得 } x=\frac{20}{3},$$

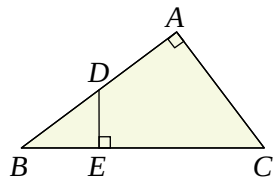
$$\text{即 } \triangle DEF \text{ 的面積為 } \frac{20}{3}.$$

隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{AC}=6$ ，若從 $\overline{AB}$ 中點 D 作 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ，且與 $\overline{BC}$ 交於 E 點，則：

(1) $\triangle EBD$ 和 $\triangle ABC$ 相似嗎？

(2) $\triangle EBD$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = ？



(1) 在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle ABC$ 中

$$\because \angle B = \angle B, \angle DEB = \angle CAB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle EBD \sim \triangle ABC (\text{AA 相似性質})$$

(2) 已知 $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{AC}=6$ ，又 $\angle A=90^\circ$ ， $\therefore \overline{BC}=10$

$$\because D \text{ 為 } \overline{AB} \text{ 的中點}, \therefore \overline{BD}=4$$

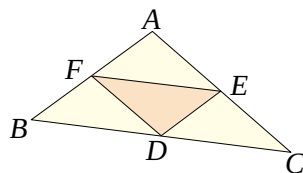
$$\text{故 } \triangle EBD \text{ 面積}:\triangle ABC \text{ 面積}=\overline{BD}^2:\overline{BC}^2=4^2:10^2=4:25$$

三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

探討完兩個相似三角形的面積關係後，接著我們來探討三角形的各邊中點連線段有什麼性質呢？

如果把三角形各邊中點分別連接起來，所形成的三角形與原來的三角形有什麼關係？

說明 如右圖， $\triangle ABC$ 中，



(1) $\because D, E, F$ 分別為 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 的中點，

$$\text{得 } \overline{ED} = \frac{1}{2} \overline{AB}, \overline{FE} = \frac{1}{2} \overline{BC}, \overline{FD} = \frac{1}{2} \overline{AC},$$

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$ (SSS 相似性質)。

$$\begin{aligned} (2) \triangle DEF \text{ 周長} &= \overline{ED} + \overline{FE} + \overline{FD} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) = \frac{1}{2} \triangle ABC \text{ 周長。} \end{aligned}$$

(3) $\because$ 相似三角形面積比等於對應邊長平方比，

$$\therefore \triangle DEF \text{ 面積} : \triangle ABC \text{ 面積} = 1^2 : 2^2 = 1 : 4,$$

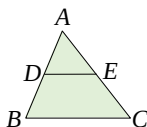
$$\text{故 } \triangle DEF \text{ 面積} = \frac{1}{4} \triangle ABC \text{ 面積。}$$

學習時光機

三角形兩邊中點連線段性質

$\triangle ABC$ 中，若 D, E 分別為 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 中點，則：

$$(1) \overline{DE} \parallel \overline{BC}. \quad (2) \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}.$$



Key point 三角形各邊中點連線段性質

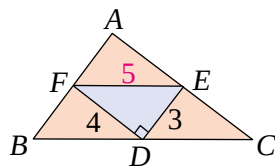
三角形三邊中點連線段所形成的新三角形與原三角形相似，且周長為原三角形周長的 $\frac{1}{2}$ ，面積為原三角形面積的 $\frac{1}{4}$ 。

隨堂練習

$\triangle ABC$ 中， D, E, F 分別為 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 的中點，已知 $\overline{DE} = 3$ 、 $\overline{DF} = 4$ 、 $\angle FDE = 90^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 的周長與面積。

由 $\overline{DE} = 3$ 、 $\overline{DF} = 4$ 、 $\angle FDE = 90^\circ$

可得 $\overline{EF} = 5$ ， $\triangle DEF$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$



三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

故 $\triangle ABC$ 周長 $=2\times\triangle DEF$ 周長 $=2\times(3+4+5)=24$

$\triangle ABC$ 面積 $=4\times\triangle DEF$ 面積 $=4\times6=24$

主題 3 相似直角三角形



根據內政部營建署的規定，當上下平台的高度差超過 20 公分以上(含)時，需設置坡

度不大於 $\frac{1}{12}$ 的坡道。(如圖 1, 坡度 $=\frac{\text{高度差}}{\text{水平長度}}$)

