

3-2

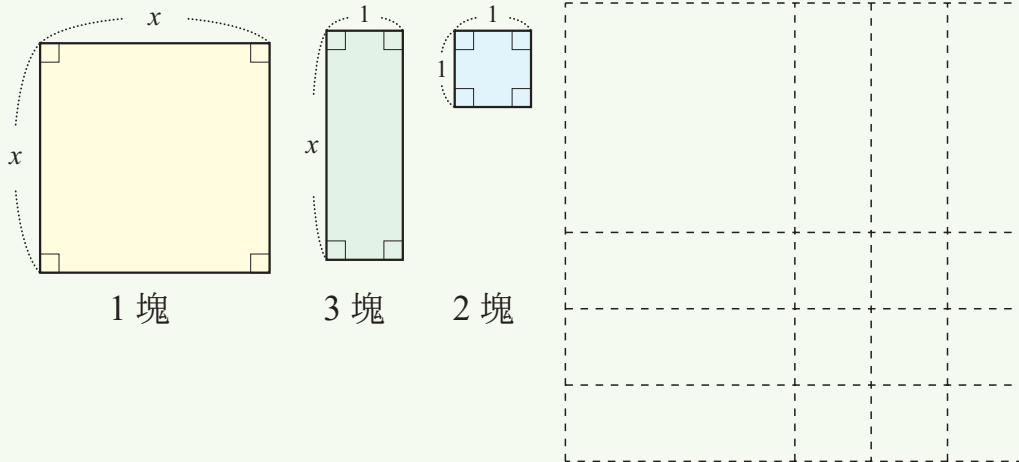
利用十字交乘法因式分解

- ① 二次項係數為 1 的一元二次式 ② 次項係數不為 1 的一元二次式
③ 十字交乘法的綜合運用



溫故啟思

- ① 如何將 1 塊「 $x \cdot x$ 」、3 塊「 $x \cdot 1$ 」、2 塊「 $1 \cdot 1$ 」的組合式地毯，拼成一個長方形？利用將虛線區域填滿的方式記錄結果，並且找出長方形的長、寬與面積（以 x 的多項式表示）。（可使用附件 5、6）



長方形的面積為 ()；

長為 ()；

寬為 ()。

- ② 參考上題拼出的長方形，完成以下空格。

$$x^2 + 3x + 2 = (x + \quad)(x + \quad)。$$

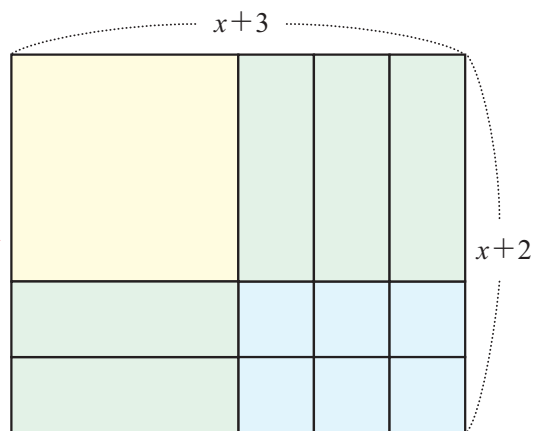
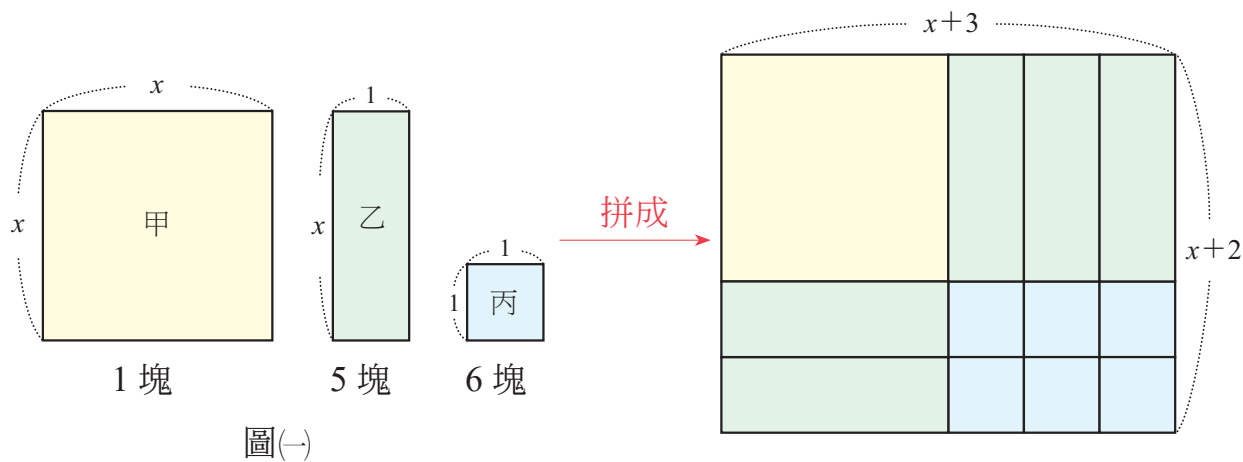
我們已經學習了提公因式法和利用乘法公式來因式分解，本節將學習「十字交乘法」來作一元二次式的因式分解。



到底怎麼拼成一個大長方形地毯呢？

1 二次項係數為 1 的一元二次式

如圖(一)有大正方形甲、長方形乙、小正方形丙各若干塊的地毯，利用這些地毯可以拼成一個大長方形，如圖(二)。(可使用附件 5、6)



由圖(二)可知，其中擺直的乙地毯有 3 塊，擺橫的乙地毯有 2 塊。

也就是說，大長方形的邊長 $(x+3)$ 和 $(x+2)$ 中的「3」+「2」就是綠色長方形地毯數量，且「3」 $\times$ 「2」就是藍色正方形地毯數量。