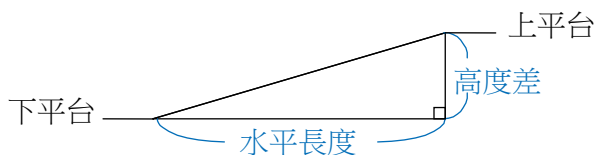


圖1

也就是說，若設置坡度為 $\frac{1}{12}$ 的坡道，如圖 2，

當高度差為 20 公分，則水平長度為 240 公分；

當高度差為 30 公分，則水平長度為 360 公分；以此類推。

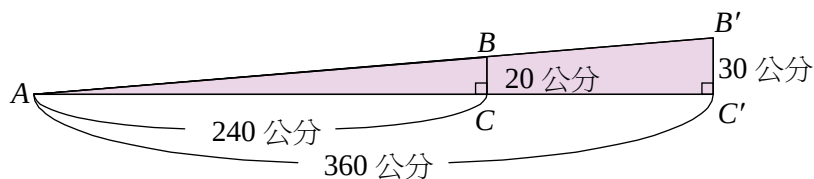


圖2

三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

由上面可知，當坡道的坡度固定時，圖 2 中的 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AB'C'$ 為兩個相似直角三角形 (SAS 相似性質)。由相似三角形對應邊成比例可知：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$$

我們還可以進一步將這個式子改寫成：

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}; \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}; \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}}$$

因此，若直角三角形的其中一個銳角角度固定，則不論這個三角形的大小，此三角形任兩邊形成的比值也都跟著固定。接下來，我們來看直角三角形中，用來記錄任兩邊長的比值符號有哪些。

直角三角形的邊長比值

如圖 3，在直角三角形 ABC 中， $\angle C$ 為直角， $\overline{BC}$ 稱為 $\angle A$ 的對邊； $\overline{AC}$ 稱為 $\angle A$ 的鄰邊； $\overline{AB}$ 稱為斜邊，我們可以用 $\sin \angle A$ 、 $\cos \angle A$ 和 $\tan \angle A$ 來表示任兩邊長的比值，即：

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{a}{c} = \sin \angle A$$

$$\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{b}{c} = \cos \angle A$$

$$\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{a}{b} = \tan \angle A$$

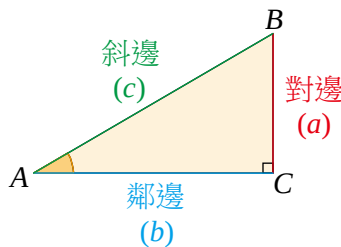


圖3

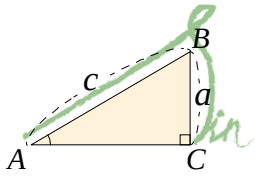
而 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 這些符號，分別為 *sine*、*cosine*、*tangent* 的縮寫，習慣上會將 $\sin \angle A$ 、 $\cos \angle A$ 、 $\tan \angle A$ 分別簡記為 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 。



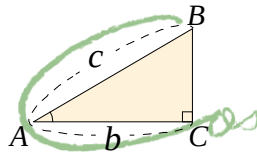
第 70 頁圖 2 中，坡道的坡度 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 也可以寫成 $\tan A$ ！

Key point 直角三角形的邊長比值

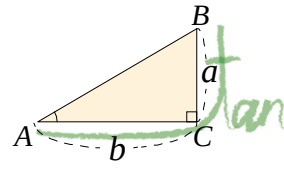
$\triangle ABC$ 中，若 $\angle C$ 為直角， $\angle A$ 為其中一個銳角，則：



$$\frac{a}{c} = \sin A$$



$$\frac{b}{c} = \cos A$$

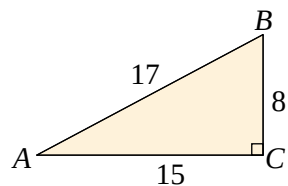


$$\frac{a}{b} = \tan A$$

三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

例 5 直角三角形的邊長比值 **學習內容 S-9-4**

如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $\overline{AB}=17$ ， $\overline{BC}=8$ ， $\overline{AC}=15$ 。求下列各比值，並以 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 表示。



(1) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = ?$

(2) $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = ?$

(3) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = ?$

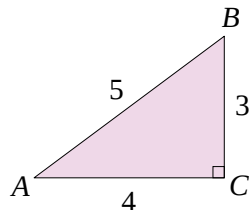
解 (1) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{8}{17}$ ，即 $\sin A = \frac{8}{17}$ 。

(2) $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{15}{17}$ ，即 $\cos A = \frac{15}{17}$ 。

(3) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{8}{15}$ ，即 $\tan A = \frac{8}{15}$ 。

隨堂練習

如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{AC}=4$ 。求下列各比值，並以 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 表示。



(1) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = ?$

(2) $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = ?$

(3) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = ?$

(1) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \frac{3}{4}$ ，即 $\tan A = \frac{3}{4}$

(2) $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{4}{5}$ ，即 $\cos A = \frac{4}{5}$

(3) $\frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \frac{3}{5}$ ，即 $\sin A = \frac{3}{5}$



例 6 直角三角形邊長比值的生活問題 學習內容 S-9-4

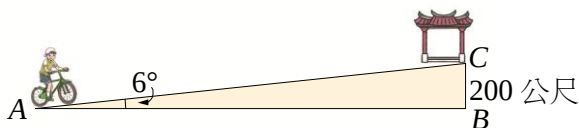
如下圖，通往某座山上的好漢亭有一自行車道，該車道因一路陡坡向上，故成為許多自行車手訓練體能的熱門路線。已知車道與水平面的夾角為 6° ，且車道起點至好漢亭的垂直高度 $\overline{BC}$ 為 200 公尺，求此車道的長度 $\overline{AC}$ 為多少公尺？（利用計算機計算並以四捨五入法取至整數位）

解 設 $\overline{AC}$ 為 x 公尺

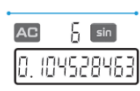
$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \sin A$$

$$\therefore \frac{200}{x} = \sin 6^\circ \doteq 0.104528463$$

$$x = 200 \div 0.104528463 = 1913.354452 \doteq 1913 (\text{公尺})$$



計算機操作



隨堂練習

承例 6，求車道起點至好漢亭的水平距離 $\overline{AB}$ 為多少公尺？（利用計算機計算並以四捨五入法取至整數位）

設車道起點至好漢亭的水平距離 $\overline{AB}$ 為 y 公尺

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \tan A$$

$$\therefore \frac{200}{y} = \tan 6^\circ \doteq 0.105104235$$

（計算機操作： $\text{AC} \rightarrow 6 \rightarrow \text{tan}$ ，螢幕顯示為 0.105104235）

$$y = 200 \div 0.105104235 = 1902.872896 \doteq 1903 (\text{公尺})$$



有些計算機上會有 $\sin$ 、 $\cos$ 和 $\tan$ 的按鍵，分別代表在直角三角形中，

其中一個銳角的 $\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ 、 $\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$ 和 $\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ 之值。（操作方式可參閱書末 P.[9]～

[10]「計算機教學」）

特殊直角三角形的邊長比

前面知道直角三角形的邊長比值會因為銳角固定，比值也跟著固定，接著討論特殊直角三角形的性質。

圖 4 為常見的三角板，三個內角分別為 45° 、 45° 、 90° 及 30° 、 60° 、 90° ，以下我們將探討這兩個特殊直角三角形中角度與邊長的關係。

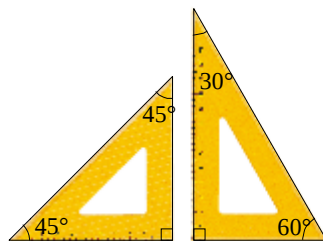


圖4

1. 45° 、 45° 、 90° 的直角三角形

如圖 5，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，

若 $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ ，根據畢氏定理得

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a,$$

則 $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = a : a : \sqrt{2}a = 1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

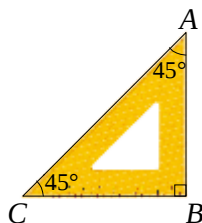


圖5

2. 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形

如圖 6，將兩個相同大小的 30° 、 60° 、 90° 三角板拼成 $\triangle ABD$ ，其中 $\angle ABC = \angle DBC = 30^\circ$ 、 $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ，