如下圖所示，所有地毯的面積和 = 大長方形地毯的長 $\times$ 寬。

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3+2)x + (3 \times 2) = (x+3)(x+2)$$

(3 + 2) (3 $\times$ 2)

例 1 利用十字交乘法做因式分解（常數項為質數）

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

(1) $x^2 + 8x + 7$ (2) $x^2 - 8x + 7$

解

(1) 將常數項 7 分解成 1×7 ，

又由十字交乘法知 $x + 7x = 8x$ ，

故 $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$

$$\begin{array}{r} \text{二次項 } x^2 \left\langle \begin{array}{c} x \quad +1 \\ x \quad +7 \end{array} \right\rangle 7 \text{ 常數項} \\ \hline +1x + 7x = +8x \leftarrow \text{一次項} \end{array}$$

(2) 將常數項 7 分解成 $(-1) \times (-7)$ ，

又由十字交乘法知 $-x - 7x = -8x$ ，

故 $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$

$$\begin{array}{r} \text{二次項 } x^2 \left\langle \begin{array}{c} x \quad -1 \\ x \quad -7 \end{array} \right\rangle 7 \text{ 常數項} \\ \hline -1x - 7x = -8x \leftarrow \text{一次項} \end{array}$$

隨堂練習

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

(1) $x^2 + 6x + 5$

(2) $x^2 - 6x + 5$

在例題 1 中，也可以將 x^2 分解成 $(-x)(-x)$ ，再利用十字交乘法得到下列的因式分解：

① $x^2 + 8x + 7 = (-x - 1)(-x - 7) = (x + 1)(x + 7)。$

② $x^2 - 8x + 7 = (-x + 1)(-x + 7) = (x - 1)(x - 7)。$

因此利用十字交乘法因式分解一元二次式時，若 x^2 項係數為正數，則只要考慮 x^2 項係數的正因數即可。



探索活動

二次式的一次項係數與常數項關係

若 $x^2 + ax - 10$ 可以利用十字交乘法因式分解成 $(x + m)(x + n)$ ，則整數 m 、 n 可能為何？其相對應的 a 值為何？完成下方表格。

m	1	2	5	10	-1	-2		
n	-10	-5	-2	-1			2	1
a	-9	-3			9	3	-3	-9

從探索活動中可以發現，在利用十字交乘法因式分解一元二次式時，有許多種可能的情形需要考慮，例如因式分解 $x^2 + ax - 10$ 時，常數項 -10 寫成兩個整數的乘積有四種：

$$-10 = 1 \times (-10) = (-1) \times 10 = 2 \times (-5) = (-2) \times 5$$

相對應的十字交乘法如下：

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad \begin{array}{c} x^2 \left\langle \begin{array}{cc} x & +1 \\ x & -10 \end{array} \right\rangle -10 \\ \hline +x - 10x = -9x \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \quad \begin{array}{c} x^2 \left\langle \begin{array}{cc} x & -1 \\ x & +10 \end{array} \right\rangle -10 \\ \hline -x + 10x = +9x \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{3} \quad \begin{array}{c} x^2 \left\langle \begin{array}{cc} x & +2 \\ x & -5 \end{array} \right\rangle -10 \\ \hline +2x - 5x = -3x \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{4} \quad \begin{array}{c} x^2 \left\langle \begin{array}{cc} x & -2 \\ x & +5 \end{array} \right\rangle -10 \\ \hline -2x + 5x = +3x \end{array} \end{array}$$

只要試試這四種情形，看哪一種交叉相乘後的和恰好是一次項係數即可。

當有一種組合正確時，其它組合即可不用再試。

例2 十字交乘法做因式分解（常數項為正數）

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

(1) $x^2 + 9x + 20$

(2) $x^2 - 21x + 20$

解

$$\begin{array}{l} \text{(1) 二次項} \rightarrow x^2 \left\langle \begin{array}{c} x \quad +4 \\ x \quad +5 \end{array} \right\rangle + 20 \leftarrow \text{常數項} \\ \hline +4x + 5x = +9x \leftarrow \text{一次項} \end{array}$$

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$\begin{array}{l} \text{(2) 二次項} \rightarrow x^2 \left\langle \begin{array}{c} x \quad -1 \\ x \quad -20 \end{array} \right\rangle + 20 \leftarrow \text{常數項} \\ \hline -x - 20x = -21x \leftarrow \text{一次項} \end{array}$$

$$x^2 - 21x + 20 = (x - 1)(x - 20)$$



隨堂練習

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

(1) $x^2 + 22x + 21$

(2) $x^2 - 10x + 21$

例 3 十字交乘法做因式分解（常數項為負數）

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

(1) $x^2 - 9x - 10$

(2) $x^2 + 3x - 10$

解

(1)
$$x^2 \begin{array}{c} \diagup x \diagdown +1 \\ \diagdown x \diagup -10 \end{array} - 10$$

$$+x - 10x = -9x$$

$$x^2 - 9x - 10 = (x + 1)(x - 10)$$

(2)
$$x^2 \begin{array}{c} \diagup x \diagdown -2 \\ \diagdown x \diagup +5 \end{array} - 10$$

$$-2x + 5x = +3x$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

隨堂練習

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

(1) $x^2 + 2x - 35$

(2) $x^2 - 34x - 35$

? 迷思診療

十字交乘法要有一次項？



$x^2 - 36$ 也可以用十字交乘法來因式分解嗎？

$x^2 - 36$ 只能用平方差公式來因式分解啦！



浩南

你認為浩南的說法是正確的嗎？為什麼？