可知 $\triangle ABD$ 是一個正三角形。若 $\overline{AB} = b$ ， $\overline{AC} = \overline{CD} =$

$$\frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}b,$$

根據畢氏定理得 $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}$

$$= \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b,$$

則 $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = \frac{1}{2}b : \frac{\sqrt{3}}{2}b : b = 1 : \sqrt{3} : 2$ 。

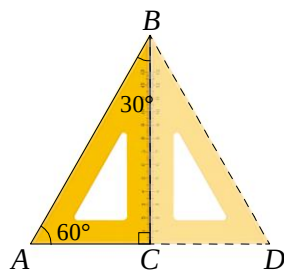


圖6

Key point 特殊直角三角形的邊長比

三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

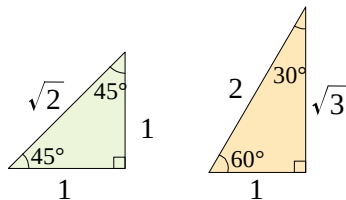
不論直角三角形的大小，

(1) 若三內角為 45° 、 45° 、 90° ，

則其對應邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$ 。

(2) 若三內角為 30° 、 60° 、 90° ，

則其對應邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$ 。



三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

例 7 特殊直角三角形的邊長比 **學習內容 S-9-4**

如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=45^\circ$ ， $\overline{AC}=6$ ，則：

(1) $\overline{BC}=?$

(2) $\overline{AB}=?$

解 $\because \triangle ABC$ 為 45° 、 45° 、 90° 的直角三角形，

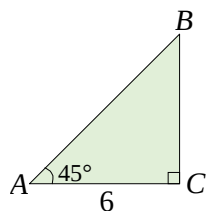
$$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2},$$

$$\text{又 } \overline{AC}=6,$$

$$\therefore 6:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2},$$

$$(1) 6:\overline{BC}=1:1, \text{ 得 } \overline{BC}=6.$$

$$(2) 6:\overline{AB}=1:\sqrt{2}, \text{ 得 } \overline{AB}=6\sqrt{2}.$$



隨堂練習

如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=60^\circ$ ， $\overline{AC}=10$ ，則：

(1) $\overline{BC}=?$ (2) $\overline{AB}=?$

$\because \triangle ABC$ 為 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形

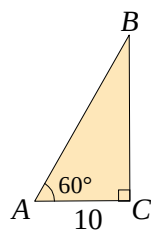
$$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$$

$$\text{又 } \overline{AC}=10,$$

$$\therefore 10:\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$$

$$(1) 10:\overline{BC}=1:\sqrt{3}, \text{ 得 } \overline{BC}=10\sqrt{3}$$

$$(2) 10:\overline{AB}=1:2, \text{ 得 } \overline{AB}=20$$



由例 7 可知 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，其中 $\angle A=45^\circ$ ，我們可以利用計算機來驗證， $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 是否等於 $\sin 45^\circ$ ？

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 \div \sqrt{2} = 0.707106781$$

$$\sin 45^\circ \rightarrow 45 \sin = 0.707106781$$

由上可知，利用計算機所得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\sin 45^\circ$ 的值是一樣的。

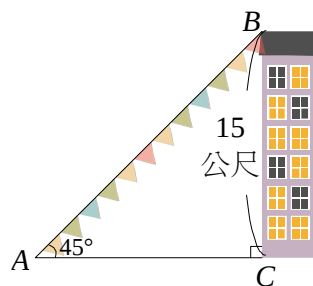
三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

接著利用特殊直角三角形的邊長關係，來解決一些生活中的問題。



例 8 特殊直角三角形的生活問題學習內容 S-9-4

如右圖，為了迎接學校校慶，負責布置的顏老師打算從校舍頂樓到地面設置一條三角旗($\overline{AB}$)。已知三角旗與地面夾角 $\angle A$ 為 45° ，校舍高度($\overline{BC}$)為 15 公尺，試利用計算機求出此條三角旗長度約為多少公尺？(以四捨五入法取到小數點後第 2 位)



解 $\because \triangle ABC$ 為 45° 、 45° 、 90° 的直角三角形，

$$\therefore \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2},$$

$$\text{由 } \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{2},$$

$$\text{得 } \overline{AB} = \overline{BC} \times \sqrt{2} = 15\sqrt{2} \div 21.21,$$

所以三角旗長度約為 21.21 公尺。

Hint

也可以這樣做：

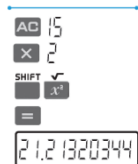
$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin A$$

$$\therefore \frac{15}{\overline{AB}} = \sin 45^\circ \div 0.707106781$$

$$\text{故 } \overline{AB} = 15 \div 0.707106781 \div 21.21$$

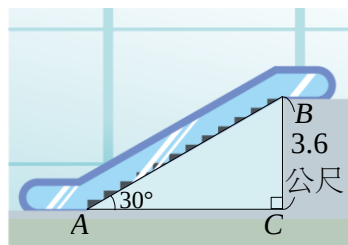


計算機操作



隨堂練習

如右圖，好好買商場打算在一樓至二樓間設置一座電扶梯，廠商建議的傾斜角 $\angle A$ 為 30° 。已知一樓與二樓間的高度($\overline{BC}$)為 3.6 公尺，則此電扶梯長度($\overline{AB}$)為多少公尺？



$\because \triangle ABC$ 為 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形

$$\therefore \overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$$\text{由 } \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 2, \text{ 得 } \overline{AB} = 2\overline{BC} = 7.2$$

所以電扶梯長度為 7.2 公尺



同學，恭喜你學完本章的概念。數學不僅是抽象運算，還和現實生活緊密連結喔！翻到書末 P.[5]的「數感查真相」，運用所學的數學來解決生活問題。

重點整理

1 簡易測量

利用相似三角形對應邊成比例的性質，可以進行簡易測量。

2 相似三角形的對應高與面積關係

兩個相似三角形中，

(1) 對應高的比 = 對應邊的比。

(2) 面積的比 = 對應邊長平方的比。

例 若 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且其對應邊長比為 $2:3$ ，則：

(1) 對應高的比 = $2:3$ 。

(2) $\triangle ABC$ 面積 : $\triangle DEF$ 面積 = $2^2:3^2=4:9$ 。

3 三角形各邊中點連線段性質

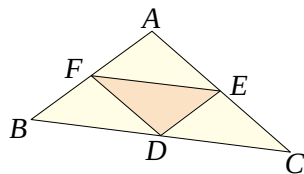
三角形三邊中點連線段所形成的新三角形與原三角形相似，且周長為原三角形周長的 $\frac{1}{2}$ ，面積為原三角形面積的 $\frac{1}{4}$ 。

例 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為三邊中點，則：

(1) $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ 。

(2) $\triangle DEF$ 周長 = $\frac{1}{2} \triangle ABC$ 周長。

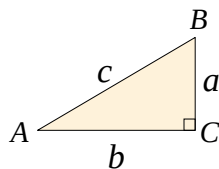
(3) $\triangle DEF$ 面積 = $\frac{1}{4} \triangle ABC$ 面積。



4 直角三角形的邊長比值

在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C$ 為直角， $\angle A$ 為其中一個銳角，則：

$$\frac{a}{c} = \sin A, \frac{b}{c} = \cos A, \frac{a}{b} = \tan A.$$

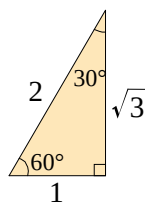
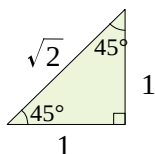


5 特殊直角三角形的邊長比

不論直角三角形的大小，

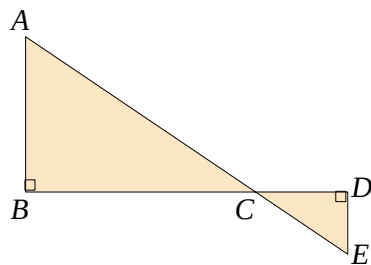
(1) 若三內角為 45° 、 45° 、 90° ，
則其對應邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$ 。

(2) 若三內角為 30° 、 60° 、 90° ，
則其對應邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$ 。



自我評量

1. 如右圖，已知 A, C, E 三點在同一直線上， B, C, D 三點在同一直線上，且 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DE}$ 分別與 $\overline{BD}$ 垂直。若 $\overline{AB}=10$ 、 $\overline{DE}=4$ 、 $\overline{BD}=21$ ，則 $\overline{BC}=?$



P.65 例 2

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中

$$\because \angle B = \angle D, \angle ACB = \angle ECD$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDC (\text{AA 相似性質})$$

$$\text{設 } \overline{BC} = x, \overline{CD} = 21 - x$$

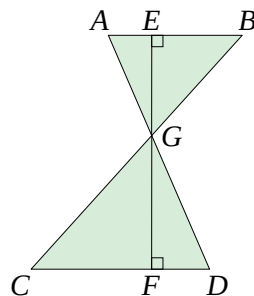
$$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

$$10 : 4 = x : (21 - x)$$

$$4x = 210 - 10x, 14x = 210, x = 15$$

$$\text{故 } \overline{BC} = 15$$

2. 如右圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 G 點，過 G 點作 $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ ，交 $\overline{AB}$ 於 E 點、交 $\overline{CD}$ 於 F 點。已知 $\overline{AB}=12$ ， $\overline{CD}=16$ ， $\overline{EF}=21$ ，則 $\triangle ABG$ 與 $\triangle DCG$ 的面積分別是多少？



P.66 例 3

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle DCG$ 中

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle C$$

$$\text{故 } \triangle ABG \sim \triangle DCG (\text{AA 相似性質})$$

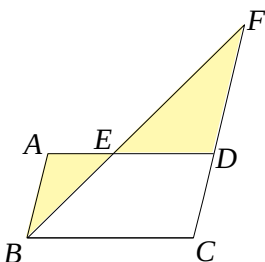
$$\text{則 } \overline{EG} : \overline{GF} = \overline{AB} : \overline{CD} = 12 : 16 = 3 : 4$$

$$\overline{EG} = 21 \times \frac{3}{3+4} = 9, \overline{GF} = 21 - 9 = 12$$

$$\text{故 } \triangle ABG \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 12 \times 9 = 54$$

$$\triangle DCG \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$$

3. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形， E 點在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 F 點。若 $\overline{BC}=10$ 、 $\overline{DE}=6$ ，則 $\triangle ABE$ 面積： $\triangle$



DFE 面積為多少？

$$\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE} = 10 - 6 = 4$$

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CF}, \therefore \angle ABE = \angle DFE$$

$$\text{又 } \angle AEB = \angle DEF$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DFE (\text{AA 相似性質})$$

$$\text{則 } \triangle ABE \text{ 面積} : \triangle DFE \text{ 面積} = \overline{AE}^2 : \overline{DE}^2 = 4^2 : 6^2 = 4 : 9$$

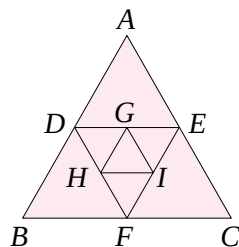
4. 如右圖, $\triangle ABC$ 為邊長 12 的正三角形, 且 D, E, F 分別為 $\triangle ABC$ 各邊中點, G, H, I 分別為 $\triangle DEF$ 各邊中點, 則:

(1) 圖中所有線段長的和。 (2) $\triangle DEF$ 的面積。

(1) 所有線段長之和 = $\triangle ABC$ 周長 + $\triangle DEF$ 周長 + $\triangle GHI$ 周長

$$\begin{aligned} &= 3 \times 12 + \frac{1}{2} \times 3 \times 12 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 12 \right) \\ &= 36 + 18 + 9 = 63 \end{aligned}$$

$$(2) \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3}, \triangle DEF \text{ 面積} = \frac{1}{4} \triangle ABC \text{ 面積} = 9\sqrt{3}$$



P.69 隨堂



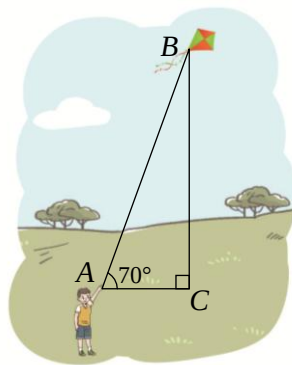
5. 如右圖, 已知小翊繫著風箏的線長 ($\overline{AB}$) 為 50 公尺, 且風箏線與水平線的夾角為 70° , 試問風箏的高度 ($\overline{BC}$) 為多少公尺? (利用計算機計算並以四捨五入法取至整數位)

$$\text{設 } \overline{BC} = x \text{ 公尺}$$

$$\because \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin A$$

$$\therefore \frac{x}{50} = \sin 70^\circ \div 0.93969262$$

$$x = 50 \times 0.93969262 = 46.984631 \div 47 \text{ (公尺)}$$



P.73 例 6

三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

6. 直角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, 則:

(1) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = ?$ (2) 若 $\triangle ABC$ 的面積為 $8\sqrt{3}$, 則 $\triangle ABC$ 的周長為何?

$\therefore$ 直角 $\triangle ABC$ 為 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形

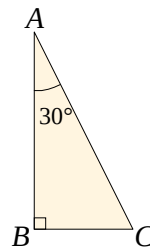
$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=\sqrt{3}:1:2$

$$(1) \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

(2) 設 $\overline{BC}=m$, 則 $\overline{AB}=\sqrt{3}m$, $\overline{AC}=2m(m \neq 0)$

$$\frac{1}{2} \times m \times \sqrt{3}m = 8\sqrt{3}, m = \pm 4 (\text{負不合})$$

$$\text{所以} \triangle ABC \text{ 周長} = 4\sqrt{3} + 4 + 8 = 12 + 4\sqrt{3}$$



P.75 例 7

三上 1-4 相似三角形的應用 姓名_____ 年 月 日

7. 如右圖，小妍在 A 點測得山頂 D 的仰角為 30° ，若他往山腳 C 的方向前進 500 公尺到達 B 點，再測得山頂的仰角為 45° ，試問山高 $\overline{CD}$ 為多少公尺？

$\therefore \triangle BCD$ 為 45° 、 45° 、 90° 的直角三角形

可設 $\overline{BC} = \overline{CD} = x$

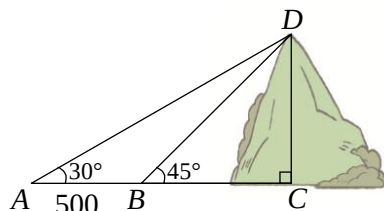
又 $\triangle ACD$ 為 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形

$\therefore \overline{CD} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{3}$

$x : (500 + x) = 1 : \sqrt{3}$

$500 + x = \sqrt{3}x$

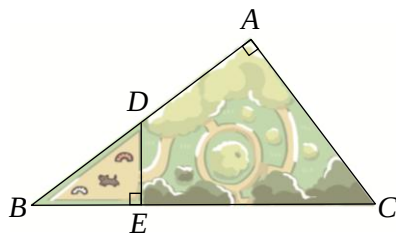
$x(\sqrt{3} - 1) = 500, x = \frac{500}{\sqrt{3} - 1} = 250(\sqrt{3} + 1)$ (公尺)



P.76 例 8

挑錯題

如右圖， $\triangle ABC$ 是一個直角三角形公園，其中 $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 40$ 公尺、 $\overline{AC} = 30$ 公尺。小妍發現遛狗區 $\triangle EBD$ 也是一個直角三角形， $\angle BED = 90^\circ$ ，而且測量出 D 點剛好是 $\overline{AB}$ 的中點，小妍計算出「 $\triangle EBD$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的四分之一」的過程如下。判斷他的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。



在 $\triangle EBD$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$\therefore \angle B = \angle B, \angle BED = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EBD \sim \triangle ABC$ (AA 相似性質)，

又 $\overline{BD} : \overline{AB} = 1 : 2, \therefore \triangle EBD$ 面積 : $\triangle ABC$ 面積 = $1^2 : 2^2 = 1 : 4$,

故 $\triangle EBD$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{1}{4}$ 倍。

正確解法： $\therefore \triangle EBD \sim \triangle ABC$ (AA 相似性質)

且 $\overline{BD}$ 的對應邊為 $\overline{BC}$

$\therefore \overline{BD} : \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB} : \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = 20 : 50 = 2 : 5$

$\triangle EBD$ 面積 : $\triangle ABC$ 面積 = $2^2 : 5^2 = 4 : 25$

學完本章的數學概念後，
你可以翻到書末的數桌遊

(P.[8] 點亮全盤)，熟練三角形的相似性質吧！



故 $\triangle EBD$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{4}{25}$ 倍

一題多解

直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=20$, $\overline{AC}=16$ 。作 $\overline{BC}$ 的中垂線 L , 分別交 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 於 D 、 E 兩點, 求 $\overline{CD}=?$

